Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 513.881

ЗАМЕЧАНИЯ О СУЩЕСТВОВАНИИ БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСОВ В ВЕСОВЫХ СЧЕТНО–ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ДОПОЛНЯЕМЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

В. П. Кондаков

Аннотация: Приводятся версии критерия существования безусловных базисов в счетно-гильбертовых пространствах. В качестве приложений получены теоремы о существовании безусловных базисов в нескольких классах счетно-гильбертовых пространств функций, а также в их дополняемых подпространствах при дополнительных ограничениях на пространства и соответствующие проекторы на дополняемые подпространства. Среди пространств этих классов имеются обобщения пространств степенных рядов конечного типа и пространства Кёте, определяемые функциями типа Драгилева. Библиогр. 45.

После появления примеров ядерных пространств Фреше, не имеющих базисов (см. [1–3]), все больший интерес вызывают исследования вопроса о существовании базисов в конкретных классах весовых пространств Фреше и в дополняемых подпространствах таких пространств, которые имеют базисы (см., например, [4, 5]).

В настоящей работе приводятся версии критерия существования безусловных базисов в счетно-гильбертовых пространствах. Эти версии выводятся с помощью известного метода «тупикового» пространства, применявшегося в [6] и позже получившего развитие в работах разных авторов (см., например, [4, 5, 7–28]). В качестве приложения приводятся теоремы о существовании безусловных базисов в весовых пространствах функций и в некоторых их дополняемых подпространствах.

Вопрос о существовании базисов в конкретных пространствах Фреше исторически рассматривался одновременно с вопросом о квазиэквивалентности (единственности) базисов (см. [6, 29–35]), и в исследованиях этих вопросов имеется целый ряд общих приемов. Метод «тупикового» пространства использовался первоначально для получения достаточных условий существования безусловных (абсолютных) базисов в некоторых классах пространств Фреше [4–8, 36–40]. В случае пространств Фреше, изоморфных дополняемым подпространствам ядерных пространств с правильными базисами, в [7, 8] был доказан с помощью данного метода критерий существования правильного базиса в указанных пространствах. Затем в [11] установлено,что существование «тупикового» пространства с нужными свойствами для интерполяции операторов

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00215).

является необходимым и в общем случае для существования p-абсолютного базиса в пространстве Фреше. В результате описанной эволюции получен следующий критерий существования безусловного базиса в счетно-гильбертовых пространствах в терминах интерполяции линейных операторов.

Теорема 1. *Для того чтобы счетно-гильбертово пространство* $(E, (\|\cdot\|_r))$ *имело безусловный базис, необходимо и достаточно условие: существуют такие две пары гильбертовых пространств* $(H_{0,i}, \|\cdot\|_{0,i})$, $(H_{\infty i}, \|\cdot\|_{\infty,i})$, $i = 1, 2$, *что*

$$H_{0,1} \supseteq H_{0,2} \supset E \supset H_{\infty,1} \supseteq H_{\infty,2}$$

и

1) $\|\cdot\|_{0,i}$ $(i = 1, 2)$ — *непрерывные нормы на* E;

2) $H_{\infty,2}$ *плотно в* E *и вложение* $H_{\infty,1} \to E$ *непрерывно;*

3) $(\forall r \in N\ \exists s(r) \in N,\ C(r) > 0)\ \|T\|_{r,s(r)} \leqslant C(r) \max\{\|T\|_{0,1;0,2}, \|T\|_{\infty,1;\infty,2}\}$, *где* $\|T\|_{j;k} = \sup\limits_{e:\|e\|_k=1} \|Te\|_j$, $j, k \in \{(0, i), 1, 2, \dots, (\infty, i)\}$ *для каждого линейного конечномерного оператора* $T : E \to E$.

Доказательство. Необходимость. Пусть счетно-гильбертово пространство $(E, (|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty})$ имеет безусловный базис (e_n). Тогда согласно независимым замечаниям в [37, 38] (см. также [39]) E изоморфно пространству Кёте

$$\ell_2[|e_n|_r] = \left\{x = (x_n) : \|x\|_r = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |e_n|_r^2\right)^{1/2} < \infty,\ r \in \mathbb{N}\right\},$$

в котором базис ортов отождествляется с базисом (e_n).

Поэтому будем сразу предполагать $E = \ell_2[|e_n|_r]$.

Обозначим $|e_n|_r = a_r(n)$, $r, n \in \mathbb{N}$, и, как в [11], определим последовательности положительных чисел $a_0(n)$, $a_\infty(n)$, $n \in \mathbb{N}$, так, чтобы

$$(\forall r\ \exists D(r) > 0)\ a_0(n) \leqslant a_r(n) \leqslant D(r) a_\infty(n), \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\frac{a_r(m)}{a_r(n)} \leqslant D(r) \frac{a_0(m)}{a_0(n)},\ m \leqslant n, \quad \frac{a_r(m)}{a_r(n)} \leqslant D(r) \frac{a_\infty(m)}{a_\infty(n)},\ m > n.$$

Для этого можно взять сначала довольно произвольно неограниченную последовательность натуральных чисел $(k(n))$, $1 \leqslant k(n) \leqslant k(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, первые значения $a_0(1) = a_\infty(1) = a_1(1)$ и, когда $a_0(1), \dots, a_0(n)$, $a_\infty(1), \dots, a_\infty(n)$ уже выбраны, полагать

$$a_0(n+1) = \min\left\{\frac{a_0(i) a_r(n+1)}{a_r(i)} : 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant r \leqslant k(n)\right\}$$
$$a_\infty(n+1) = \max\left\{\frac{a_\infty(i) a_r(n+1)}{a_r(i)}, a_{k(n)}(n+1) : 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant r \leqslant k(n)\right\}.$$

Затем по формулам

$$\|x\|_0 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e'_n(x) a_0(n)|^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e'_n(x) a_\infty(n)|^2\right)^{1/2},$$

где $e'_n(\cdot)$ — координатные функционалы базиса (e_n), определяются гильбертовы нормы $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{0,1} = \|\cdot\|_{0,2}$, $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty,1} = \|\cdot\|_{\infty,2}$ на линейной оболочке базисных элементов и пополнения ее по соответствующим нормам дают гильбертовы пространства $H_0 = H_{0,i}$, $H_\infty = H_{\infty,i}$ $(i = 1, 2)$.

Согласно построению вспомогательных норм, очевидно, выполнены условия 1, 2 теоремы, а свойство 3 гарантируется для операторов частного вида $T_{m,n} : T_{m,n}e_m = e_n$, $T_{m,n}e_k = 0$, $k \neq m$,

$$\|T_{m,n}\|_{r,r} = \frac{a_r(n)}{a_r(m)} \leqslant D(r)\max\left\{\frac{a_0(n)}{a_0(m)}, \frac{a_\infty(n)}{a_\infty(m)}\right\}$$
$$= D(r)\max\{\|T_{m,n}\|_{0,0}, \|T_{m,n}\|_{\infty,\infty}\}, \quad m, n, r \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что условие 3 теоремы выполняется для любого непрерывного линейного оператора $T : E \to E$. Для этого определим при каждом натуральном $r \in \mathbb{N}$ последовательность чисел

$$b_r(n) = \inf\left\{\max\left\{\frac{a_0(n)a_r(m)}{a_0(m)}, \frac{a_\infty(n)a_r(m)}{a_\infty(m)}\right\},\ m \in \mathbb{N}\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и гильбертову норму

$$\|x\|_r = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e'_n(x)b_r(n)|^2\right)^{1/2}, \quad x \in E.$$

Так как согласно построению

$$a_r(n) \leqslant D(r)b_r(n) \leqslant D(r)a_r(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

система новых гильбертовых норм $(\|\cdot\|_r)$ эквивалентна исходной на E и нормы оператора T в условии 3 теоремы можно вычислять относительно новых норм

$$\|T\|_{r,r} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_r}{\|x\|_r},\ x \neq 0\right\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Новые весовые последовательности (нормы элементов базиса) допускают также представление

$$b_r(n) = a_0(n)\Psi_r\left(\frac{a_\infty(n)}{a_0(n)}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где Ψ_r — квазивогнутая (т. е. эквивалентная вогнутой на $(0, \infty)$) функция. Нужное представление легко получается из критерия эквивалентности положительной функции вогнутой [41, теорема 1.1], ибо $\Psi_r(a_\infty(n)/a_0(n)) = b_r(n)/a_0(n)$ монотонно растет с ростом $a_\infty(n)/a_0(n)$ и $\Psi_r(a_\infty(n)/a_0(n))a_0(n)/a_\infty(n)$ монотонно убывает с ростом $a_\infty(n)/a_0(n)$.

В таком случае согласно результату работы [42] каждая новая норма является интерполяционной по отношению к паре норм $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_\infty$, т. е. каждый линейный оператор, ограниченный в паре пространств H_0, H_∞, является ограниченным в каждом банаховом пространстве, полученном пополнением E по норме $\|\cdot\|_r$. Тогда при любом $r \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|T\|_{r,r} \leqslant B(r)\max\{\|T\|_{0,0}, \|T\|_{\infty,\infty}\}$$

(см. [42] или [41, лемма 4.3]) для операторов $T : E \to E$, которые можно рассматривать как ограниченные в крайних пространствах, а для остальных линейных непрерывных операторов в рассматриваемом пространстве неравенство формально всегда выполняется и условие 3 — тем более.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Стандартным путем определим «общий» ортогональный базис (e_n) в $H_{\infty,1}$ и $H_{0,1}$. Следует только пояснить, что, когда каноническое отображение $k : H_{\infty,1} \to H_{0,1}$ не является компактным, то может потребоваться заменить норму в $H_{\infty,1}$ эквивалентной, определяемой по спектральному представлению самосопряженного оператора $k'k : H_{\infty,1} \to H_{\infty,1}$ так, чтобы этот оператор имел дискретный спектр (см., например, [11, 17]).

По этому базису определяется семейство конечномерных операторов

$$P_n(\varepsilon)x = \sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m e'_m(x) e_m, \quad \varepsilon = (\varepsilon_m) : |\varepsilon_m| = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

которое равностепенно непрерывно в пространствах $H_{0,1}$ и $H_{\infty,1}$. Из условия 3 теоремы следует, что рассматриваемое семейство операторов равностепенно непрерывно и в E. При этом разложения

$$x(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m e'_m(x) e_m$$

сходятся на плотном в E множестве элементов из $E_{\infty,1} \supseteq E_{\infty,2}$ и применение теоремы Банаха — Штейнгауза дает требуемый факт, что (e_n) является безусловным базисом в E, и завершает доказательство теоремы.

Другими словами, счетно-гильбертово пространство является интерполяционным между некоторыми двумя гильбертовыми пространствами тогда и только тогда, когда оно имеет безусловный базис.

Как известно, в ядерном локально выпуклом пространстве топология может всегда быть определена с помощью некоторой системы гильбертовых полунорм (см., например, [6, 35], и там же можно найти определение ядерности). Для ядерных пространств Фреше имеется и немного другая форма критерия существования базиса (см. [22], ср. [23]).

Теорема 2. *Пусть E — ядерное счетно-нормированное пространство и $(|\cdot|_r)$ — фундаментальная система норм на нем; E имеет базис тогда и только тогда, когда существуют гильбертовы пространства $(H_0, |\cdot|_0)$ и $(H_\infty, |\cdot|_\infty)$ такие, что $H_0 \supset E \supset H_\infty$ и*

1) *$|\cdot|_0$ — непрерывная норма на E;*

2) *H_∞ плотно в E, и вложение $H_\infty \to E$ непрерывно;*

3) $(\forall r \in \mathbb{N}\ \exists s(r) \in \mathbb{N},\ B(r) > 0)$ $a_n = a_n(r, s(r)) \downarrow 0$, $A_n = A_n(r, s(r)) \uparrow \infty$ $(n \uparrow \infty)$,

$$U_{s(r)} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n U_0 + A_n U_\infty) \subseteq \mathrm{cl.\,conv}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n U_0 \cap A_n U_\infty)\right) \subseteq B(r) U_r, \quad r \in \mathbb{N},$$

где $U_j = \{e \in E : |e|_j \leqslant 1\}$, $j \in \{0, \infty, \mathbb{N}\}$ и замыкание абсолютно выпуклой оболочки cl. conv *берется в E.*

Отметим простой факт, что средние множества вложений в условии 3 теоремы 2 определяют интерполяционные нормы по отношению к указанной паре гильбертовых норм.

В качестве одного из приложений критерия существования безусловного базиса теоремы 1 рассмотрим сравнительно простую ситуацию весовых пространств функций. Весовые пространства применяются в комплексном анализе, теории уравнений с частными производными, теории вероятностей и других областях. Для простоты мы ограничимся здесь следующим «модельным» случаем.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ — неограниченная область, μ — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$ и $A = (a_r(\cdot))$ — последовательность положительных измеримых функций:

$$0 < a_r(z) \leqslant a_{r+1}(z), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \overline{\Omega}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Будем рассматривать пространства квадратично суммируемых с весами функций в виде проективных пределов

$$L_2(A) = \lim_r \operatorname{pr} L_2(a_r)$$

гильбертовых пространств

$$L_2(a_r) = \left\{ f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \ \int_\Omega |f(z)|^2 a_r^2(z)\, d\mu(z) = |f|_r^2 < \infty \right\}$$

относительно естественных вложений.

Для указанных проективных пределов опишем основное предположение, которое нам понадобится для построения «тупиковых» гильбертовых норм формулировки теоремы 1. Последовательность $A = (a_r(\cdot))$ назовем *простой*, если каждая весовая функция $a_r(\cdot) \in A$ принимает на любом множестве $\Omega_s = B_s(0) \cap \overline{\Omega}$, где $B_s(0) = \{z : |z| \leqslant s\}$, $s < \infty$, почти везде конечное число значений: $0 < m(r) \leqslant a_r(z) < \infty$.

Если первоначально топология пространства $L_2(A)$ определялась непрерывными функциями $a_r(\cdot)$, $r \in \mathbb{N}$, то можно указать и простую последовательность весовых функций, определяющую в этом пространстве исходную топологию. Действительно, при любом $r \in \mathbb{N}$ из открытого покрытия компактного множества $B_r(0) \cap \overline{\Omega}$, состоящего, например, из всевозможных множеств

$$V(z_0) = \left\{ z : \frac{1}{2} a_r(z) < a_r(z_0) < 2a_r(z) \right\}, \quad z_0 \in B_r \cap \overline{\Omega},$$

можно извлечь конечное подпокрытие и с помощью несложной процедуры построить простую последовательность весовых функций, определяющую эквивалентную систему гильбертовых норм по отношению к исходной.

Теорема 3. *В счетно-нормированном пространстве E, изоморфном проективному пределу $L_2(A)$, определяемому простой последовательностью весовых функций, есть безусловный базис. В этом случае E изоморфно некоторому пространству Кёте числовых последовательностей.*

Доказательство. Исходя из определения простой последовательности весовых функций, проведем вспомогательное построение последовательности измеримых множеств (Z_m), $Z_m \subset \Omega$, на которых затем определим весовые функции $a_0(\cdot), a_\infty(\cdot)$ для «тупиковых» норм. Занумеруем сначала все множества с отличными от нуля мерами, целиком расположенные в $B_1(0) \cap \Omega$, на которых функция a_1 постоянна: $Z_1, Z_2, \dots, Z_{m(1)}$. Затем продолжим упорядочение уже всевозможных пересечений множеств постоянства функций a_1 и a_2, которые целиком лежат в $B_2(0) \cap \Omega \setminus B_1(0)$ и имеют отличные от нуля меры. Обозначив их через $Z_{m(1)+1}, Z_{m(1)+2}, \dots, Z_{m(2)}$, на третьем шаге выписываем всевозможные пересечения множеств постоянства функций a_1, a_2, a_3 в следующем слое, и т. д. В результате получим последовательность множеств (Z_m), объединение которых исчерпывает Ω, за исключением, может быть, некоторого множества $\Omega \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Z_m = Z_0 : \mu(Z_0) = 0$. Выберем в каждом множестве Z_m произвольно точку z_m и, как в доказательстве необходимости условий теоремы 1, положим $a_0(z_1) = a_\infty(z_1) = a_1(z_1)$, а затем продолжим по индукции:

$$a_0(z_{m+1}) = \inf_{z,r}\left\{\frac{a_0(z)a_r(z_{m+1})}{a_r(z)}, a_1(z_{m+1})\right\},$$
$$a_\infty(z_{m+1}) = \sup_{z,r}\left\{\frac{a_\infty(z)a_r(z_{m+1})}{a_r(z)}, a_r(z_{m+1})\right\}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\inf\limits_{z,r}$ и $\sup\limits_{z,r}$ берутся по всевозможным парам $(z, r) : z \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} Z_i$, $r = [|z_{m+1}|] + 1$.

Функции $a_0(\cdot)$ и $a_\infty(\cdot)$ получаются простым доопределением $a_0(z) = a_0(z_m)$, $a_\infty(z) = a_\infty(z_m)$, $z \in Z_m$, $m \in \mathbb{N}$, $a_0(z) = a_\infty(z) = 1$, $z \in Z_0$. Соответствующие нормы вводим обычным образом:

$$\|f\|_0 = \left(\int\limits_\Omega |f(z)|^2 a_0^2(z)\, d\mu(z)\right)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \left(\int\limits_\Omega |f(z)|^2 a_\infty^2(z)\, d\mu(z)\right)^{1/2}$$

на плотном в E множестве финитных функций, и пополнения по этим гильбертовым нормам дают пространства $H_0 = H_{0,i}$, $H_\infty = H_{\infty,i}$, $i = 1, 2$. Первые два условия теоремы 1 выполняются очевидным образом, а условие 3 получается, как и в доказательстве теоремы, из условия интерполяции

$$(\forall r\, \exists C(r) > 0\, \forall z)\ \frac{a_r(z)}{a_r(w)} \leqslant C(r) \max\left\{\frac{a_0(z)}{a_0(w)}, \frac{a_\infty(z)}{a_\infty(w)}\right\}, \quad w \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Чтобы убедиться в справедливости этого условия, достаточно заметить, что величина

$$D(r) = \sup\left\{\frac{a_r(z)}{a_r(w)} \Big/ \max\left\{\frac{a_0(z)}{a_0(w)}, \frac{a_\infty(z)}{a_\infty(w)}\right\} :\ \max\{|z|, |w|\} \leqslant r\right\}$$

конечна при любом $r \in \mathbb{N}$, и если $\max\{|z|, |w|\} > r$, $z, w \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то для этой пары точек требуемое неравенство выполняется с константой, равной 1, согласно определению множеств A_i и функций $a_0(\cdot)$, $a_\infty(\cdot)$. Поэтому требуемое условие интерполяции имеет место с константой $C(r) = \max\{D(r), 1\}$. Остается завершить доказательство дословным повторением аргументов, изложенных в доказательстве теоремы 1.

Заметим, что, когда рассматриваемые проективные пределы $L_2(A)$ (даже несчетной совокупности гильбертовых пространств) являются локально выпуклыми решетками с дополнительным свойством монтелевости, утверждение о существовании безусловного базиса может быть получено с помощью метода дискретных решеток работы [43] (см. также [44]). Не известно, как применить этот «решеточный» метод доказательства существования безусловного базиса при отсутствии условия монтелевости и как получить в других случаях после успешного применения этого метода реализацию пространства в виде пространства Кёте.

Теорема 4. *Пусть топология счетно-нормированного пространства $L_2(A)$ определяется последовательностью $A = (a_r(\cdot))$ непрерывных весов: $1 \leqslant a_r(z) \leqslant a_{r+1}(z)$, $r \in \mathbb{N}$, $z \in \Omega$. Тогда пространство $L_2(A)$ изоморфно блочному пространству Кёте*

$$l_2([a_r(z_n)], (E_n)) = \left\{ x = (x_n) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2 a_r^2(z_n) \right)^{1/2} = |x|_r < \infty, \ r \in \mathbb{N} \right\},$$

где $E_n = l_2$, $n \in \mathbb{N}$, а последовательность (z_n) определена в доказательстве теоремы 1.

Доказательство. В случае непрерывных весов можно оперировать с открытыми множествами Z_m согласно сделанному перед теоремой 1 замечанию и общий базис блочного пространства Кёте получится выписыванием ортонормированных базисов подпространств

$$E_m = \left\{ f : \operatorname{supp} f \subseteq Z_m, \ \|f\|_m = \left(\int_{Z_m} |f(z)|^2 a_1^2(z_m)\, d\mu(z) \right)^{1/2} \right\}.$$

Теорема доказана.

В случае, когда все функции $a_r(\cdot)$ последовательности A непрерывны, радиальны (т. е. $a_r(z) = a_r(|z|)$, $z \in \Omega$) и удовлетворяют условию

$$\frac{a_r(z)}{a_{r+1}(z)} \downarrow 0 \quad (|z| \uparrow \infty)$$

в указанной выше реализации пространства $L_2(A)$, матрица $[a_r(z_m)]$ будет правильной в смысле работы [45], а все пространство имеет упорядочиваемый безусловный базис (определение, см., например, в [32]).

Покажем, что с помощью теоремы 1 могут быть получены обобщения известных результатов о существовании безусловных базисов в дополняемых подпространствах (весовых) пространств Кёте. Здесь мы ограничимся двумя примерами. Первый представляет собой обобщение результатов работ [5, 17, 25] о существовании базисов в образах так называемых «ручных» операторов.

Напомним, что линейный оператор T, действующий в счетно-нормированном пространстве E с фиксированной системой норм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$, называют *линейно-ручным* (см. [5]), если выполнено условие

$$(\exists a, b \in \mathbb{N}_0, C(r) > 0) \ |Te|_r \leqslant C(r)|e|_{ar+b}, \quad r \in \mathbb{N}, \ e \in E.$$

В приложениях ниже рассматриваются дополняемые подпространства в пространствах Кёте из следующих двух классов, введенных в работе [45].

Пространство Фреше E относят к классу (d_i), $i = 1, 2$, если оно изоморфно пространству Кёте

$$l_p[a_r(n)] = \left\{ \xi = (\xi_n); \left(\sum_n |\xi_n|^p a_r^p(n) \right)^{1/p} = |\xi|_r < \infty, \ r \in \mathbb{N} \right\},$$

матрица которого удовлетворяет соответственно условию

$$(d_1) \quad (\exists r\, \forall s\, \exists t) \ \sup_n \frac{a_s^2(n)}{a_r(n)a_t(n)} < \infty, \quad (d_2) \quad (\forall r\, \exists s\, \forall t) \ \sup_n \frac{a_r(n)a_t(n)}{a_s^2(n)} < \infty.$$

Кроме того, в рассматриваемых случаях предполагается наличие упорядочиваемого базиса ортов (обобщенная правильность, см., например, [32]). Это означает, что пространство Фреше изоморфно некоторому блочному пространству Кёте $l_2\big([a_r(n)], \big(l_2^{k(n)}\big)\big)$, $k(n) \leqslant \infty$, матрица которого является правильной, т. е.

$$\frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \downarrow 0, \quad n \uparrow \infty, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Для правильной матрицы $[a_r(n)]$ всегда можно предполагать строгую монотонность $(a_r(n))$ по n при любом фиксированном r. В противном случае это достигается заменой матрицы эквивалентной с сохранением свойства правильности. Тогда можно получить с помощью линейной интерполяции строго монотонную функцию $a_r(\cdot)$, у которой есть обратная $a_r^{-1}(\cdot)$, $r \in \mathbb{N}$.

Пусть $f(\cdot)$ — неубывающая нечетная функция на числовой оси, удовлетворяющая условиям

$$f(0) = 0, \quad f(tu) - f(u) \uparrow \infty (u \uparrow \infty), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(tu)}{f(u)} = \infty \quad \forall t > 1.$$

Теорема 5 (см. [26]). *Пусть в весовом пространстве*

$$L_2[\exp f(rt)] = \left\{ f : \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \exp 2f(rt) dt \right)^{1/2} = |f|_r < \infty \ \forall r \right\}$$

с фиксированной системой норм $(|\cdot|_r)$, *определяемой функцией* f *с указанным свойством, задан проектор* P *со следующими оценками:*

$$(\exists b, d \in (C(r) > 0)_{r=1}^{\infty} \forall r \in \mathbb{N}) \ |Pf|_r \leqslant C(r)|f|_{br+d}, \quad f \in L_2[\exp f(rt)].$$

Тогда образ этого проектора $PE = F$ *имеет безусловный базис и изоморфен некоторому пространству Кёте числовых последовательностей.*

Доказательство. Пусть P — линейно-ручной проектор в E с образом $PE = F$. В качестве пространства $H_{0,1}$ теоремы 1 возьмем пополнение $(F, |\cdot|_1)$, а в качестве $H_{0,2}$ — пополнение $(F, |\cdot|_{a+b})$, где $|Pe|_1 \leqslant C(1)|e|_{a+b}$, $e \in E$. Далее будем строить так «тупиковые» нормы, чтобы выполнялись предположения теоремы 1.

Выбрав произвольно неограниченную последовательность натуральных индексов $(n(k))_{k=1}^{\infty}$, определим с помощью индукции числа

$$M(0) = 1, \quad M(j) \geqslant \max\{2^j C(j), \exp\{f(jb_{n(j)}) - f((j-1)b_{n(j)})\}, M(j-1)\},$$

где числа $C(j)$ из определения линейно-ручного оператора.

Положим

$$\Phi(t) = \sup_k \frac{\exp f(kt)}{\prod_{j=0}^{k} M(j)}, \quad t > 0.$$

При каждом $t > 0$ определится натуральный индекс $k(t)$, равный

$$\min\{k : M(k) \leqslant \exp\{f(kt) - f((k-1)t)\}, \exp\{f((k+1)t) - f(kt)\} < M(k+1)\}.$$

Согласно сделанным предположениям относительно f функция $k(t)$ не убывает по t и еще можно считать, что

$$M(j) \geqslant \exp\{f(jt) - f((j-1)t)\}, \quad j > k(t).$$

Легко заметить, что тогда

$$\Phi(t)=\frac{\exp f(k(t)t)}{\prod\limits_{j=0}^{k(t)} M(j)}.$$

Покажем, как в [5], что при любом $r\in\mathbb{N}$ отношение $\exp f(rt)/\Phi(t)$ не возрастает при $t>T(r)$.

Пусть $t_1<t_2$ и $r\in\mathbb{N}$. При $k(t_1)>r$ имеем

$$\frac{\exp f(rt_2)}{\Phi(t_2)}\leqslant\frac{\left[\prod\limits_{j=0}^{k(t_1)} M(j)\right]\exp\{f(k(t_2)t_2)-f(k(t_1)t_2)\}}{\exp\{f(k(t_2)t_2)-f(rt_2)\}}$$
$$\leqslant\frac{\prod\limits_{j=0}^{k(t_1)} M(j)}{\exp\{f(k(t_1)t_2)-f(rt_2)\}}\leqslant\frac{\prod\limits_{j=0}^{k(t_1)} M(j)}{\exp\{f(k(t_1)t_1)-f(rt_1)\}}=\frac{\exp f(rt_1)}{\Phi(t_1)}.$$

Это означает, что функция $\Phi(t)$ пригодна для построения тупиковых норм с требуемым свойством интерполяции операторов:

$$\|f\|^2_{\infty,1}=\int\limits_R|f(t)|^2\Phi^2(t)\,dt,\quad \|f\|^2_{\infty,2}=\int\limits_R|f(t)|^2\Phi^2(Bt)\,dt,$$

где $B=2(b+d)$.

Тупиковые пространства $H_{\infty,i}$ получаются пополнением множества финитных функций по соответствующим гильбертовым нормам $|\cdot|_{\infty,1}$, $|\cdot|_{\infty,2}$, и остается проверить, что проектор P непрерывно действует из $H_{\infty,2}$ в $H_{\infty,1}$.

Вводя для этого вспомогательное разбиение числовой оси R на множества $\Omega_m=\{t\in R:k(t)=m\}$, $m=0,1,\dots$, имеем

$$|Pf|_{\infty,1}=\sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_{\Omega_m}|Pf(t)|^2\frac{\exp 2f(mt)}{\prod\limits_{j=0}^{m}M^2(j)}\,dt$$
$$\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C^2(m)}{2^{2m}C^2(m)}\int\limits_R|f(t)|^2\frac{\exp 2f((bm+d)t)}{\prod\limits_{j=0}^{m-1}M^2(j)}\,dt+C(D)\int\limits_R|f(t)|^2\exp 2f(dt)\,dt$$
$$\leqslant D(b,d)\int\limits_R|f(t)|^2\sup_m\frac{2f(Bmt)}{\prod\limits_{j=0}^{m}M^2(j)}\,dt=D(b,d)\|f\|_{\infty,2},$$

где $B>0$ такое, что $bk+d<B(k-1)$ при $k>2$.

Уточним еще детали применения теоремы 1. Рассмотрим пополнения F_i, $i=0,\infty$, линейной оболочки образов $P\varphi$ финитных функций φ относительно гильбертовых норм $|\cdot|_{0,1}$ и $|\cdot|_{\infty,1}$ соответственно. «Общий» ортогональный базис (f_n) в F_i, $i=0,\infty$, определяет последовательность конечномерных операторов

$$P_{n,\varepsilon}e=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i f_i'(Pe)f_i,\quad e\in E,\ \varepsilon=(\varepsilon_i),\ \varepsilon_i=\pm1,$$

которые определяют равностепенно непрерывные множества отображений из $H_{0,2}$ в $H_{0,1}$ и из $H_{\infty,2}$ в $H_{\infty,1}$.

Согласно приводившимся выкладкам и свойству функции f будем иметь условие

$$(\forall r \in \mathbb{N}\ \exists s(r) \in \mathbb{N},\ C(r) > 0\ \forall m, n \in \mathbb{N}\ (s(r) > S(r, b, d)))$$
$$\exp\{f(rt_n) - f(s(r)t_m)\} \leqslant C(r) \max\left\{\exp\{f(t_n) - f((b+d)t_m)\}, \frac{\Phi(t_n)}{\Phi(Bt_m)}\right\},$$

которое позволяет применить интерполяционную теорему из [42] и, как в доказательстве теоремы 1, сделать заключение, что набор операторов (P_n) является равностепенно непрерывным множеством операторов в E и разложения

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f) f_i$$

сходятся безусловно в счетно-гильбертовом пространстве F. В таком случае безусловная базисная последовательность (f_n) согласно [37, 38] является каноническим базисом пространства Кёте и теорема доказана.

Заметим, что приведенные построения переносятся и на случай любых пространств степенных рядов бесконечного типа, пространств L_f Драгилева [45] и могут быть модифицированы для доказательства существования безусловного базиса в образах линейно-ручных операторов (с замкнутым образом), действующих в рассматриваемых пространствах, как это делалось в случае ядерного пространства S в [5] и обобщалось затем в [9]. При этом требование ядерности (и даже монтелевости) снимается. Класс так называемых «ручных» ядерных пространств степенных рядов бесконечного типа, в которых каждое дополняемое подпространство имеет базис, допускает блочное расширение, включающее в себя и неядерные пространства (см. [17]).

Следующее утверждение может рассматриваться как некоторое обобщение результатов работ [24, 39] о существовании безусловных базисов в дополняемых подпространствах пространств степенных рядов конечного типа и в ядерных пространствах из отдельных классов L_f [10].

Теорема 6. *Пусть пространство Кёте $E = l_2\big([a_r(n)], \big(l_2^{k(n)}\big)\big)$, $k(n) \leqslant \infty$; $n \in \mathbb{N}$, определяется правильной матрицей $[a_r(n)]$, принадлежит классу (d_2) и выполняется условие*

$$(\forall r(1) < r(2)\, \forall r\, \exists s_1(r) < s_2(r) < s_3(r),\ B(r) > 0\ \forall n \in \mathbb{N})$$
$$\frac{a_r\big(a_{s_1(r)}^{-1}(B(r)a_{s_2(r)}(n))\big)}{a_{r(1)}\big(a_{s_1(r)}^{-1}(B(r)a_{s_2(r)}(n))\big)} \leqslant B(r)\frac{a_{s_3(r)}(n)}{a_{r(2)}(n)}.$$

Тогда любое дополняемое подпространство F в E изоморфно координатному подпространству, порождаемому некоторой совокупностью единичных ортов.

В пространствах Кёте $E = l_2[\exp f(\frac{1}{r}b_n)]$, где функция f удовлетворяет приведенным выше условиям, (b_n) произвольна, любое дополняемое подпространство имеет безусловный базис и изоморфно подходящему координатному подпространству.

Доказательство. Чтобы применить утверждение теоремы 1, определим тупиковую норму $\|\cdot\|_{\infty,2}$, исходя из определения класса (d_2). Так как матрица

$[a_r(n)]$ правильная, можно указать неубывающую неограниченную последовательность $(\varphi(n))$, $\varphi(n) \leqslant \varphi(n+1)$, $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, такую, что

$$(\forall r\ \exists s(r))\ \sup_n \frac{a_r(n) a_{\varphi(n)}(n)}{[a_{s(r)}(n)]^2} < +\infty.$$

С помощью несложного преобразования, заключающегося в умножении всех единичных ортов n-го блока на число $\frac{1}{a_{\varphi(n)}(n)}$, получается представление пространства E в виде аналогичного пространства Кёте вида $l_2\big([b_r(n)], \big(l_2^{k(n)}\big)\big)$, где $b_r(n) \leqslant 1$ для $n > N(r)$ и в качестве тупикового пространства $H_{\infty,2}$ можно взять пространство числовых последовательностей l_2, в котором базис ортов является объединением ортов всех блоков нормированных указанным способом. Чтобы избежать громоздкости, вместо $b_r(n) = \frac{a_r(n)}{a_{\varphi(n)}(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, будем писать просто $a_r(n)$, считая уже проведенной описанную нормировку, и одновременно можно предполагать условие $a_r(n) \leqslant a_{r+1}^2(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Для произвольного непрерывного проектора P в E имеем

$$(\forall r\ \exists t(r),\ \sigma(r) > 0)\ |Pe|_r \leqslant \sigma(r)|e|_{t(r)}, \quad e \in E.$$

Согласно выбору тупиковой нормы $|\cdot|_{\infty,2}$ (нормы в l_2) можно для любого индекса $r \in \mathbb{N}$ указать константу $D(r) > 0$:

$$|Pe|_r \leqslant D(r)|e|_{\infty,2}, \quad e \in E.$$

Положим теперь

$$|e|_{\infty,1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|e|_k^2}{2^{2k} D^2(k)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для элементов линейной оболочки основного базиса и тех элементов, для которых сумма ряда конечна. По определению новых норм

$$|Pe|_{\infty,1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Pe|_k^2}{2^{2k} D^2(k)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|e|_{\infty,2}^2}{2^{2k}} \leqslant |e|_{\infty,2}^2.$$

В качестве гильбертовых норм $|\cdot|_{0,i}$, $i = 1, 2$, выберем любую пару непрерывных норм так, чтобы

$$|Pe|_{r(1)} \leqslant C(r(1))|e|_{r((2)}, \quad e \in E,$$

и тогда $|\cdot|_{0,1} = |\cdot|_{r(1)}$, $|\cdot|_{0,2} = |\cdot|_{r(2)}$.

Остается проверить неравенства теоремы 1, гарантирующие интерполяцию линейных операторов:

$$(\forall r\ \exists s(r),\ B(r) > 0\ \forall m, n \in \mathbb{N})\ \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(m)} \leqslant B(r) \max\left\{\frac{a_{r(1)}(n)}{a_{r(2)}(m)}, \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2(n)}{2^{2k} D^2(k)}}\right\}.$$

Сразу отметим, что если $m \leqslant n$, то согласно предположению $E \in (d_2)$

$$\frac{a_r(n)}{a_{s_2(r)}(m)} \leqslant B(r) a_{s_1(r)}(n) \leqslant B(r) \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2(n)}{2^{2k} D^2(k)}}, \quad B(r) > 1.$$

Пусть m таково, что $B(r)a_{s_2(r)}(m) < \frac{a_r(n)}{a_{s_1(r)}} \leqslant a_{s_1(r)}(n)$, т. е. $n < a_{s_1(r)}^{-1}\big(a_{s_2(r)}(m)\big)$, $s_1(r) < s_2(r), B(r) > 0$ из условия теоремы. Тогда

$$\frac{a_r(n)}{a_{r(1)}(n)} \leqslant \frac{a_r\big(a_{s_1(r)}^{-1}(B(r)a_{s_2(r)}(m))\big)}{a_{r(1)}\big(a_{s_1(r)}^{-1}(B(r)a_{s_2(r)}(m))\big)} \leqslant B(r)\frac{a_{s_3(m)}}{a_{r(2)}(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что выполнены условия теоремы 1 существования безусловного базиса в образе проектора P.

В частном случае пространства Кёте вида $l_2\big([\exp f(\lambda_r b_n)], l_2^{k(n)}\big)$, $\lambda_r \uparrow 0$, очевидно, выполнено более простое по виду условие

$$(\forall r(1), r(2)\, \forall r\, \exists s(r),\ B(r) > 0\ \forall n \in \mathbb{N})\ a_{r(2)}(n) \leqslant a_{r(1)}\big(a_r^{-1}(B(r)a_{s(r)}(n))\big),$$

гарантирующее выполнение предыдущего. Последнее было получено в [12] из других соображений.

Вопросы об эквивалентности этих условий и выполнение одного из них для произвольного пространства Кёте из класса (d_2) с правильной матрицей остаются открытыми.

В заключение этой части работы сформулируем в терминах теории интерполяции линейных операторов вопрос, положительное решение которого позволило бы решить ряд проблем существования безусловных базисов в дополняемых подпространствах счетно-гильбертовых пространств Кёте.

Пусть для базиса ортов в пространстве Кёте $E = l_2[a_r(n)]$ выбраны гильбертовы пространства $H_0 \supset E \supset H_\infty$ согласно теореме 1 так, что любое ассоциированное банахово пространство E_r (пополнение E по гильбертовой норме $|\cdot|_r$) образует интерполяционную тройку (H_0, H_∞, E_r) (в смысле [41]) и J — непрерывная инволюция в E, т. е. $J^2 = J$, связанная с проектором P. Ясно, что (JH_0, JH_∞, JE_r) тоже интерполяционная тройка при любом r и надлежащем выборе норм. Образуем гильбертовы суммы пространств H_i и JH_i, т. е. рассматриваем пополнение E по норме

$$\|e\|_{H_i \cup_2 JH_i} = \inf\big\{\sqrt{\|f\|_i^2 + \|Jg\|_i^2}\big\},$$

где inf берется по всем элементам $f \in H_i$ и $g \in JH_i$, сумма которых равна $e : e = f + g$.

Будут ли тройки $(H_0 \cup_2 JH_0, H_\infty \cup_2 JH_\infty, E_r \cup_2 JE_r)$, $r \in M$, тоже интерполяционными? Было бы достаточно (для положительного решения проблем существования базисов) положительного решения вопроса в более слабой постановке: будет ли каждое равностепенно непрерывное множество конечномерных операторов одновременно в крайних пространствах $H_0 \cup_2 JH_0$, $H_\infty \cup_2 JH_\infty$ являться равностепенно непрерывным множеством в E?

Как уже отмечалось выше, монтелевские локально выпуклые решетки дискретны и имеют безусловные базисы (подробнее см. [43, 44]). Хотя монтелевские пространства Кёте являются решетками, индуцированный частичный порядок в их дополняемых подпространствах оказывается бесполезным даже в случае конечномерных подпространств и лишь в некоторых случаях, например, когда проектор определяется матрицей с положительными элементами, их удается «искусственно» превратить в локально выпуклые решетки и сделать вывод о наличии базиса [12, 44].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зобин Н. М., Митягин Б. С.* Примеры ядерных метрических пространств без базисов // Функцион. анализ и его прил. 1974. Т. 8, № 4. С. 304—313.
2. *Bessaga C.* A nuclear Frechet space without basis 1. Variation on a theme of Djakov and Mitiagin // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., Astronom., Phys. 1976. V. 24, N 7. P. 471–473.
3. *Taskinen J.* A Frechet — Schwartz space with basis having a complemented subspace without basis // Abstracts conf. "Nucleare Frechet Raume". Oberwolfach, 1990. P. 11.
4. *Haslinger F., Smejkal M.* Representation and duality in weighted Frechhet spaces of entire functions // Lecture Notes in Math. 1987. V. 1275. P. 168–196.
5. *Dubinsky E., D. Vogt D.* Complemented subspaces in tame power series spaces // Studia Math. 1989. V. 93, N 4. P. 71–85.
6. *Митягин Б. С.* Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 4. С. 63–132.
7. *Krone J.* On projections in power series spaces and the existence of bases // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 105. P. 350–355.
8. *Krone J.* Basisprobleme in nuklearen Frecheträumen. Dis. doct. mathematis. Wuppertal 1986.
9. *Krone J.* Existence of bases and the dual splitting relation for Frechet spaces // Studia Math. 1989. V. 92. P. 37–48.
10. *Ahonen H.* On nuclear Köthe spaces defined by Dragilev functions: Dis. doct. mathematis. Helsinki, 1981. (Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A; N 38).
11. *Кондаков В. П.* Об ортогонализации базисов в некоторых классах ядерных пространств // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 77–89.
12. *Кондаков В. П.* О базисах в дополняемых подпространствах функциональных пространств // Функцион. анал. и его прил. 1990. Т. 24, № 3. С. 80–81.
13. *Кондаков В. П.* О блочных пространствах Кёте, в которых образ каждого непрерывного оператора имеет базис // Функцион. анал. и его прил. 1993. Т. 27, № 4. С. 74–77.
14. *Kondakov V. P.* Bases in complemented subspaces of weak-mixed Köthe spaces // Abstracts conf. "Nucleare Frechet Raume". Oberwolfach 1990. P. 5–6.
15. *Кондаков В. П.* Геометрические условия существования базисов в пространствах Фреше // Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам анализа и геометрии: Тез. докл. М.: ТВП, 1994. С. 60.
16. Кондаков В. П. О весовых пространствах Кёте, определяемых разреженными матрицами. М., 1990. Деп. в ВИНИТИ; № 6226–В90.
17. *Кондаков В. П.* Об операторах и дополняемых подпространствах в пространствах Кёте, определяемых разреженными матрицами // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 35, № 5. С. 1096–1112.
18. *Кондаков В. П.* Критерий существования безусловного базиса в счетно-гильбертовом пространстве // Междунар. геометрическая школа-семинар памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 27 сент.–4 окт. 1996: Тез. докл. Ростов-на-Дону, 1996. С. 113.
19. *Кондаков В. П., Каплицкий В. М.* О существовании базисов в некоторых весовых пространствах функций // Междунар. геом. школа-семинар памяти Н. Ф. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 27 сент.–4 окт. 1996: Тез. докл. Ростов-на-Дону, 1996. С. 114.
20. *Кондаков В. П.* О существовании базисов в весовых пространствах случайных величин // Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Туапсе; 17 сент.–24 сент. 1996: Тез. докл. М.: ТВП, 1996. С. 85–86.
21. *Kondakov V. P., Kaplitsky V. M.* Sufficient conditions for existence of bases in some Frechet spaces of entire functions // 4th Simpos. on mathematical analysis and its applications. Arandelovac, May 26–30, 1997. Abstracts. Beograd, 1997. C. 48–49.
22. *Kondakov V. P.* Geometric conditions for the existence of Bases in nuclear Frechet spaces // Linear Topol. Spaces Complex Anal. 1994. V. 1. P. 25–32.
23. *Djakov P. B.* A criterium for the existence of Bases in nuclear Frechet spaces // Doga Tr. J. Math. 1993. V. 17. P. 171–178.
24. *Vogt D.* Power series space representations of nuclear Frechet spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 319, N 1. P. 191–208.
25. *Terzioğlu T.* Unstable Köthe spaces and the functor EXT // Doga Tr. J. Math. 1986. V. 10, N 1 (Special Issue). P. 227–231.
26. *Aytuna A., Krone J., Terzioglu T.* Complemented infinite type power series subspaces of nuclear Frechet spaces // Math. Ann. 1989. V. 283. P. 193–202.

27. *Кондаков В. П.* О безусловных базисах в образах слабо перемешивающих операторов в весовых пространствах случайных величин // Обозрение прикладной и промышленной математики. М.: ТВП, 1997. Т. 4, вып. 3. С. 358.
28. *Kondakov V. P., Zaharjuta V. P.* On bases in spaces of infinitely differentiable functions on special domains with cusp // Note Mat. 1992. V. 12. P. 99–106.
29. *Драгилев М. М.* О специальных размерностях, определенных на некоторых классах пространств Кёте // Мат. сб. 1969. Т. 80, № 2. С. 225–240.
30. *Драгилев М. М., Кондаков В. П.* Об одном классе ядерных пространств // Мат. заметки. 1970. Т. 8, № 2. С. 169–179.
31. *Кондаков В. П.* О строении безусловных базисов некоторых пространств Кёте // Studia Math. 1983. V. 76, N 2. P. 137–151.
32. *Кондаков В. П.* Вопросы геометрии ненормируемых пространств. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. гос. ун-та, 1983.
33. *Chalov P. A., Djakov P. B., Terzioglu T., Zahariuta V. P.* On cartesian products of locally convex spaces // Linear Topological Spaces and Complex Analysis 2. Ankara, 1995. P. 9–33.
34. *Захарюта В. П.* Об изоморфизме и квазиэквивалентности базисов для степенных пространств Кёте // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, № 4. С. 772–774.
35. *Драгилев М. М.* Базисы в пространствах Кёте. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. гос. ун-та, 1983.
36. *Захарюта В. П.* О базисах и изоморфизме пространств функций, аналитических в выпуклых областях многих переменных // Теория функций и функциональный анализ. Харьков, 1967 № 5. Р. 5–12.
37. *Захарюта В. П.* О квазиэквивалентности базисов в конечных центрах гильбертовых шкал // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, № 4. С. 786–788.
38. *Wojtynski W.* On bases in certain countably-Hilbert spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. 1966. V. 14. P. 681–684.
39. *Митягин Б. С.* Квазиэквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia Math. 1971. V. 37. P. 111–137.
40. *Митягин Б. С, Хенкин Г. М.* Линейные задачи комплексного анализа // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 4. С. 93–152.
41. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
42. *Peetre J.* On interpolation functions 3 // Acta Sci. Math. 1969. V. 30, N 3. P. 235–239.
43. *Komura Y., Koshi S.* Nuclear vector lattices // Math. Ann. 1966. V. 163. P. 105–110.
44. *Кондаков В. П.* Дискретные локально выпуклые решетки и безусловные базисы // Мат. анализ и его приложения. Ростов-на-Дону, 1985. Т. 5. С. 65–72.
45. *Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 2. С. 153–173.

Статья поступила 23 февраля 1998 г.

Кондаков Владимир Петрович
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
`kond@ns.math.rsu.ru`