Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

А. И. Кожанов, Н. А. Ларькин

Аннотация: В нецилиндрической области $Q = \{(x,t) : 0 < t < T, 0 < x < \alpha(t)\}$ изучается разрешимость некоторых аналогов первой начально-краевой задачи для уравнений $u_{tt} - u_{xx} + \beta(u, u_t) = f(x,t)$. Функция $\beta(u, u_t)$ здесь моделирует функцию $a(u)|u_t|^p u_t$, $a(u) \geq 0$, $p \geq 0$, для функции $\alpha(t)$, определяющей область Q, выполняются условие $\alpha(t) > 0$ при $t \in [0, T]$ и одно из условий $0 \leq \alpha'(t) \leq \alpha_0 < 1$, $-1 < -\alpha_0 \leq \alpha'(t) \leq 0$, $\alpha'(t) \geq \alpha_0 > 1$. Наряду с доказательством теорем существования регулярных решений изучаемых краевых задач, в работе приводятся некоторые результаты о поведении энергетической нормы решения при $t \to +\infty$. Библиогр. 16.

Введение

Цель настоящей работы — изложение новых результатов о разрешимости и свойствах решений краевых задач для волнового уравнения с нелинейной диссипацией (нелинейными младшими членами, зависящими от производной решения) в некоторых нецилиндрических областях.

Разрешимость краевых задач для линейных и нелинейных гиперболических уравнений в нецилиндрических областях изучалась в ряде работ. Ж.-Л. Лионс [1, 2] предложил использовать для исследования таких задач метод штрафа. Реализуя эту идею, Л. А. Медейрос [3] доказал существование слабых решений аналога первой начально-краевой задачи в нецилиндрической области для уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + \beta(u) = f \tag{$*$}$$

в случае выполнения условия $\xi\beta(\xi) \geq 0$. Близкие результаты получены также в работах [4–8]. Существование регулярных решений аналога первой краевой задачи для уравнений типа уравнения $(*)$ доказывалось в работах [9, 10]. Если же младшие члены представляют собой функцию, зависящую также от производной u_t, то здесь можно отметить лишь работу [11]. В ней доказано существование слабого решения аналога первой краевой задачи в некоторых расширяющихся с ростом t областях для волнового уравнения с младшими членами, зависящими от производной, при наличии ограничений на порядок роста.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00620) и Министерства общего и профессионального образования России (первый автор) и фонда CNP_q-Brasil (второй автор).

Наряду с вопросом о разрешимости краевых задач для гиперболических уравнений в нецилиндрических областях большой интерес вызывает также вопрос о поведении решений этих задач при $t \to \infty$ (см. [11, 12]).

Опишем вкратце полученные авторами результаты.

Для одномерного волнового уравнения с диссипацией, моделирующей функцию $a(\xi)|\eta|^p\eta$, $a(\xi) \geq 0$, $p \geq 0$, в области с правой криволинейной границей, описываемой уравнением $x = \alpha(t)$, и прямолинейной левой доказано существование регулярного решения непосредственного аналога первой начально-краевой задачи при выполнении условия $0 \leq \alpha'(t) \leq \alpha_0 < 1$. В той же области для одномерного волнового уравнения с диссипацией $\beta(u_t)$ доказано существование регулярных решений краевой задачи с заданием на линии $x = \alpha(t)$ значения производной u_t. Существование регулярных решений той же задачи доказано для одномерного волнового уравнения с общей диссипацией в областях, для которых выполняется условие $-1 < -\alpha_0 \leq \alpha'(t) \leq 0$. Наконец, для одномерного волнового уравнения с общей диссипацией в сильно расширяющихся областях, т. е. в областях, для которых выполняется условие $\alpha'(t) \geq \alpha_0 > 1$, доказано существование регулярных решений аналога задачи Коши.

В случае расширяющихся областей в некоторых случаях в работе описано поведение энергетической нормы решения на сечениях $t = \mathrm{const}$ при $t \to \infty$.

В статье используются общепринятые обозначения. Буквами C, K, M с индексами обозначаются постоянные, не зависящие от элементов рассматриваемого множества; при этом фраза «постоянная ... зависит от функции...» означает, что данная постоянная зависит от величин, определяемых той или иной функцией, которые конечны вследствие выполнения наложенных условий.

§ 1. Разрешимость аналогов первой начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения с нелинейной диссипацией

Пусть $\alpha(t)$, $t \in [0, T]$, — непрерывная функция такая, что $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) > 0$ для всех t. Определим множества $Q_t = \{(x, \tau) : 0 < \tau < t,\ 0 < x < \alpha(\tau)\}$ и $D_t = \{(x, \tau) : 0 < x < \alpha(\tau),\ \tau = t\}$.

В области Q_T рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} + \beta(u, u_t) = f(x, t) \tag{1.1}$$

и следующие краевые задачи для него.

Краевая задача I. *Найти решение уравнения* (1.1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in D_0, \tag{1.2}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\alpha(t)} = 0,\ 0 < t < T. \tag{1.3}$$

Краевая задача II. *Найти решение уравнения* (1.1), *удовлетворяющее условиям* (1.2) *и условиям*

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_t|_{x=\alpha(t)} = 0,\ 0 < t < T. \tag{1.4}$$

Краевая задача I является непосредственным аналогом первой начально-краевой задачи для волнового уравнения в цилиндрической области. Краевая задача II в случае, если область Q_T — цилиндрическая область, эквивалентна первой начально-краевой задаче, однако в нецилиндрической области это уже не так.

Отметим, что краевые задачи с условием (1.4) для нелинейного волнового уравнения в нецилиндрических областях ранее не изучались.

Исследование разрешимости краевых задач I и II начнем со случая «расширяющихся областей».

Обозначим $v_1(x) = u_1(x) + \alpha'(0)xu_{0x}(x)$.

Теорема 1.1. *Пусть выполняются следующие условия.*
I. $\alpha(t) \in C^2([0,T])$, $0 \le \alpha'(t) \le \alpha_0 < 1$, $t \in [0,T]$.
II. $\beta(\xi,\eta) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\beta(\xi,0) \equiv 0$, $\eta\beta(\xi,\eta) \ge 0$ $\forall(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$.

III. $u_0(x) \in W_2^2(D_0) \cap \overset{\circ}{W}{}_\infty^1(D_0)$, $u_1(x) \in W_2^1(D_0)$, $v_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_0)$, $f(x,t) \in W_2^1(Q_T) \cap L_\infty(Q_T)$.

Тогда существует решение $u(x,t)$ краевой задачи I *такое, что $u \in L_\infty\big(0,T; W_2^2(D_t) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_t)\big)$, $u_t \in L_\infty\big(0,T; W_2^1(D_t)\big)$, $u_{tt} \in L_\infty(0,T; L_2(D_t))$.*

Доказательство. В цилиндре $\widehat{Q}_T = \{(z,t) : 0 < z < 1,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим краевую задачу: *найти решение уравнения*

$$\widehat{L}v \equiv l_0 l_0 v - \frac{1}{\alpha^2(t)} v_{zz} + \beta(v, l_0 v) = \hat{f}(z,t), \tag{1.1$'$}$$

где $l_0 v = v_t - \frac{\alpha'(t)z}{\alpha(t)} v_z$, $\hat{f}(z,t) = f(\alpha(t)z,t)$, *удовлетворяющее условиям*

$$v(z,0) = u_0(z), \quad v_t(z,0) = v_1(z), \quad 0 < z < 1, \tag{1.2$'$}$$

$$v|_{z=0} = v|_{z=1} = 0, \quad 0 < t < T. \tag{1.3$'$}$$

Оператор $\widehat{L}$ в цилиндре $\widehat{Q}_T$ строго гиперболичен. Тогда при выполнении условий гладкости на функции $\alpha(t)$, $\beta(\xi,\eta)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $f(x,t)$, указанных в условиях теоремы, задача (1.1$'$)–(1.3$'$) будет иметь локальное регулярное решение. Для того же, чтобы эта задача имела регулярное решение во всем цилиндре $\widehat{Q}_T$, достаточно установить нужные априорные оценки.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 \widehat{L}v \cdot l_0 v \, dz d\tau = \int_0^t \int_0^1 \hat{f} \cdot l_0 v \, dz d\tau.$$

Интегрируя по частям, используя равенство $l_0 v|_{z=1} = -\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)} v_z(1,\tau)$ и применяя лемму Гроноулла, нетрудно установить, что при выполнении условий теоремы будет иметь место первая априорная оценка

$$\int_0^1 [l_0 v(z,t)]^2 \, dz + \int_0^1 v_z^2(z,t) \, dz \le K_1, \tag{1.5}$$

где $t \in [0,T]$, постоянная K_1 зависит лишь от функций $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\alpha(t)$ и числа T.

Следствием оценки (1.5) является оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0 \le z \le 1, 0 \le t \le T} |v(z,t)| \le K_2. \tag{1.6}$$

Пусть q — произвольное натуральное нечетное число. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \widehat{L}v\Big[\Big(l_0v+\frac{1}{\alpha(\tau)}v_z\Big)^q+\Big(l_0v-\frac{1}{\alpha(\tau)}v_z\Big)^q\Big]\,dzd\tau$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \hat{f}\cdot\Big[\Big(l_0v+\frac{1}{\alpha(\tau)}v_z\Big)^q+\Big(l_0v-\frac{1}{\alpha(\tau)}v_z\Big)^q\Big]\,dzd\tau. \quad (1.7)$$

Учитывая представление

$$l_0l_0v-\frac{1}{\alpha^2(t)}v_{zz}=\Big(l_0\pm\frac{1}{\alpha(t)}\frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big(l_0\mp\frac{1}{\alpha(t)}\frac{\partial}{\partial z}\Big)v$$

и интегрируя в (1.7), преобразуем его к виду

$$\frac{1}{q+1}\int\limits_0^1\big[w_1^{q+1}(z,t)+w_2^{q+1}(z,t)\big]\,dz+\frac{1}{q+1}\int\limits_0^t\frac{1}{\alpha(\tau)}\big[w_1^{q+1}(0,\tau)-w_2^{q+1}(0,\tau)\big]\,d\tau$$

$$-\frac{1}{q+1}\int\limits_0^t\Big\{\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}\big[w_1^{q+1}(1,\tau)+w_2^{q+1}(1,\tau)\big]+\frac{1}{\alpha(\tau)}\big[w_1^{q+1}(1,\tau)-w_2^{q+1}(1,\tau)\big]\Big\}\,d\tau$$

$$+\frac{1}{q+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}\big[w_1^{q+1}+w_2^{q+1}\big]\,dzd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\beta(v,l_0v)\big[w_1^q+w_2^q\big]\,dzd\tau$$

$$=\frac{1}{q+1}\int\limits_0^1\big[w_1^{q+1}(z,0)+w_2^{q+1}(z,0)\big]\,dz+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\hat{f}\big[w_1^q+w_2^q\big]\,dzd\tau, \quad (1.8)$$

где для краткости обозначено $w_1=l_0v+\frac{1}{\alpha(t)}v_z$, $\ w_2=l_0v-\frac{1}{\alpha(t)}v_z$.

Вследствие условий $(1.3')$ имеют место равенства

$$w_1(0,\tau)=\frac{1}{\alpha(\tau)}v_z(0,\tau),\quad w_2(0,\tau)=-\frac{1}{\alpha(\tau)}v_z(0,\tau),$$

$$w_1(1,\tau)=-\frac{\alpha'(\tau)-1}{\alpha(\tau)}v_z(1,\tau),\quad w_2(1,\tau)=-\frac{\alpha'(\tau)+1}{\alpha(\tau)}v_z(1,\tau).$$

Поскольку $q+1$ — четное число, отсюда получаем

$$w_1^{q+1}(0,\tau)-w_2^{q+1}(0,\tau)=0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}\big[w_1^{q+1}(1,\tau)+w_2^{q+1}(1,\tau)\big]+\frac{1}{\alpha(\tau)}\big[w_1^{q+1}(1,\tau)-w_2^{q+1}(1,\tau)\big]$$

$$=\frac{1}{\alpha(\tau)}\big\{w_1^{q+1}(1,\tau)\cdot[\alpha'(\tau)+1]+w_2^{q+1}(1,\tau)][\alpha'(\tau)-1]\big\}$$

$$=\frac{v_z^{q+1}(1,\tau)}{\alpha^{q+2}(\tau)}\{[\alpha'(\tau)+1][\alpha'(\tau)-1]^{q+1}+[\alpha'(\tau)-1][\alpha'(\tau)+1]^{q+1}\}$$

$$=\frac{v_z^{q+1}(1,\tau)}{\alpha^{q+2}(\tau)}[\alpha'^2(\tau)-1]\{[\alpha'(\tau)+1]^q+[\alpha'(\tau)-1]^q\}.$$

Используя формулу бинома Ньютона и учитывая условие I, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$[\alpha'(\tau)-1]^q+[\alpha'(\tau)+1]^q\ge 0,\quad \tau\in[0,T].$$

Еще раз учитывая условие I, получаем неравенство

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}\left[w_1^{q+1}(1,\tau)+w_2^{q+1}(1,\tau)\right]+\frac{1}{\alpha(\tau)}\left[w_1^{q+1}(1,\tau)-w_2^{q+1}(1,\tau)\right]\le 0, \tag{1.10}$$

справедливое для всех чисел $\tau\in[0,T]$. Далее, для любых действительных чисел ξ, η_1, η_2 и для нечетного числа q вследствие условия II будет выполняться неравенство

$$\beta(\xi,\eta_1)[(\eta_1+\eta_2)^q+(\eta_1-\eta_2)^q]\ge 0. \tag{1.11}$$

Действительно, при $\eta_1=0$ это неравенство справедливо (ввиду условия $\beta(\xi,0)\equiv 0$). Имеет место неравенство

$$\eta_1[\eta_1+\eta_2)^q+(\eta_1-\eta_2)^q]\ge 2|\eta_1|^{q+1}\ge 0$$

(в истинности его легко убедиться, используя формулу бинома Ньютона). Если теперь $\eta_1\ne 0$, то требуемое неравенство (1.11) вытекает из равенства

$$\beta(\xi,\eta_1)[(\eta_1+\eta_2)^q+(\eta_1-\eta_2)^q]=\frac{\beta(\xi,\eta_1)}{\eta_1}\eta_1[(\eta_1+\eta_2)^q+(\eta_1-\eta_2)^q],$$

предыдущего неравенства и условия II.

Обозначим

$$M_1=\operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1}|v_1(z)-\alpha'(0)zu_0'(z)+u_0'(z)|,$$

$$M_2=\operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1}|v_1(z)-\alpha'(0)zu_0'(z)-u_0'(z)|,\quad M=\operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1,0\le t\le T}|\hat f(z,t)|$$

(эти числа конечны вследствие условия III).

Равенство (1.9), неравенства (1.10) и (1.11), неравенство Юнга и лемма Гронуолла позволяют на основе равенства (1.8) вывести оценку

$$\int\limits_0^1\left[w_1^{q+1}(z,t)+w_2^{q+1}(z,t)\right]dz\le\left[M_1^{q+1}+M_2^{q+1}+TM^{q+1}\right]\exp(qT),$$

из которой вытекает оценка

$$\left\{\int\limits_0^1\left[w_1^{q+1}(z,t)+w_2^{q+1}(z,t)\right]dz\right\}^{\frac{1}{q+1}}\le(M_1+M_2+MT)\exp T=M_0.$$

Число $q+1$ произвольное положительное четное. Справедливость данной оценки для произвольного четного числа означает, что она будет справедлива и для произвольного положительного большего единицы действительного числа q. Но тогда будут справедливы оценки

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1}|w_1(z,t)|\le M_0,\quad \operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1}|w_2(z,t)|\le M_0$$

для почти всех чисел t из отрезка $[0,T]$.

Из доказанных оценок вытекает ограниченность (почти всюду в $\widehat{Q}_T$) величин $|l_0 v|$, $|v_z|$, $|v_t|$. Действительно, имеем

$$|l_0 v| = \left|\frac{1}{2}(w_1 + w_2)\right| \leq \frac{1}{2}(|w_1| + |w_2|) \leq M_0,$$
$$\left|\frac{v_z}{\alpha(t)}\right| = \left|\frac{1}{2}(w_1 - w_2)\right| \leq \frac{1}{2}(|w_1| + |w_2|) \leq M_0,$$
$$|v_t| = \left|l_0 v + \frac{\alpha'(t)z}{\alpha(t)} v_z\right| \leq |l_0 v| + \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}|v_z|.$$

Из этих неравенств и вытекает требуемая ограниченность.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 (\widehat{L}v)_\tau v_{\tau\tau}\, dz d\tau = \int_0^t \int_0^1 \hat{f}_\tau v_{\tau\tau}\, dz d\tau. \tag{1.12}$$

Из условий теоремы следует оценка

$$\int_0^1 v_{tt}^2(z,0)\, dz \leq K_3$$

с постоянной K_3, зависящей лишь от функций $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $\alpha(t)$. Используя эту оценку, ограниченность функций v, $l_0 v$, v_z и v_t, условия теоремы и применяя стандартную технику доказательства второй априорной оценки для гиперболических уравнений, нетрудно показать, что из равенства (1.12) вытекает неравенство

$$\int_0^1 \left[v_{tt}^2(z,t) + v_{zt}^2(z,t)\right] dz \leq K_4, \tag{1.13}$$

где $t \in [0,T]$, постоянная K_4 зависит лишь от функций $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\alpha(t)$ и числа T.

Последняя требуемая оценка

$$\int_0^1 v_{zz}^2(z,t)\, dz \leq K_5 \tag{1.14}$$

теперь очевидна.

Оценок (1.5), (1.13) и (1.14) вполне достаточно для продолжения функции $v(z,t)$ как решения краевой задачи $(1.1')$–$(1.3')$ с локального интервала существования на весь интервал $(0,T)$.

Имея регулярное решение $v(z,t)$ краевой задачи $(1.1')$–$(1.3')$, нетрудно показать, что функция $u(x,t)$, определенная равенством $u(x,t) = v(\frac{x}{\alpha(t)}, t)$, будет решением краевой задачи I из требуемого класса. Теорема доказана.

Условие II теоремы означает, что функция $\beta(u,u_t)$ в уравнении (1.1) может иметь произвольный рост по производной u_t, может быть вырождающейся диссипацией вида $a(u)|u_t|^p u_t$, $a(u) \geq 0$, и т. п.

Приведем один результат о разрешимости краевой задачи II в случае $\beta(\xi,\eta) \equiv \beta(\eta)$.

Обозначим $u_2(x) = f(x,0) + u_0''(x) - \beta(u_1(x))$, $v_2(x) = u_2(x) + \alpha'(0)xu_1'(x)$.

Теорема 1.2. *Пусть выполняются следующие условия.*
I. $\alpha(t) \in C^3([0,T])$, $0 \le \alpha'(t) \le \alpha_0 < 1$; $t \in [0,T]$.
II. $\beta(\xi,\eta) \equiv \beta(\eta) \in C^2(\mathbb{R})$, $\beta'(\eta) \ge 0$, $\eta \in \mathbb{R}$.
III. $u_0(x) \in W_2^3(D_0) \cap W_\infty^2(D_0)$, $u_0(0) = 0$, $u_1(x) \in W_2^2(D_0) \cap \overset{\circ}{W}{}_\infty^1(D_0)$, $v_2(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_0)$, $f(x,t) \in L_\infty(Q_T)$, $f_t(x,t) \in W_2^1(Q_T) \cap L_\infty(Q_T)$.

Тогда существует решение $u(x,t)$ краевой задачи II *такое, что $u \in L_\infty(0,T;$ $W_2^2(D_t))$, $u_t \in L_\infty(0,T; W_2^2(D_t) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_t))$, $u_{tt} \in L_\infty(0,T; W_2^1(D_t))$, $u_{ttt} \in L_\infty(0,T;$ $L_2(D_t))$.*

Доказательство. В области Q_T рассмотрим краевую задачу: *найти решение уравнения*
$$u_{ttt} - u_{xxt} + \beta'(u_t)u_{tt} = f_t, \tag{1.15}$$
удовлетворяющее условиям
$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ u_{tt}(x,0) = u_2(x),\ x \in D_0, \tag{1.16}$$
$$u|_{x=0} = 0,\ u_t|_{x=\alpha(t)} = 0,\ 0 < t < T. \tag{1.17}$$
Если эту краевую задачу рассматривать как краевую задачу I для функции $w = u_t$, то все условия теоремы 1.1 для нее окажутся выполненными. Другими словами, функция $w = u_t$ вполне определена и будет принадлежать указанному в теореме 1.1 классу.

Построим по функции $w(x,t)$ функцию $u(x,t)$. В цилиндре $\overline{Q}_0 = \overline{D}_0 \times (0,T)$ положим $u(x,t) = \int\limits_0^t w(x,\tau)\,d\tau + u_0(x)$. Заметим, что
$$u(1,t) = \int\limits_0^t w(1,\tau)\,d\tau + u_0(1) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \int\limits_0^t w_x(1,\tau)\,d\tau + u_0'(1) = \psi(t).$$
Определим функцию $u(x,T)$ при $x > 1$ как решение задачи Коши
$$u_{xx}(x,T) = w_t(x,T) + \beta(w(x,T)) - f(x,T), \tag{1.18}$$
$$u(1,T) = \varphi(T),\ u_x(1,T) = \psi(T). \tag{1.19}$$
Отметим, что при $t = T$ все слагаемые в правой части уравнения (1.18) определены, в том числе и в точке $x = 1$.

Наконец, положим при $x > 1$, $t < T$
$$u(x,t) = -\int\limits_t^T w(x,\tau)\,d\tau + u(x,T).$$
Непосредственно из построения функции $u(x,t)$ следует, что всюду в области Q_T будет выполняться равенство $u_t = w$. Интегрируя уравнение (1.15) по переменной t, нетрудно убедиться, что при $0 < x \le 1$, $0 < t < T$ уравнение (1.1) для функции $u(x,t)$ будет выполняться. Если же $x > 1$, то
$$u_{xx}(x,t) = -\int\limits_t^T w_{xx}(x,\tau)\,d\tau + u_{xx}(x,T).$$

Выражая функцию $w_{xx}(x,\tau)$ из уравнения (1.15), функцию $u_{xx}(x,T)$ из уравнения (1.18) и интегрируя, нетрудно убедиться, что и в области $\{1 < x < \alpha(t),\ 0 < t < T\}$ функция $u(x,t)$ будет удовлетворять уравнению (1.1).

Выполнение условий (1.2) и (1.4) очевидным образом вытекает из выполнения условий (1.16) и (1.17) и из вида функции $u_2(x)$. Теорема доказана.

Для «сужающихся» областей авторам удалось доказать существование регулярных решений лишь для краевой задачи II.

Теорема 1.3. *Пусть выполняются следующие условия.*

I. $\alpha(t) \in C^3([0,T])$, $-1 < \alpha_0 \le \alpha'(t) \le 0$, $t \in [0,T]$.

II. $\beta(\xi,\eta) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\beta(\xi,0) \equiv 0$, $\eta\beta(\xi,\eta) \ge 0$, $|\beta_\xi(\xi,\eta)| \le C(1+|\xi|^p+|\eta|^p)$, $|\beta_\eta(\xi,\eta)| \le C(1+|\xi|^p+|\eta|^p)$, $p \ge 1$, $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$.

III. $u_0(x) \in W_2^2(D_0) \cap W_\infty^1(D_0)$, $u_0(0) = 0$, $u_1(x) \in W_2^2(D_0) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $f(x,t) \in W_2^1(Q_T) \cap L_\infty(Q_T)$.

Тогда существует решение $u(x,t)$ *краевой задачи* II *такое, что* $u \in L_\infty(0,T; W_2^2(D_t))$, $u_t \in L_\infty\big(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_t)\big)$, $u_{tt} \in L_\infty(0,T; L_2(D_t))$.

Доказательство. В цилиндре $\widehat{Q}_T$ рассмотрим семейство краевых задач: *найти решение уравнения*

$$\widehat{L}_\varepsilon v \equiv l_0 l_0 v - \frac{1}{\alpha^2(t)} v_{zz} + \beta(v, l_0 v) - \varepsilon v_{zzt} = \hat{f}, \tag{$1.1'_\varepsilon$}$$

где $\varepsilon > 0$, *удовлетворяющее условиям* $(1.2')$ *и условиям*

$$v|_{z=0} = l_0 v|_{z=1} = 0, \quad 0 < t < T. \tag{$1.4'$}$$

Данная краевая задача представляет собой краевую задачу для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с заданием на правой боковой стенке связи между производными v_t и v_z. Подобные задачи исследованы (даже в более сложной ситуации) в работах [13, 14]. Чтобы иметь возможность повторить технику этих работ и далее перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, установим априорные оценки регулярных решений задачи $(1.1'_\varepsilon)$, $(1.2')$, $(1.4')$.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 \widehat{L}_\varepsilon v \cdot l_0 v \, dz d\tau = \int_0^t \int_0^1 \hat{f} l_0 v \, dz d\tau.$$

Интегрируя по частям, используя условия теоремы и применяя лемму Гронуолла, нетрудно получить неравенство

$$\int_0^t [l_0 v(z,t)]^2 \, dz + \int_0^1 v_z^2(z,t) \, dz + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 v_{z\tau}^2 \, dz d\tau \le C_1 \left[1 + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 v_{zz}^2 \, dz d\tau \right], \tag{1.20}$$

где $t \in [0,T]$ и постоянная C_1 зависит лишь от функций $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\alpha(t)$ и числа T. Поскольку же функция $v(z,t)$ обращается в нуль при $z = 0$, то из неравенства (1.20) вытекает неравенство

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0 \le z \le 1} |v(z,t)| \le C_2 [1 + \sqrt{\varepsilon} \left(\int_0^t \int_0^1 v_{zz}^2 \, dz dt \right)^{1/2}. \tag{1.21}$$

Рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_0^1 \widehat{L}_\varepsilon v\cdot v_{zz\tau}\,dzd\tau = -\int_0^t\int_0^1 \hat{f}v_{zz\tau}\,dzd\tau. \tag{1.22}$$

Обозначим для краткости

$$h(z,t) = \frac{\alpha'^2(t)z}{\alpha^2(t)} - \left(\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right)_t z.$$

Интегрируя по частям, преобразуем равенство (1.22) к виду

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[v_{zt}^2(z,t) + \frac{1-\alpha'^2(t)z^2}{\alpha^2(t)}v_{zz}^2(z,t)\right]dz + \varepsilon\int_0^t\int_0^1 v_{zz\tau}^2\,dzd\tau$$
$$= \int_0^t\int_0^1\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}v_{z\tau}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha'^2(\tau)z^2}{\alpha^2(\tau)}\right)_\tau v_{zz}^2 - \beta_\xi(v,l_0v)v_zv_{z\tau} - \beta_\eta(v,l_0v)v_{z\tau}^2\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha'(\tau)z}{\alpha(\tau)}\beta_\eta(v,l_0v)v_{zz}v_{z\tau} + \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}\beta_\eta(v,l_0v)v_zv_{z\tau} - h_zv_zv_{z\tau} - hv_{zz}v_{z\tau} + \hat{f}_\tau v_{zz}\right]dzd\tau$$
$$+\int_0^t\left[v_{\tau\tau}(1,\tau)v_{z\tau}(1,\tau) - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}v_{z\tau}^2(1,\tau) + h(1,\tau)v_z(1,\tau)v_{z\tau}(1,\tau)\right]d\tau$$
$$-\int_0^1 \hat{f}(z,t)v_{zz}(z,t)\,dz + \frac{1}{2}\int_0^1\{v_{1z}^2(z) + [1-\alpha'^2(0)z^2]u_{0zz}^2(z)\,dz\} + \int_0^1 \hat{f}(z,0)u_{0zz}(z)\,dz. \tag{1.23}$$

Используя равенство

$$v_{tt}(1,t) = \frac{\alpha'(t)z}{\alpha(t)}v_{zt}(1,t) + \left(\frac{\alpha'(t)z}{\alpha(t)}\right)_t v_z(1,t)$$

и интегрируя по частям, нетрудно граничный интеграл J по отрезку $[0,t]$ прямой $z=1$ преобразовать к виду

$$J = \frac{1}{2}\frac{\alpha'^2(t)}{\alpha^2(t)}v_z^2(1,t) - \frac{\alpha'^2(0)}{2}u_{0z}^2(1) - \int_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}\left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)}\right)_\tau v_z^2(1,\tau)\,d\tau.$$

Поскольку функция $v(z,t)$ обращается в нуль при $z=0$, имеем

$$\begin{gathered}\operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1} v_z^2(z,t) \le \delta\int_0^1 v_{zz}^2(z,t)\,dz) + C(\delta)\int_0^1 v_z^2(x,t), \quad \delta>0,\\ \operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1} v_t^2(z,t) \le \int_0^1 v_{z\tau}^2(z,t)\,dz.\end{gathered} \tag{1.24}$$

Второе из этих неравенств очевидно. Для доказательства первого нужно рассмотреть функцию $w(z,t) = v(z,t) - zv(1,t)$. Она обращается в нуль при $x=0$ и $z=1$, и для нее соответствующее неравенство известно. Неравенство же для функции $v(x,t)$ нетрудно получить из неравенства для функции w.

Условие на рост производных β_ξ и β_η, неравенства (1.20), (1.21) и (1.24), условия на функции $\alpha(t)$, $f(x,t)$, $u_o(x)$ и $u_1(x)$, а также неравенства Гёльдера и Юнга позволяют нам оценить правую часть равенства (1.23) и получить неравенство

$$\int_0^1 \left[v_{zt}^2(z,t) + v_{zz}^2(z,t)\right] dz \leq C_3\left\{\int_0^t \left(\int_0^1 \left[v_{z\tau}^2(z,\tau) + v_{zz}^2(z,\tau)\right] dz\right)^{p_1} d\tau + 1\right\}, \quad (1.25)$$

где $t \in [0,T]$, постоянная C_3 зависит лишь от исходных данных задачи, число же p_1 определяется лишь числом p ($p_1 \geq p$). Далее, следствием неравенства (1.25) является существование числа t_0 такого, что $0 < t_0 \leq T$ и при $t \in [0,t_0]$ имеет место оценка

$$\int_0^1 \left[v_{zt}^2 z,t) + v_{zz}^2(z,t)\right] dz \leq C_4 \quad (1.26)$$

с постоянной C_4, определяемой лишь с помощью чисел C_3, p_1 и t_0 (см. [15, с. 43]). Но тогда на отрезке $[0,t_0]$ будут равномерно ограничены и левые части неравенств (1.24). В свою очередь, из этого следует оценка

$$\varepsilon \int_0^t \int_0^1 v_{zz\tau}^2\, dz d\tau \leq C_5, \quad (1.27)$$

где по-прежнему $t \in [0,t_0]$ и постоянная C_5 зависит лишь от исходных данных задачи. Наконец, из (1.26) и (1.27) и уравнения $(1.1'_\varepsilon)$ вытекает оценка

$$\int_0^t \int_0^1 v_{\tau\tau}^2\, dz d\tau \leq C_6. \quad (1.28)$$

Оценок (1.26)–(1.28) вполне достаточно для доказательства существования локального регулярного решения краевой задачи $(1.1'_\varepsilon)$, $(1.2')$, $(1.4')$. Как отмечено выше, сделать это можно, повторяя технику работ [13, 14].

Заметим, что в неравенствах (1.26)–(1.28) постоянные C_4–C_6 не зависят от ε. Это позволяет в уравнении $(1.1'_\varepsilon)$ на интервале существования локального решения перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Осуществив процедуру перехода к пределу, мы получим, что краевая задача II имеет локальное регулярное решение (а именно решение, удовлетворяющее требуемым в теореме 1.3 включениям на локальном интервале).

Для регулярных решений краевой задачи II будут выполняться неравенства (1.20) и (1.21), взятые при $\varepsilon = 0$. Другими словами, будут справедливы первые априорные оценки. Равенство (1.7) с помощью выкладок, аналогичных проделанным при доказательстве теоремы 1.1, приводит к равномерной ограниченности величин $|v_t|$, $|v_z|$. Возвращаясь к (1.23) и используя уже доказанную равномерную ограниченность функции v и ее первых производных, нетрудно вновь получить оценку (1.26), но уже с постоянной в правой части, не зависящей от длины интервала.

Доказанных оценок вполне достаточно для продолжения решения с локального интервала существования на весь интервал $(0,T)$. Переходя от функции $v(z,t)$ к функции $u(x,t)$, завершаем доказательство теоремы 1.3.

§ 2. Аналог задачи Коши для одномерного волнового уравнения в «сильно расширяющихся» областях

Если для кривой $x = \alpha(t)$ выполняется условие $\alpha'(t) > 1$, то она будет кривой пространственного типа. Из общей теории гиперболических уравнений следует, что задача Коши с данными на линии $x = \alpha(t)$ локально разрешима. Это наталкивает на мысль, что и для волнового уравнения с нелинейной диссипацией при выполнении условия $\alpha'(t) > 1$ (т. е. для «сильно расширяющейся» области Q_T) корректной будет задача с заданием на линии $x = \alpha(t)$ двух условий.

Краевая задача III. *Найти решение уравнения* (1.1), *удовлетворяющее условиям* (1.2) *и условиям*

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\alpha(t)} = u_t|_{x=\alpha(t)} = 0, \ 0 < t < T. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполняются следующие условия.*

I. $\alpha(t) \in C^2([0,T])$, $\alpha'(t) \geq \alpha_0 > 1$, $t \in [0,T]$.

II. $\beta(\xi,\eta) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\beta(\xi,0) \equiv 0$, $\eta\beta(\xi,\eta) \geq 0$, $\beta_\eta(\xi,\eta) \geq 0$, $|\beta_\xi(\xi,\eta)| \leq N_0[\eta\beta(\xi,\eta)\beta_\eta(\xi,\eta)]^{1/2}$, $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$.

III. $u_0(x) \in W_2^2(D_0) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_0)$, $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_0)$, $f(x,t) \in W_2^1(Q_T)$.

Тогда существует решение $u(x,t)$ краевой задачи III *такое, что* $u \in L_\infty\big(0,T; W_2^2(D_t)) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_t)\big)$, $u_t \in L_\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_t)\big)$, $u_{tt} \in L_\infty(0,T;L_2(D_t))$.

Доказательство. В цилиндре $\widehat{Q}_T$ рассмотрим семейство краевых задач: *найти решение уравнения*

$$\widehat{L}_\varepsilon v \equiv l_0 l_0 v - \frac{1}{\alpha^2(t)} v_{zz} + \beta(v, l_0 v) - \frac{\varepsilon}{\alpha^2(t)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} l_0 v = \hat{f}, \tag{1.1$''_\varepsilon$}$$

где $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условиям (1.2$'$) *и условиям*

$$v|_{z=0} = v|_{z=1} = l_0 v|_{z=1} = 0, \quad 0 < t < T. \tag{2.1$'$}$$

Для доказательства разрешимости краевой задачи (1.1$''_\varepsilon$), (1.2$'$), (2.1$'$) применим метод продолжения по параметру. Именно, для чисел λ из отрезка $[0,1]$ определим оператор

$$\widehat{L}_{\varepsilon\lambda} v \equiv l_0 l_0 v - \frac{\lambda}{\alpha^2(t)} v_{zz} + \lambda\beta(v, l_0 v) - \frac{\varepsilon}{\alpha^2(t)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} l_0 v$$

и рассмотрим краевую задачу: *найти решение уравнения*

$$\widehat{L}_{\varepsilon\lambda} v = \hat{f}, \tag{1.1$''_{\varepsilon\lambda}$}$$

удовлетворяющее условиям (1.2$'$) *и* (2.1$'$).

Для осуществления схемы метода продолжения по параметру и последующего предельного перехода требуются подходящие априорные оценки. Наличие таких оценок мы сейчас и докажем.

Прежде всего заметим, что из условия (2.1$'$) вытекают равенства

$$v_z(1,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} l_0 v\bigg|_{z=1} = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} v_{zz}(1,t), \quad l_0 l_0 v|_{z=1} = \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha^2(t)} v_{zz}(1,t). \tag{2.2}$$

Равенство

$$\int_0^t \int_0^1 \widehat{L}_{\varepsilon\lambda} v \cdot l_0 v \, dz d\tau = \int_0^t \int_0^1 \hat{f} \cdot l_0 v \, dz d\tau$$

приводит к очевидной первой оценке

$$\int_0^1 [l_0 v(z,t)]^2 \, dz + \lambda \int_0^t \int_0^1 \beta(v, l_0 v) l_0 v \, dz d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial z} l_0 v\right]^2 dz d\tau \le N_1, \tag{2.3}$$

где, как и ранее, $t \in [0,T]$, постоянная N_1 зависит лишь от исходных данных задачи и не зависит от чисел ε и λ.

Следующие рассуждения позволят нам получить равномерные по λ оценки для фиксированного числа ε.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 \widehat{L}_{\varepsilon,\lambda} v \cdot \frac{1}{\alpha^2(\tau)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} l_0 v \, dz d\tau = \int_0^t \int_0^1 \hat{f} \cdot \frac{1}{\alpha^2(\tau)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} l_0 v \, dz d\tau.$$

Интегрируя по частям, из данного равенства нетрудно получить равенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\alpha^2(\tau)} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial z} l_0 v(z,t)\right]^2 dz + \frac{\lambda}{2\alpha^4(t)} \int_0^1 v_{zz}^2(z,t) \, dz + \int_0^t \int_0^1 \left\{ \frac{\alpha'(\tau)}{2\alpha^3(\tau)} \left[\frac{\partial}{\partial z} l_0 v\right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda \alpha'(\tau)}{2\alpha^5(\tau)} v_{zz}^2 + \frac{\lambda \beta_\eta(v, l_0 v)}{\alpha^2(\tau)} \left[\frac{\partial}{\partial z} l_0 v\right]^2 \right\} dz d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{\alpha^4(\tau)} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} l_0 v\right]^2 dz d\tau \\ &\quad - \int_0^t \left[\frac{1}{\alpha^2(\tau)} \left(\frac{\partial}{\partial z} l_0 v\right)(1,\tau)(l_0 l_0 v)(1,\tau) + \frac{\alpha'(\tau)}{2\alpha^3(\tau)} \left(\frac{\partial}{\partial z} l_0 v\right)^2 (1,\tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda \alpha'(\tau)}{2\alpha^5(\tau)} v_{zz}^2(1,\tau) \right] d\tau = - \int_0^t \int_0^1 \frac{\lambda \beta_\xi(v, l_0 v)}{\alpha^2(\tau)} v_z \frac{\partial}{\partial z} l_0 v \, dz d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \hat{f} \frac{1}{\alpha^2(\tau)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} l_0 v \, dz d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t u_{1z}^2(z) \, dz + \frac{1}{2} \int_0^1 u_{0zz}^2(z) \, dz. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Интеграл по отрезку $[0,t]$ прямой $z = 1$ в левой части равенства (2.4) с помощью равенств (2.2) может быть преобразован к виду

$$\int_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{2\alpha^2(\tau)} [\alpha'^2(\tau) - \lambda] v_{zz}^2(1,\tau) \, d\tau;$$

последний же интеграл вследствие условия I оценивается снизу величиной

$$\alpha_1 \int_0^t v_{zz}^2(1,\tau) \, d\tau, \quad \alpha_1 = \alpha_1(\alpha_0, T) > 0.$$

Оценим первое слагаемое правой части равенства (2.4).

Вследствие первого равенства (2.2) для функции $v(z,t)$ имеем

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1}|v_z(z,t)| \le \left(\int_0^1 v_{zz}^2(z,t)\,dz\right)^{1/2}.$$

Используя это неравенство, условие II и неравенство Юнга, нетрудно получить неравенство

$$\left|\int_0^t\int_0^1 \frac{\beta_\xi(v,l_0v)}{\alpha^2(\tau)}v_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}l_0v\,dzd\tau\right| \le \delta\int_0^t\int_0^1 \beta_\eta(v,l_0v)\left[\frac{\partial}{\partial z}l_0v\right]^2 dzd\tau$$
$$+ N_3\int_0^t\left(\int_0^1 v_{zz}^2(z,\tau)\,dz\right)\left(\int_0^t \lambda\beta(v,l_0v)l_0v\,dz\right)d\tau, \qquad (2.5)$$

где δ — произвольное положительное число, $t\in[0,T]$, постоянная N_3 зависит лишь от исходных данных задачи и от числа δ.

Второе слагаемое правой части равенства (2.4) очевидным образом оценивается величиной

$$\frac{\delta^2}{2}\int_0^t\int_0^1 \frac{1}{\alpha^4(\tau)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}l_0v\right]^2 dzd\tau + \frac{1}{2\delta^2}\int_0^T\int_0^1 \hat{f}^2\,dzd\tau.$$

Далее, для функции $v(z,t)$ имеет место неравенство

$$\int_0^t\int_0^1 \frac{\alpha'(\tau)}{2\alpha^5(\tau)}v_{zz}^2(1,\tau)\,d\tau \ge \frac{1}{2\alpha^4(\tau)}\int_0^1 v_{zz}^2(z,t)\,dz$$
$$-\frac{\delta^2}{2}\int_0^t\int_0^1 \frac{1}{\alpha^4(\tau)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}l_0v\right]^2 dzd\tau - \frac{1}{2\delta^2}\int_0^t\int_0^1 \frac{1}{\alpha^4(\tau)}v_{zz}^2\,dzd\tau - \frac{1}{2}\int_0^1 u_{0zz}^2(z)\,dz. \qquad (2.6)$$

Чтобы доказать его, проинтегрируем по частям в интеграле

$$\int_0^t\int_0^1 \frac{1}{\alpha^2(\tau)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}l_0v\cdot\frac{1}{\alpha^2(\tau)}v_{zz}\,dzd\tau,$$

воспользуемся равенством

$$\frac{1}{\alpha^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}l_0v = l_0\left(\frac{1}{\alpha^2(t)}v_{zz}\right)$$

и, наконец, применим неравенство Юнга.

С помощью доказанных неравенств мы можем получить из (2.4) неравенство

$$\alpha_2\int_0^1 v_{zz}^2(z,t)\,dz + (\varepsilon-\delta^2)\int_0^t\int_0^1 \frac{1}{\alpha^2(\tau)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}l_0v\right]^2 dzd\tau$$
$$\le N_4\left\{\int_0^t\left[\int_0^1 v_{zz}^2(z,\tau)\,dz)\left(\int_0^t \lambda\beta(v,l_0v)l_0v\,dz\right) + \int_0^1 v_{zz}^2(z,t)\,dz\right]d\tau + 1\right\},$$

где $t \in [0, T]$, постоянная N_4 зависит от исходных данных задачи и от числа δ, постоянная α_2 положительна и определяется лишь функцией $\alpha(t)$ и числом T. Зафиксируем $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда второе слагаемое в левой части последнего неравенства можно отбросить. К полученному неравенству применима лемма Гронуолла, которая приводит к неравенству

$$\int\limits_0^1 v_{zz}^2(z,t)\,dz \le N_4 \exp\biggl\{N_4 T + N_4 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \lambda\beta(v, l_0 v) l_0 v\,dzdt\biggr\}. \tag{2.7}$$

Вследствие (2.3) правая часть неравенства (2.7) будет ограничена постоянной N_5, зависящей лишь от исходных данных задачи и от ε. Другими словами,

$$\int\limits_0^1 v_{zz}^2(z,t)\,dz \le N_5, \quad t \in [0, T]. \tag{2.8}$$

Оценка (2.8) основная. Используя ее, с помощью стандартных приемов нетрудно получить оценки

$$\int\limits_0^1 v_{zt}^2(z,t)\,dz + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \biggl\{\biggl[\frac{\partial}{\partial\tau} l_0 v\biggr]^2 + \biggl[\frac{\partial^2}{\partial z^2} l_0 v\biggr]^2 + v_{\tau\tau}^2\biggr\}\,dzd\tau \le N_6, \tag{2.9}$$

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1, 0\le t\le T} |v| + \operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1, 0\le t\le T} |v_t| + \operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1, 0\le t\le T} |v_z| \le N_7 \tag{2.10}$$

с постоянными N_6 и N_7, зависящими лишь от исходных данных задачи и от ε.

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $v(z,t)$, являющуюся в $\widehat{Q}_T$ решением уравнения*

$$l_0 v = w \tag{2.11}$$

и удовлетворяющую условиям

$$v|_{z=0} = v|_{z=1} = 0, \quad v(z,0) = u_0(z). \tag{2.12}$$

Если функция $w(z,t)$ принадлежит пространству $W_2^1(\widehat{Q}_T)$ и если она обращается в нуль при $z = 0$ и $z = 1$, то краевая задача (2.11), (2.12) будет иметь решение $v(z,t)$ такое, что $v(z,t) \in L_\infty\bigl(0, T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_0)\bigr)$, $v_t(z,t) \in L_\infty(0, T; L_2(D_0))$. Доказательство этого факта нетрудно провести, используя параболическое уравнение

$$l_{0,\varepsilon} v \equiv v_t - \varepsilon v_{zz} - \frac{\alpha'(t)z}{\alpha(t)} v_z = w, \tag{2.11$_\varepsilon$}$$

получая равномерные по ε оценки решений краевой задачи (2.11$_\varepsilon$), (2.12) (основная оценка получается после анализа равенства $\int\limits_0^t \int\limits_0^1 l_{0,\varepsilon} v \cdot v_{zz}\,dzd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 w v_{zz}\,dzd\tau$) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Вернемся к краевой задаче ($1.1''_{\varepsilon\lambda}$), ($1.2'$), ($2.1'$).

При $\lambda = 0$ эта задача представляет собой первую краевую задачу относительно функции $w = l_0 v$ для параболического уравнения. Существование регулярного решения такой задачи хорошо известно. Зная же функцию w, как отмечено выше, нетрудно найти и функцию v. Далее, для функции $v(z,t)$ равномерно по λ при принадлежности функции $\hat{f}$ лишь пространству $L_2(\widehat{Q}_T)$ (другими словами, без понижения гладкости) справедливы оценки (2.8)–(2.10). Именно это и позволяет осуществить всю схему метода продолжения по параметру для краевой задачи $(1.1''_{\varepsilon\lambda})$, $(1.2')$, $(2.1')$ и тем самым получить существование регулярных решений этой задачи для всех значений λ из отрезка $[0,1]$.

Таким образом, существование регулярных решений краевой задачи $(1.1''_{\varepsilon})$, $(1.2')$, $(2.1')$ доказано.

Для решений этой краевой задачи имеет место оценка (2.3) для $\lambda = 1$. Далее, опять же для $\lambda = 1$ рассмотрим равенство (2.4). Если мы оценим второе слагаемое правой части этого равенства так же, как ранее, во втором выполним интегрирование по частям и затем применим неравенство Юнга, то в результате получим неравенство

$$\int\limits_0^1 v_{zz}^2(z,t)\,dz + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}l_0 v\right]^2 dz d\tau$$
$$\le N_8\left\{\int\limits_0^t\left[\left(\int\limits_0^1 v_{zz}^2(z,\tau)\,dz\right)\left(\int\limits_0^1 \beta(v,l_0v)l_0v\,dz\right) + \int\limits_0^1 v_{zz}^2(z,\tau)\,dz\right]d\tau + 1\right\},$$

где $t \in [0,T]$ и постоянная N_8 зависит лишь от исходных данных и не зависит от ε. Используя теперь лемму Гронуолла, получаем оценку типа оценки (2.7) и далее оценку типа оценки (2.8), но уже с постоянными в правой части, не зависящими от ε. В свою очередь, из доказанных оценок следуют неравенства

$$\int\limits_0^1 v_{zt}^2(z,t)\,dz + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}l_0 v\right]^2 dz d\tau \le N_9,$$
$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1, 0\le t\le T}|v| + \operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1, 0\le t\le T}|v_z| + \operatorname*{vrai\,max}_{0\le z\le 1, 0\le t\le T}|v_t| \le N_{10}$$

вновь с постоянными, не зависящими от ε. Наконец, последняя оценка

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 v_{\tau\tau}^2\,dz d\tau \le N_{11}$$

вытекает из предыдущих.

Доказанных оценок вполне достаточно для перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ в уравнении $(1.1''_{\varepsilon})$. Предельная функция будет решением уравнения $\widehat{L}_0 v = \hat{f}$, и для нее будут выполняться условия (1.2) и (2.1). Кроме того, для предельной функции сохранятся доказанные выше оценки. Из них следует выполнение оценки

$$\int\limits_0^1 [l_0 l_0 v(z,t)]^2\,dz \le N_{12}$$

(для решения $v(z,t)$ уравнения $\widehat{L}v = \hat{f}$). Переходя от функции $v(z,t)$ к функции $u(x,t)$, окончательно получаем решение краевой задачи III из требуемого класса. Теорема доказана.

Условие подчинения для производной $\beta_\xi(\xi,\eta)$ не выполнено для функций $\beta(\xi,\eta)$, представляющих собой вырождающуюся на решении диссипацию. Для таких функций для доказательства разрешимости краевой задачи III потребуются дополнительные условия.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* I *и* III *теоремы* 2.1, *а также следующее условие.*

II$'$. $\beta(\xi,\eta) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\beta(\xi,0) \equiv 0$, $m_0|\xi|^k|\eta|^{p+2} \le \eta\beta(\xi,\eta) \le m_1|\xi|^k|\eta|^{p+2}$, $m_0|\xi|^k|\eta|^p \le \beta_\eta(\xi,\eta) \le m_1|\xi|^k|\eta|^p$, $|\beta_\xi(\xi,\eta)| \le m_2|\xi|^l|\eta|^{p+1}$, $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, $m_0 > 0$, $p \ge 0$, $2l \ge k \ge 0$.

Тогда существует решение $u(x,t)$ *краевой задачи* III *такое, что* $u \in L_\infty\big(0,T; W_2^2(D_t)) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_t)\big)$, $u_t \in L_\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_t)\big)$, $u_{tt} \in L_\infty(0,T;L_2(D_t))$.

Доказательство. В цилиндре $\widehat{Q}_T$ рассмотрим уравнение

$$\widehat{L}_\varepsilon v \equiv l_0 l_0 v - \frac{1}{\alpha^2(t)} v_{zz} + \beta_\varepsilon(v, l_0 v) = \hat{f}, \tag{2.13}$$

где $\beta_\varepsilon(\xi,\eta) = \beta(\xi,\eta) + \varepsilon|\eta|^p\eta$, $\varepsilon > 0$. Заметим, что для функции $\beta_\varepsilon(\xi,\eta)$ на любом множестве $B_M = \{(\xi,\eta) : |\xi| \le M,\ \eta \in R\}$ условие II теоремы 2.1 будет выполнено. Этого вполне достаточно, чтобы краевая задача (2.13), (1.2$'$), (2.1$'$) имела регулярное решение (поскольку все остальные условия теоремы 2.1 выполняются). Действительно, определим срезку, полагая $\beta_{\varepsilon M}(\xi,\eta)$ равной $\beta_\varepsilon(\xi,\eta)$, если $|\eta| \le M$, считая ее произвольной функцией из C^1, если $M < |\xi| \le M_1$, и равной функции $\beta_\varepsilon(M_1,\eta)$, если $|\xi| > M_1$. Краевая задача III для уравнения (2.13) с такой функцией будет иметь регулярное решение; для этого решения будет справедлива оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0 \le z \le 1, 0 \le t \le T} |v| \le M_0 \tag{2.14}$$

с постоянной M_0, зависящей лишь от исходных данных. Если теперь параметр M срезки выбрать большим числа M_0, то функция $\beta_{\varepsilon M}(v, l_0 v)$ будет совпадать с функцией $\beta_\varepsilon(v, l_0 v)$, и тем самым решение краевой задачи III для уравнения с функцией $\beta_{\varepsilon M}(v, l_0 v)$ будет решением краевой задачи III для уравнения (2.13).

Заметим, что вследствие условия III и теорем вложения для функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $f(x,t)$ будут выполняться включения

$$u_{0x}(x) \in L_m(D_0), \quad u_1 \in L_m(D_0), \quad f(x,t) \in L_m(Q_T), \quad m > 1,$$

позволяющие с помощью равенства (1.7) получить оценку

$$\int_0^1 \left[w_1^{q+1}(z,t) + w_2^{q+1}(z,t)\right] dz \le M_2, \tag{2.15}$$

в которой $t \in [0,T]$, q — произвольное натуральное нечетное число, постоянная M_2 зависит лишь от исходных данных задачи и не зависит от ε, функции $w_1(z,t)$ и $w_2(z,t)$ суть функции, введенные при доказательстве теоремы 1.1.

Из оценки (2.15) вытекает очевидная оценка

$$\int_0^1 [l_0 v(z,t)]^{q+1}\, dz \le M_2. \tag{2.16}$$

Чтобы получить следующие (основные) оценки, мы должны теперь проанализировать равенство (2.4) (с $\lambda = 1$); при этом в каком-либо пояснении нуждается лишь анализ (точнее говоря, оценка) слагаемого

$$-\int_0^t \int_0^1 \frac{\beta_\xi(v, l_0 v)}{\alpha^2(\tau)} v_z \frac{\partial}{\partial z} l_0 v\, dz d\tau.$$

Это слагаемое можно оценить так:

$$\left| -\int_0^t \int_0^1 \frac{\beta_\xi(v, l_0 v)}{\alpha^2(\tau)} v_z \frac{\partial}{\partial z} l_0 v \, dz d\tau \right| \leq \delta \int_0^t \int_0^1 |v|^k |l_0 v|^p \left[\frac{\partial}{\partial z} l_0 v \right]^2 dz d\tau$$

$$+ C_1(\delta) \int_0^t \int_0^1 |v|^{2l-k} |l_0 v|^{p+2} v_z^2 \, dz d\tau$$

$$\leq \delta \int_0^t \int_0^1 |v|^k |l_0 v|^p \left[\frac{\partial}{\partial z} l_0 v \right]^2 dz d\tau + C_1(\delta) \int_0^t \left(\int_0^1 v_{zz}^2(z,\tau) \, dz \right) \left(\int_0^1 |l_0 v(z,\tau)|^{p+2} \, dz \right) d\tau$$

$$\leq \delta \int_0^t \int_0^1 |v|^k |l_0 v|^p \left[\frac{\partial}{\partial z} l_0 v \right]^2 dz d\tau + C_2(\delta) \int_0^t \int_0^1 v_{zz}^2(z,\tau) \, dz d\tau$$

(по ходу выкладок здесь использовалось условие II$'$, оценки (2.14) и (2.16) со специальным выбором числа q).

Доказательство требуемых оценок завершается так же, как завершалось доказательство равномерных по ε оценок теоремы 2.1. В результате мы получим оценки (2.8)–(2.10), но с постоянными в правой части, не зависящими от ε. Этих оценок вполне достаточно для предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в уравнении (2.13); предельная функция и будет требуемым решением краевой задачи III. Теорема доказана.

§ 3. О поведении решений при $t \to \infty$

В настоящем параграфе приведем несколько простых теорем о поведении при $t \to \infty$ решений той или иной краевой задачи для уравнения (1.1) в расширяющихся с ростом t областях. В формулировках этих теорем мы не будем повторять условия теорем существования; как легко можно будет понять из нижеизложенного, условия, при которых будут справедливы эти теоремы, не будут противоречить условиям теорем существования. Другими словами, объединяя условия теорем существования и теорем настоящего пункта, мы сможем описать свойства реально существующего решения.

Итак, пусть $Q_\infty = \{(x,t) : t > 0, \ 0 < x < \alpha(t)\}$, и пусть эта область расширяется с ростом t. Заметим прежде всего, что если Q_∞ расширяется ограниченным образом (т. е. так, что выполняется условие $\alpha(t) \leq \overline{\alpha}_0 < +\infty$, $t \geq 0$), и выполняются условия теоремы 1.1, то для регулярных решений краевой задачи I будет иметь место оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0 \leq x \leq \alpha(t), t \geq 0} |u| \leq K_0 \tag{3.1}$$

с постоянной K_0, зависящей лишь от функций $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ и от $\overline{\alpha}_0$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются следующие условия.*

I. $\alpha(t) \in C^1([0,+\infty))$, $\alpha'(t) \geq 0$, $1 \leq \alpha(t) \leq \overline{\alpha}_0 < +\infty \ \forall t \geq 0$.

II. $\beta(\xi,\eta) = \beta_0(\xi)\eta + \beta_1(\xi,\eta)$, $\beta_0(\xi) \in C(R)$, $\beta_1(\xi,\eta) \in C(\mathbb{R}^2)$, $\beta(\xi) \geq \bar{\beta}_0 > 0$, $\eta\beta_1(\xi,\eta) \geq 0$, $|\beta_1(\xi,\eta)|^m \leq M_0 \eta \beta_1(\xi,\eta)$, $M_0 \geq 0$, $1 < m \leq 2$, $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| \leq K_0$.

III. $u_0(x) \in W_2^1(D_0)$, $u_1(x) \in L_2(D_0)$.

Кроме того, пусть для положительных чисел γ и k выполняются неравенства

$$\min\left\{\gamma, \overline{\alpha}_0^2\gamma, \gamma\frac{K_0^{2-m}M_0}{m}\left[\frac{2(m-1)\overline{\alpha}_0^2}{m}\right]^{m-1}\right\} < 1,$$

$$\bar{\beta}_0 - \gamma - \frac{k}{2} - \frac{\gamma k}{2} - \gamma K_1^2\overline{\alpha}_0^2 > 0, \quad \frac{\gamma}{2} - k - \gamma k\overline{\alpha}_0^2 > 0,$$

где $K_1 = \max\limits_{|\xi|\le K_0} \beta_0(\xi)$.

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой при $t \ge 0$ функции $\varphi(t)$ такой, что $\varphi(0) = 1$, $0 \le \varphi'(t) \le k\varphi(t)$ при $t \ge 0$, и для любой функции $f(x,t)$ такой, что

$$\int\limits_0^\infty \varphi(\tau)\left(\int\limits_0^{\alpha(\tau)} f^2(x,\tau)\,dx\right)d\tau < +\infty,$$

регулярное решение $u(x,t)$ краевой задачи I *будет удовлетворять неравенству*

$$\int\limits_0^{\alpha(t)} \left[u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\right]dx \le \frac{M}{\varphi(t)}$$

с постоянной M, зависящей лишь от функций $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ и от чисел $\overline{\alpha}_0$, $\bar{\beta}_0$ и M_0.

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^{\alpha(\tau)} Lu\varphi(\tau)(u_\tau + \gamma u)\,dxd\tau = \int\limits_0^t\int\limits_0^{\alpha(\tau)} f\varphi(\tau)(u_\tau + \gamma u)\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям и используя неравенство

$$u^2(x,t) \le \alpha(t)\int\limits_0^{\alpha(t)} u_x^2(x,t)\,dx, \tag{3.2}$$

условия теоремы, оценку (3.1) и неравенство Юнга, нетрудно получить неравенство

$$\frac{\varphi(t)}{2}(1-\gamma)\int\limits_0^{\alpha(t)} u_t^2(x,t)\,dx + \frac{\varphi(t)}{2}\left(1-\overline{\alpha}_0^2\gamma\right)\int\limits_0^{\alpha(t)} u_x^2(x,t)\,dx$$
$$+\left(\bar{\beta}_0 - \gamma - \frac{k}{2} - \frac{\gamma k}{2} - \gamma K_1^2\overline{\alpha}_0^2 - \frac{\delta_0^2}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi(\tau)u_\tau^2\,dxd\tau$$
$$+\left(\frac{\gamma}{4} - \frac{k}{2} - \frac{\gamma k\overline{\alpha}_0^2}{2} - \frac{\gamma\overline{\alpha}_0^2\delta_1^2}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi(\tau)u_x^2\,dxd\tau$$
$$+\left(1 - \frac{\gamma K_0^{2-m}M_0}{m}\left[\frac{2(m-1)\overline{\alpha}_0^2}{m}\right]^{m-1}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi(\tau)u_\tau\beta_1(u,u_\tau)\,dxd\tau$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\delta_0^2}+\frac{1}{2\delta_1^2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^{\alpha(\tau)}\varphi(\tau)f^2\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t u_1^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{0x}^2(x)\,dx$$
$$+\left|\int\limits_0^1 u_0(x)u_1(x)\,dx\right|.$$

Подбирая теперь числа δ_0 и δ_1 малыми и фиксируя их, из последнего неравенства получаем требуемую оценку. Теорема доказана.

В качестве функции $\varphi(t)$ можно взять, например, функции $\exp(kt)$, $(1+t)^k$, $k>0$. Легко проверить, что всегда можно подобрать малое число γ так, чтобы требуемые в теореме неравенства, связывающие числа γ и k, выполнялись.

Приведем еще один результат о столь же «хорошем» поведении энергетической нормы решения при $t\to\infty$.

Теорема 3.2. *Пусть следующие выполняются условия.*
I. $\alpha(t)\in C^1([0,+\infty))$, $\alpha'(t)\geq 0$, $t\geq 0$.
II. $\beta(\xi,\eta)=\beta_0(\xi,\eta)+\beta_1(\xi)$, $\beta_0(\xi,\eta)\in C(\mathbb{R}^2)$, $\beta_1(\xi)\in C(R)$,

$$\eta\beta_0(\xi,\eta)\geq\bar\beta_0\cdot[\eta^2+(1+|\xi|^l)|\eta|^{p+2}],\quad \bar\beta_0>0,\quad p\geq 0,\quad l\geq 0,$$
$$|\beta_0(\xi,\eta)|\leq M_0[|\eta|+(1+|\xi|^l)|\eta|^{p+1}],\quad M_0\geq 0,$$
$$\xi\beta_1(\xi)\geq\bar\beta_1\cdot[\xi^2+|\xi|^{p+2}+|\xi|^{p+l+2}],\quad \bar\beta_1>0,$$
$$\int\limits_0^\xi\beta_1(\theta)d\,\theta\leq M_1\xi\beta_1(\xi),\quad M_1\geq 0.$$

III. $u_0(x)\in W_2^1(D_0)$, $\quad u_1(x)\in L_2(D_0)$.

Кроме того, пусть для положительных чисел γ и k выполняются неравенства

$$\max\left(\frac{k}{2},2kM_1\right)<\gamma<\min(1,\bar\beta_1),\quad \bar\beta_0-\frac{k}{2}-\gamma-\frac{\gamma k}{2}-\frac{\gamma M_0^2}{\bar\beta_1}>0,\quad \bar\beta_1>2k,$$
$$(p+2)\left[\frac{\bar\beta_1(p+2)}{4M_0}\right]^{\frac{1}{p+1}}\bar\beta_0-\gamma(p+1)M_0>0.$$

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой при $t\geq 0$ функции $\varphi(t)$ такой, что $\varphi(0)=1$, $0\leq\varphi'(t)\leq k\varphi(t)$ при $t\geq 0$, и для любой функции $f(x,t)$ такой, что

$$\int\limits_0^\infty\varphi(\tau)\left(\int\limits_0^{\alpha(\tau)}f^2(x,\tau)\,dx\right)d\tau<+\infty,$$

регулярное решение $u(x,t)$ краевой задачи I *или регулярное решение $u(x,t)$ краевой задачи* III *будет удовлетворять неравенству*

$$\int\limits_0^{\alpha(t)}\left[|u(x,t)|^2+|u(x,t)|^{p+2}+|u(x,t)|^{p+l+2}+u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\right]dx\leq\frac{M}{\varphi(t)}$$

с постоянной M, зависящей лишь от функций $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ и от чисел $\bar\beta_0$, $\bar\beta_1$, M_0 и M_1.

Доказательство теоремы 3.2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.1.

Как и ранее, в качестве функции $\varphi(t)$ можно взять функции $\exp(kt)$, $(1+t)^k$, $k > 0$.

«Хорошее» убывание энергетической нормы решения (в частности, экспоненциальное) в случае сильно расширяющихся областей Q_∞ обеспечивается во многом наличием не тождественно нулевой функции $\beta_1(\xi)$ (подобный факт имеет место даже для линейного уравнения (1.1) — см., например, работу [16] и библиографию в ней). Если же функция $\beta_1(\xi)$ отсутствует, то для расширяющихся неограниченно по переменной x областей Q_∞ нам удалось доказать убывание энергетической нормы решения (вообще говоря, более медленное, чем в теоремах 3.1 и 3.2) лишь в некотором специальном случае.

Прежде чем формулировать теорему, заметим, что для регулярных решений краевой задачи I или краевой задачи III при выполнении условий теорем существования всегда имеет место оценка

$$\int_0^{\alpha(t)} u_x^2(x,t)\,dx \le K_0 \tag{3.3}$$

с постоянной K_0, зависящей лишь от функций $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются следующие условия.*

I. $\alpha(t) \in C^1([0,+\infty))$, $\alpha'(t) \ge 0$, $t \ge 0$.

II. $\beta(\xi,\eta) = \beta_0(\xi)\eta$, $\beta_0(\xi) \in C(R)$, $\beta_0(\xi) \ge \bar\beta_0 > 0$,

$$\int_0^{\xi} \theta\beta_0(\theta)d\,\theta \le \bar\beta_1(|\xi|^2 + |\xi|^{q+2}), \quad \bar\beta_1 > 0,\ q \ge 0,\ \xi \in \mathbb{R};$$

III. $u_0(x) \in W_2^1(D_0)$, $u_1(x) \in L_2(D_0)$.

Кроме того, пусть для положительных чисел γ и k выполняются неравенства

$$\bar\beta_0 > \frac{3}{2}\gamma + \frac{\gamma^2}{2}, \quad \gamma > k.$$

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой при $t \ge 0$ функции $\varphi(t)$ такой, что $\varphi(0) = 1$, $0 \le \varphi'(t) \le k\varphi(t)$, $(2\bar\beta_1 + 2\bar\beta_1 K_0^{q/2} + 1)\varphi'(t)\alpha^{\frac{q+4}{2}}(t) \le \varphi(t)$, и для любой функции $f(x,t)$ такой, что

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau)\alpha^2(\tau)\Big(\int_0^{\alpha(\tau)} f^2(x,\tau)\,dx\Big)\,d\tau < +\infty,$$

регулярное решение $u(x,t)$ краевой задачи I *или регулярное решение $u(x,t)$ краевой задачи* III *будет удовлетворять неравенству*

$$\int_0^{\alpha(\tau)} \big[u^2(x,t) + u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\big]\,dx \le \frac{M}{\varphi(t)}$$

с постоянной M, зависящей лишь от функций $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ и от чисел $\bar\beta_0$ и $\bar\beta_1$.

Доказательство. Как и ранее, проанализируем равенство

$$\int_0^t \int_0^{\alpha(\tau)} \varphi(\tau)Lu(u_\tau + \gamma u)\,dxd\tau = \int_0^t \int_0^{\alpha(\tau)} \varphi(\tau)f(u_\tau + \gamma u)\,dxd\tau. \tag{3.4}$$

Какие-либо пояснения в этом анализе требуются, на наш взгляд, лишь при оценке интегралов

$$I_1 = \gamma \int\limits_0^t \int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi'(t) \Big(\int\limits_0^{u(x,\tau)} \xi \beta_0(\xi) d\,\xi \Big) \, dx d\tau, \quad I_2 = \gamma \int\limits_0^t \int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi f u \, dx d\tau.$$

Интеграл I_1 оценивается с помощью условий I, II и неравенств (3.2), (3.3) следующим образом:

$$I_1 \le \gamma \bar{\beta}_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi'(\tau) u^2 \, dx d\tau + \gamma \bar{\beta}_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi'(\tau) |u|^{q+2} \, dx d\tau$$

$$\le \gamma \bar{\beta}_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi'(\tau) \alpha^2(\tau) \int\limits_0^{\alpha(\tau)} u_x^2 \, dx d\tau + \gamma \bar{\beta}_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi'(\tau) \alpha^{\frac{q+4}{2}}(\tau) \Big(\int\limits_0^{\alpha(\tau)} u_x^2 \, dx \Big)^{\frac{q+2}{2}} d\tau$$

$$\le \gamma \bar{\beta}_1 \big(1 + K_0^{q/2} \big) \int\limits_0^t \int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi'(\tau) \alpha^{\frac{q+4}{2}}(\tau) \Big(\int\limits_0^{\alpha(\tau)} u_x^2 \, dx \Big) d\tau.$$

Прежде чем оценивать интеграл I_2 , преобразуем его. Определим функцию

$$g(x,\tau) = \int\limits_0^x f(x,\tau) \, dz.$$

Имеет место равенство

$$I_2 = - \int\limits_0^t \int\limits_0^{\alpha(\tau)} \varphi g u_x \, dx d\tau.$$

Теперь при оценке I_2 мы вполне можем воспользоваться неравенством Юнга.

В остальном анализ равенства (3.4) стандартен. Условия теоремы, свойства функций $\varphi(t)$ и $f(x,t)$ приводят к нужному неравенству. Теорема доказана.

Если функция $\alpha(t)$ имеет вид $\alpha(t) = (1+t)^\lambda$ с достаточно малым положительным показателем λ, то в качестве функции $\varphi(t)$ можно взять функцию $\exp[(1+t)^k]$ также с достаточно малым положительным показателем k.

Заключение

Завершая работу, сделаем несколько замечаний.

1. Исследование уравнения (1.1) в областях Q_T с двумя криволинейными границами, т. е. в областях вида $\{(x,t) : 0 < t < T,\ \alpha_1(t) < x < \alpha_2(t)\}$, можно провести методами, в целом аналогичными изложенным выше. В частности, переход к цилиндрической области осуществляется с помощью замены

$$z = \frac{x - \alpha_1(t)}{\alpha_2(t) - \alpha_1(t)}.$$

2. Строго говоря, для функций $\beta(\xi,\eta)$ вида, указанного в теореме 3.2, мы не доказывали теорем существования регулярных решений той или иной краевой задачи. Однако уже из первой априорной оценки, если она имеет место, следует ограниченность решения $u(x,t)$ в любой области Q_T конечной высоты, и

тогда слагаемое $\beta_1(u)$ становится подчиненным. Другими словами, все теоремы § 1, 2 останутся справедливыми, если младшие члены в уравнении (1.1) имеют вид $\beta_0(u, u_t) + \beta_1(u)$, причем для функции $\beta_0(\xi, \eta)$ выполняются все условия, налагаемые ранее на функцию $\beta(\xi, \eta)$ (в той или иной теореме), для функции же $\beta_1(\xi)$ выполняется условие $\xi\beta_1(\xi) \geq 0$.

3. Пусть функция $\alpha'(t)$ кусочно-непрерывна, и пусть на участках ее непрерывности выполняется одно из условий $0 \leq \alpha'(t) \leq \alpha_0 < 1$, $0 \geq \alpha'(t) \geq -\alpha_0 > -1$, $\alpha'(t) \geq \alpha_0 > 1$. Кроме того, пусть таких участков конечное число. Нетрудно понять, что в области Q_T с подобной криволинейной границей корректной для уравнения (1.1) будет краевая задача с заданием на соответствующих участках условий краевой задачи I, II или III.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lions J.-L.* Une remarque sur les problemes d'evolution nonlineaires dans les domaines non cylindriques // Rov. Romaine Pures Appl. Math. 1964. V. 9. P. 11–18.
2. *Lions J.-L.* Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non liniaires. Paris: Dunod, 1969.
3. *Medeiros L. A.* Non-linear wave equations in domains with variable boundary // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 47, N 1. P. 47–58.
4. *Cooper J., Medeiros L. A.* The Cauchy problem for nonlinear wave equations in the domain with moving boundary // Ann. Scuola Normale Sup. Pisa Cl. Sci., (4). 1972. V. 26. P. 829–838.
5. *Cooper J., Bardos C.* A nonlinear wave equation in a time dependent domain // J. Math. Anal. Appl. 1973. V. 42, N 1. P. 29–60.
6. *Inoue A.* Sur $\square u + u^3 = f$ dans us domaine non cilindrique // J. Math. Anal. Appl. 1974. V. 46, N 3. P. 777–819.
7. *Sidelnik Y. I.* Existense and uniqueness of a generalized solution of the mixed problem for an equation of plate oscillation type in a noncylindrical domains // J. of Soviet Math. 1993. V. 63, N 1. P. 98–101.
8. *Ferreira J.* Nonlinear hyperbolic-parabolic partial differential equations in noncylindrical domains // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). 1995. V. 44. P. 135–146.
9. *Ferreira J., Lar′kin N. A.* Global solvability of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in noncylindrical domains // Portugal. Math. 1996. V. 53, N 4. P. 381–395.
10. *Limaco Ferrel J., Mederos L. A.* Kirchoff — Carrier elastic strings in noncylindrical domains // Portugal. Math. 1999. N 4. P. 465–500.
11. *Nakao M., Narazaki T.* Existence and decay of solutions of some nonlinear wave equations in noncylindrical domains // Math. Rep. 1978. V. 11, N 2. P. 117–125.
12. *Ferreira J., Lar′kin N. A.* Decay of solutions of nonlinear hyperbolic-parabolic equations in noncylindrical domains // Comm. Appl. Anal. 1997. V. 1, N 1. P. 75–81.
13. *Cousin A. T., Frota C. L., Lar′kin N. A.* Regular solutions and energy decay for the equation of viscoelasticity with nonlinear damping on the boundary // J. Math. Anal. Appl. 1998. N 2. P. 273–296.
14. *Cousin A. T., Lar′kin N. A.* On the nonlinear initial boundary value problem for the equation of viscoelasticity // Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl. 1998. V. 31, N 1–2. P. 229–242.
15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
16. *Hirosawa F.* Energy decay for a degenerate hyperbolic equation with a dissipative term // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1999. V. 35, N 3. P. 391–406.

Статья поступила 13 марта 2000 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Ларькин Николай Андреевич
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск 630090
nlarkine@uem.br