Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 517.518.2+517.956.2

К УСТОЙЧИВОСТИ КЛАССОВ АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. А. Егоров, М. В. Коробков

Аннотация: В рамках предложенной А. П. Копыловым концепции ω-устойчивости изучается устойчивость классов аффинных отображений. Получены различные необходимые и достаточные условия для устойчивости таких классов, а также оценки устойчивости в W_p^1-нормах в целых областях. Библиогр. 20

В работе рассматривается следующая задача. Пусть G — компакт в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Предположим, известно, что отображение $f : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$ единичного шара $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ аппроксимируется (с достаточной точностью) отображениями из G в бесконечно малой окрестности каждой точки $x \in B(0,1)$ (например, отображение f дифференцируемо и расстояние $\operatorname{dist}(f'(x), G) = \inf\limits_{a \in G} \|f'(x) - a\|$ мало́, где $\|\cdot\|$ — операторная норма в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$). Можно ли отсюда сделать вывод, что и на всем шаре $B(0,1)$ отображение f мало отличается в C-норме от аффинного отображения с линейной частью из G? Если ответ на этот вопрос положителен, то класс $\mathfrak{A}(G)$ аффинных отображений с линейной частью из G называется устойчивым. В зависимости от того, что понимается под аппроксимацией отображения f в бесконечно малой окрестности точки x, возникают различные определения устойчивости.

Наиболее естественным представляется подход к данной задаче с точки зрения предложенной А. П. Копыловым [1] концепции ω-устойчивости. В настоящей статье используются два варианта определения устойчивости из работы [1]: так сказать, сильная устойчивость, именно за которой и закрепим термин ω-устойчивость, и слабая устойчивость, для обозначения которой будет применяться термин ω°-устойчивость (точные определения см. в п. 1). Заметим, что наши терминология и обозначения несколько отличаются от принятых в [1].

Одной из причин, оправдывающих отдельное рассмотрение классов аффинных отображений, является то обстоятельство, что для них удается получить оценки устойчивости не только на шарах, но и в целых областях весьма общего вида, причем эти оценки имеют место не только в C-, но и в W_p^1-нормах (см. теоремы 6, 7, 10 настоящей статьи). В связи со сказанным напомним, что согласно [1, теорема 1] для произвольного ω-устойчивого класса справедливы оценки устойчивости в C-норме на компактных подобластях области определения отображения (см. также замечание 6 данной работы).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00517), INTAS (код проекта 97–10170), грантом № 8 конкурса-экпертизы РАН 1999 г. для молодых ученых.

Первая из основных теорем об устойчивости классов аффинных отображений состоит в том, что если для компактного множества $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ существует представление

$$G = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha, \tag{1}$$

$$G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing, \quad \alpha \in A,\ i \neq j,\ i, j \in \{1, \dots, k_\alpha\}, \tag{2}$$

где G_i^α — квазивыпуклые компактные множества (определение квазивыпуклости см. в п. 1), причем выполнено условие

$$\forall a, b \in G\ \bigl(a \neq b \Rightarrow \exists \alpha \in A\ \exists i \neq j \in \{1, \dots, k_\alpha\}\ a \in G_i^\alpha \text{ и } b \in G_j^\alpha\bigr), \tag{3}$$

то класс $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив (см. ниже теорему 1).

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что класс $\mathfrak{A}(G)$ является ω-устойчивым, если компакт G вполне несвязен и существует представление (1)–(2) с выпуклыми G_i^α (см. следствие 2). Отметим, что при $n = 1$ или $m = 1$ сформулированные в следствии 2 и теореме 1 условия эквивалентны. При $n = 1$ эти условия являются не только достаточными, но и необходимыми для ω-устойчивости класса $\mathfrak{A}(G)$ (теорема 3), а при $m = 1$ для ω-устойчивости $\mathfrak{A}(G)$ оказывается достаточной одна только вполне несвязность компакта G (теорема 2). Обращаем внимание читателя на то, что для выполнения условий теоремы 1 необходимо (но при $n > 1$ или $m > 1$ недостаточно), чтобы компакт G был вполне несвязен.

В статье [2] первым из авторов была также опубликована теорема об устойчивости класса $\mathfrak{A}(G)$ в том случае, когда компакт G вполне несвязен. Однако, этот результат сформулирован в [2] не совсем точно: декларируется ω-устойчивость класса $\mathfrak{A}(G)$ с любым вполне несвязным компактом G, когда фактически установлена только ω°-устойчивость (подробности см. в письме [3]). Здесь приведена точная формулировка этого результата (теорема 4), а также доказано, что при $n = 1$ вполне несвязность компакта G является и необходимой для ω°-устойчивости класса $\mathfrak{A}(G)$ (теорема 5). Полученные результаты указывают как на родство, так и на различие понятий ω- и ω°-устойчивости (см. также лемму 1 и замечание 1). Впрочем, обе концепции имеют свое самостоятельное значение, охватывая разные грани феномена устойчивости.

Для классов отображений из теорем 1, 2 и 4 справедливы оценки устойчивости в W_∞^1-норме на областях с конечным внутренним диаметром (см. теоремы 6, 7).

Полезное применение в работе находят понятия слабой связности и qc-связности множеств в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, введенные в [4–8] при изучении ω-устойчивости классов отображений и строения образов производных дифференцируемых векторнозначных отображений. Например, условия на компакт G в теореме 1 равносильны тому, что все компоненты qc-связности G состоят из одной точки. Аналогично условия на G в следствии 2 оказываются эквивалентными одноточечности компонент слабой связности множества G.

Для множеств вида

$$G = \left\{ \sum_{\kappa=1}^{k} t_\kappa a_\kappa + b \mid t = (t_1, \dots, t_k) \in K \right\}, \tag{4}$$

где $a_\kappa, b \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\kappa = 1, \dots, k$, и K — компакт в $\mathbb{R}^k$, в настоящей работе найдено достаточное условие для ω-устойчивости класса $\mathfrak{A}(G)$ (теорема 9). В случае, когда внутренность множества K непуста, найденное условие становится и необходимым. Для $k = 1$ эти результаты получены в работе [2], а указанное условие в этом случае эквивалентно требованию $\operatorname{rank} a_1 > 1$.

Если Δ — область Джона (такие области иногда называют областями с конечными внутренним и внешним радиусами), то для классов отображений из теоремы 9 имеют место оценки устойчивости в $W_p^1(\Delta)$-нормах, $1 < p < \infty$ (теорема 10).

1. Приведем некоторые необходимые для дальнейшего определения.

Предметом изучения настоящей статьи служат следующие классы аффинных отображений. Для множества $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ через $\mathfrak{A}(G)$ обозначается класс всевозможных сужений $g|_\Delta$ на области (открытые связные множества) $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ аффинных отображений $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g(\cdot) = a(\cdot) + v$, с линейной частью $a \in G$ и вектором $v \in \mathbb{R}^m$.

Положим $\mathrm{Lip} = \bigcup\limits_{\Delta \subset \mathbb{R}^n} \mathrm{Lip}(\Delta)$, где $\mathrm{Lip}(\Delta)$ — класс всех локально липшицевых отображений $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, а объединение строится с использованием всех областей Δ пространства $\mathbb{R}^n$.

Класс $\mathfrak{G}$ отображений из Lip называется *нормальным*, если он удовлетворяет *условиям нормальности* $\mathfrak{g}_1^*$–$\mathfrak{g}_5^*$, предложенным А. П. Копыловым [1]. В интересующем нас частном случае, когда $\mathfrak{G}$ — класс аффинных отображений вида $\mathfrak{A}(G)$, выполнение этих условий нормальности равносильно тому, что G — непустое компактное множество в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Для данного нормального класса отображений $\mathfrak{G}$ и отображения $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ будем вычислять близость f к отображениям класса $\mathfrak{G}$ на шаре $B = B(x, r) \subset \Delta$ по следующей естественной формуле:

$$\omega_B(f, \mathfrak{G}) = \inf_{g: B \to \mathbb{R}^m,\, g \in \mathfrak{G}} \{r^{-1} \sup_{y \in B} |f(y) - g(y)|\}.$$

С помощью определенного таким образом вспомогательного функционала $\omega_B(\cdot, \mathfrak{G})$ построим *функционалы*

$$\omega(f, \mathfrak{G}) = \sup_{B \subset \Delta} \omega_B(f, \mathfrak{G}) \quad \text{и} \quad \Omega(f, \mathfrak{G}) = \sup_{x \in \Delta} \{\varlimsup_{r \to 0} \omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G})\}$$

глобальной и соответственно *локальной близости*. Функционал $\omega(\cdot, \mathfrak{G})$ глобальной близости измеряет близость отображения f к отображениям класса $\mathfrak{G}$ на всех шарах, лежащих в области Δ, а функционал $\Omega(f, \mathfrak{G})$ локальной близости — только в бесконечно малых шарах. Отметим, что равенство $\omega(f, \mathfrak{G}) = 0$ равносильно включению $f \in \mathfrak{G}$ (см. [1]).

Нормальный класс отображений $\mathfrak{G}$ называется *ω-устойчивым* [1], если существует функция $\sigma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что

1) $\sigma(\varepsilon) \to \sigma(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) для каждого отображения f с $\Omega(f, \mathfrak{G}) < \infty$ справедливо неравенство $\omega(f, \mathfrak{G}) \le \sigma(\Omega(f, \mathfrak{G}))$.

По существу, ω-устойчивость класса $\mathfrak{G}$ означает, что из локальной близости отображения f к отображениям класса $\mathfrak{G}$ следует его глобальная близость к ним в C-норме.

Локальную близость f к отображениям класса $\mathfrak{G}$ можно измерять и иначе, а именно с помощью функционала

$$\Omega^\circ(f, \mathfrak{G}) = \sup_{x \in \Delta} \{\varlimsup_{r \to 0} \omega(f|_{B(x,r)}, \mathfrak{G})\},$$

где в соответствии с введенными выше обозначениями $\omega(f|_{B(x,r)}, \mathfrak{G})$ представляет собой значение функционала глобальной близости от сужения $f|_{B(x,r)}$ отображения f на шар $B(x,r)$. Определение ω°-*устойчивости* [1] получается из определения ω-устойчивости, если заменить в последнем функционал локальной близости $\Omega(f, \mathfrak{G})$ функционалом $\Omega^\circ(f, \mathfrak{G})$. (Заметим еще раз, что описанные обозначения и терминология несколько отличаются от принятых в [1].)

Ясно, что $\Omega(f, \mathfrak{G}) \leq \Omega^\circ(f, \mathfrak{G})$, так что всякий ω-устойчивый класс отображений является также и ω°-устойчивым. Следующая лемма дает наглядное представление о характере введенных понятий локальной близости.

Лемма 1. *Пусть $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — непустой компакт и $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое (всюду) отображение области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Тогда верны соотношения*

$$\Omega(f, \mathfrak{A}(G)) = \sup_{x\in\Delta} \operatorname{dist}(f'(x), G),$$

$$\Omega(f, \mathfrak{A}(G)) \leq \Omega^\circ(f, \mathfrak{A}(G)) \leq \Omega(f, \mathfrak{A}(G)) + \sup_{x\in\Delta} \varlimsup_{y\to x} \|f'(y) - f'(x)\|.$$

В частности, для непрерывно дифференцируемого отображения f имеем

$$\Omega(f, \mathfrak{A}(G)) = \Omega^\circ(f, \mathfrak{A}(G)) = \|\operatorname{dist}(f', G)\|_{C(\Delta)}. \tag{5}$$

Первое соотношение леммы 1 доказано в статье [2]. Доказательство основано на следующем простом наблюдении: если отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x \in \Delta$, то справедливо равенство

$$\Omega(x, f, \mathfrak{A}(G)) = \operatorname{dist}(f'(x), G), \tag{6}$$

где левая часть определена по формуле $\Omega(x, f, \mathfrak{A}(G)) = \varlimsup_{r\to 0} \omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{A}(G))$. Доказательство остальных соотношений леммы 1 столь же элементарно, поэтому мы его опускаем.

Лемма 1 до некоторой степени иллюстрирует тот факт, что класс отображений, Ω-локально близких к классу $\mathfrak{A}(G)$, в общем случае шире класса отображений, Ω°-локально близких к классу $\mathfrak{A}(G)$. Поэтому свойство класса $\mathfrak{A}(G)$ быть ω-устойчивым является действительно более сильным по сравнению со свойством ω°-устойчивости (ср. далее теоремы $1, 1'$ и 4, см. также замечание 1).

Напомним, что непрерывный функционал $q : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ называется *квазивыпуклым* [9, определение 4.4.3] (см. также [10]), если для всех $a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и произвольного гладкого отображения $\varphi : (0,1)^n \to \mathbb{R}^m \in C_0^\infty((0,1)^n)$ с носителем в единичном кубе $(0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$q(a) \leq \int\limits_{(0,1)^n} q(a + \varphi'(x))\,dx.$$

Известно, что выпуклые функционалы, а также функционалы, которые можно представить как выпуклые функции от миноров матриц, соответствующих линейным отображениям из $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, являются квазивыпуклыми (см., например, [10]). Компактное множество $K \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ называется *квазивыпуклым* (см., например, [10, п. 4.4]), если существуют квазивыпуклый функционал q и число $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что $K = \{a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid q(a) \leq \gamma\}$.

Для подмножества U метрического пространства X всюду в дальнейшем $\operatorname{cl} U$ означает замыкание U, $\operatorname{int} U$ — внутренность U, ∂U — границу U, $N_\varepsilon(U) = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, U) < \varepsilon\}$ — ε-оболочку (ε-окрестность) U. Через $\operatorname{dom} f$ обозначается область определения отображения f.

2. Первый из основных признаков ω-устойчивости классов аффинных отображений содержится в следующей теореме, справедливой для любых размерностей n и m.

Теорема 1. *Пусть $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — непустое компактное множество, для которого имеется представление (1)–(2) с квазивыпуклыми компактными множествами G_i^α. Тогда если выполнено условие (3), то класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив.*

Обращаем внимание читателя на то, что k_α в формуле (1) является конечным (натуральным) числом, зависящим от α, а множество A индексов α в (1), вообще говоря, может быть и бесконечным.

Теорема 1 непосредственно следует из теоремы 3 работы [8] (см. также [7, теорема 2]), в которой утверждается следующее: если непустой компакт $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ представлен в виде (1)–(2) с квазивыпуклыми компактными множествами G_i^α, то класс отображений $\mathfrak{G} = \{g \in \mathrm{Lip} \mid \forall \alpha \in A\ \exists i \in \{1, \dots, k_\alpha\}\ g'(x) \in G_i^\alpha$ для п. в. $x \in \operatorname{dom} g\}$ является ω-устойчивым.

Несложно убедиться, что для выполнения налагаемых в теореме 1 условий на G необходимо, чтобы компакт G был вполне несвязным (т. е. чтобы все компоненты связности[1] компакта G были одноточечны). Если $n = m = 1$, то этого и достаточно, если же $m > 1$ или $n > 1$, то нет.

Замечание 1. Приведем пример, показывающий, что при $m > 1$ (т. е. для случая векторнозначных функций) условие вполне несвязности компакта $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ не является достаточным для ω-устойчивости класса $\mathfrak{A}(G)$. В теореме 4 из [5] установлено, что существует дифференцируемое отображение $f : (0,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, образ $\operatorname{Im} f'$ производной которого состоит более чем из одной точки (т. е. отображение f неаффинно) и является вполне несвязным компактом в $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Положим $G = \operatorname{Im} f'$. В силу леммы 1 $\Omega(f, \mathfrak{A}(G)) = \sup\limits_{x \in (0,1)} \operatorname{dist}(f'(x), G) = 0$. Но $f \notin \mathfrak{A}(G)$, следовательно, $\omega(f, \mathfrak{A}(G)) > 0$, и класс $\mathfrak{A}(G)$ не ω-устойчив. Поэтому G не удовлетворяет условиям теоремы 1. Указанная конструкция очевидным образом распространяется для всех $m \geq 2$ и любых n.

Замечание 2. При $n > 1$ (m любое) пример вполне несвязного, но не удовлетворяющего условиям теоремы 1 компактного подмножества пространства $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ можно построить, преобразуя компакт G из предыдущего замечания. Для простоты возьмем $n = 2$ и $m = 1$ (общий случай легко сводится к этим значениям размерностей). Пусть $G \subset L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ — вполне несвязный компакт из замечания 1, не удовлетворяющий условиям теоремы 1. Обозначим через $\widetilde{G}$ образ G при естественном линейном изоморфизме между пространствами $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ и $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Так как для подмножеств пространств $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ и $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ квазивыпуклость совпадает с обычной выпуклостью (см., например, [10, п. 4.1]), а линейные изоморфизмы переводят выпуклые множества в выпуклые, то $\widetilde{G}$ также не удовлетворяет условиям теоремы 1.

Тем не менее для числовых функций имеет место

Теорема 2 ($m = 1$)**.** *Пусть G — непустой вполне несвязный компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Тогда класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив.*

[1]Под связностью или обычной связностью мы понимаем связность в смысле понятий общей топологии.

Справедливость теоремы 2 немедленно вытекает из следующего результата [6, теорема 8]: если все компоненты связности компакта $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ выпуклы, то класс отображений $\mathfrak{G} = \{g \in \mathrm{Lip} \mid \exists$ компонента связности K множества G $g'(x) \in K$ для п. в. $x \in \operatorname{dom} g\}$ является ω-устойчивым.

Если рассмотреть в теореме 1 частный случай $m = 1$, то также получим признак ω-устойчивости для вещественнозначных отображений. Из замечания 2 следует, однако, что для этого случая при $n > 1$ утверждение теоремы 1 слабее, чем утверждение теоремы 2.

Из теоремы 1 и [6, замечание 2] получаем

Следствие 1. *Пусть $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — непустое компактное множество, которое удовлетворяет хотя бы одному из следующих двух условий*:

a) *G не более чем счетно*;

b) *G вполне несвязно и лежит на какой-нибудь прямой в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.*

Тогда класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив.

Следствие 1, в частности, утверждает, что если множество $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ конечно, то класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ является ω-устойчивым. Этот факт позволяет по-новому взглянуть на так называемую проблему k-градиентов (см., например, [10, 11]), которая состоит в нахождении конечных множеств $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ таких, что если последовательность удовлетворяющих условию Липшица с единой константой отображений $f_\nu : B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ равномерно сходится к отображению $g : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$, $g(0) = 0$, причем $\operatorname{dist}(f'_\nu(\cdot), G) \to 0$ по мере при $\nu \to \infty$, то g есть сужение на шар $B(0,1)$ линейного отображения из G. Из равенства (6) вытекает, что в проблеме k-градиентов условие $\operatorname{dist}(f'_\nu(\cdot), G) \to 0$ по мере равносильно условию $\Omega(\cdot, f_\nu, \mathfrak{A}(G)) \to 0$ по мере. При нашем же подходе следствие 1 означает, что для всякого конечного компакта G если последовательность $f_\nu : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$ равномерно сходится к отображению $g : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$, $g(0) = 0$, причем

$$\Omega(f_\nu, \mathfrak{A}(G)) = \sup_{x \in B(0,1)} \Omega(x, f_\nu, \mathfrak{A}(G)) \to 0,$$

то g есть сужение на шар $B(0,1)$ линейного отображения из G.

Имеется не лишенная интереса геометро-аналитическая интерпретация условий из теоремы 1. В работах [7, 8] было введено понятие qc-связности. А именно, множество $U \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ называется *qc-связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup_{t \in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что для любого $t \in T$

(i) $U_t \neq U$;

(ii) $U_t \cap \operatorname{cl}(U \setminus U_t) = \varnothing$;

(iii) для произвольного $s \in T$, $s \neq t$, и для каждого $a \in U_t$ существует квазивыпуклый функционал $q : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ такой, что $q(a) > \sup_{b \in U_s} q(b)$.

Далее, *компонентой qc-связности* множества $U \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, содержащей точку $a \in U$, называется максимальное qc-связное подмножество множества U, содержащее a. На языке этих понятий теорема 1 допускает следующую эквивалентную переформулировку.

Теорема 1′. *Пусть $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — непустой компакт, все компоненты qc-связности которого одноточечны. Тогда класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив.*

В самом деле, в [8, теорема 4] (см. также [7, теорема 3]) показано, что компакт G допускает представление (1)–(2) с квазивыпуклыми компактными множествами G_i^α (в определениях [7, 8] это значит, что G удовлетворяет условию $(q\Upsilon)$) в том и только том случае, когда все компоненты qc-связности множества G квазивыпуклы. Отсюда с помощью соответствующих рассуждений из доказательства теоремы 4 работы [8] нетрудно вывести, что непустой компакт G удовлетворяет требованиям из теоремы 1 в том и только том случае, когда все компоненты qc-связности множества G одноточечны (другими словами, множество G «вполне не qc-связно»).

Понятие qc-связности позволяет описать геометрическое строение образов производных векторнозначных отображений. А именно, по теореме 6 из [8] (см. также [7, теорема 5]) образ $\operatorname{Im} f'$ производной дифференцируемого отображения $f \in \mathrm{Lip}$ представляет собой qc-связное множество в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (многомерный аналог теоремы Дарбу о промежуточных значениях производной вещественной функции). Теорема $1'$ настоящей статьи придает этому результату некий характер устойчивости.

Поясним последнее высказывание. В самом деле, пусть все компоненты qc-связности непустого компакта $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ одноточечны. Тогда если отображение $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо и $\operatorname{Im} f' \subset G$, то по процитированной обобщенной теореме Дарбу $f'(x) \equiv \mathrm{const}$, т. е. отображение f аффинно. Этот факт можно выразить такими словами: всякое отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$, которое допускает аппроксимацию с нулевой погрешностью в бесконечно малой окрестности каждой точки $x \in \Delta$ линейными отображениями из G, является аффинным. Устойчивость же класса $\mathfrak{A}(G)$, утверждаемая теоремой 1–$1'$, означает, что всякое отображение $f : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$, которое с достаточно большой точностью может быть аппроксимировано в бесконечно малой окрестности каждой точки $x \in B(0,1)$ отображениями из G, будет и на всем шаре $B(0,1)$ мало отличаться в C-норме от аффинного отображения с линейной частью из G (см. также комментарий к определению функционала локальной близости $\Omega(f, \mathfrak{G})$ и лемму 1).

Уместно добавить, что теореме 2 также соответствует результат из разряда обобщений теоремы Дарбу. Имеется в виду недавняя теорема Я. Мали о том, что если отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}$ области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируемо, то $\operatorname{Im} f'$ — связное множество (на самом деле теорема Я. Мали сформулирована даже для более широкой ситуации, подробности см. в [12]).

Из теоремы 1 и того факта, что всякое выпуклое множество квазивыпукло и связно, получаем

Следствие 2. *Пусть $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — непустой вполне несвязный компакт. Тогда если G допускает представление* (1)–(2) *с выпуклыми компактными множествами G_i^α, то класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив.*

Следствие 2 также непосредственно вытекает из теоремы 4 работы [6]. Его значение обусловлено тем обстоятельством, что квазивыпуклость является несравненно более трудным для проверки свойством по сравнению с выпуклостью, поэтому и условия в теореме 1–$1'$ проверить значительно труднее, нежели условия, содержащиеся в следствии 2. Впрочем, как уже было отмечено выше, если одна из размерностей n или m равна 1, то квазивыпуклость совпадает с выпуклостью, поэтому для таких ситуаций требования, накладываемые на G в теореме 1–$1'$ и в следствии 2, эквивалентны.

Легко видеть, что из следствия 2 также можно вывести и следствие 1.

Следствию 2 соответствует другая модификация понятия связности. Следуя [4, 5], множество $U \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ будем называть *слабо связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup\limits_{t \in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что $U_t \neq U$, $U_t \cap \operatorname{cl}(U \setminus U_t) = \varnothing$ для каждого $t \in T$ и $U_t \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_s = \varnothing$, если $t, s \in T$ и $t \neq s$. Здесь $\operatorname{co} E$ означает выпуклую оболочку множества E. Определение слабой связности может быть получено и из определения qc-связности, если в последнем заменить выражение «квазивыпуклый функционал q» словами «выпуклый функционал q».

Следствие 2 равносильно следующему утверждению.

Следствие 2′. *Пусть $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — непустой компакт, все компоненты слабой связности которого одноточечны. Тогда класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив.*

Действительно, по теореме 5 из [6] компакт $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ допускает представление (1)–(2) с выпуклыми компактными множествами G_i^α (в определениях [6] это значит, что G удовлетворяет условию (Υ)) тогда и только тогда, когда все компоненты слабой связности множества G выпуклы. Отсюда нетрудно вывести эквивалентность требований на G в следствиях 2 и 2′.

Чтобы проиллюстрировать отношения между описанными выше обобщениями понятия связности, приведем очевидные импликации:

$$\text{множество } U \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \text{ связно } \Rightarrow\ U\ qc\text{-связно} \Rightarrow\ U \text{ слабо связно.}$$

Первая из этих импликаций допускает обращение при $n = m = 1$, а вторая — при $n = 1$ или $m = 1$.

Замечание 3. Приведем пример, демонстрирующий, что при $m > 1$ и $n > 1$ условия в теореме 1 и следствии 2 неэквивалентны. Пусть $G \subset L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ — упомянутый в замечании 1 вполне несвязный компакт, состоящий более чем из одной точки и являющийся образом производной дифференцируемого отображения $f : (0, 1) \to \mathbb{R}^2$. По доказанному в [5, теорема 1] обобщению теоремы Дарбу G является слабо связным множеством. Рассмотрим множество $C \subset L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ сохраняющих ориентацию линейных конформных отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Известно, что пространство C линейно изоморфно $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ (поскольку оба этих пространства линейно изоморфны $\mathbb{R}^2$). Пусть $\widetilde{G}$ — образ множества G при соответствующем изоморфизме. Так как слабо связные множества при линейных преобразованиях переходят в слабо связные, то $\widetilde{G}$ является слабо связным компактом, состоящим более чем из одной точки. Поэтому $\widetilde{G}$ и не удовлетворяет требованиям следствия 2–2′. Опираясь на то обстоятельство, что все компактные подмножества C квазивыпуклы (см., например, [10, лемма 2.7]), нетрудно доказать, что для ограниченных подмножеств пространства C qc-связность совпадает с обычной связностью. Так как компакт $\widetilde{G}$ вполне несвязен, то и все компоненты qc-связности множества $\widetilde{G}$ одноточечны. Следовательно, $\widetilde{G}$ удовлетворяет условиям теоремы 1–1′.

Следующий результат дает исчерпывающий ответ на вопрос об ω-устойчивости классов аффинных отображений интервалов вещественной прямой $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

Теорема 3 **($n = 1$).** *Пусть G — непустой компакт в $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Тогда класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив в том и только том случае, если все компоненты слабой связности множества G одноточечны.*

С учетом высказанных ранее замечаний компоненты слабой связности в теореме 3 можно заменить компонентами qc-связности.

Теорема 3 немедленно следует из теорем 6, 7 и следствия 2, установленных в работе [6].

3. Обратимся теперь к изучению ω°-устойчивости. Здесь аналогом теоремы 1–1′ служит следующий результат, полученный первым автором [2, теорема 1] (см. также [3, теорема 1]).

Теорема 4. *Пусть G — непустой вполне несвязный компакт в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Тогда класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ ω°-устойчив.*

Обращаем внимание читателя на то, что в [2] вместо условия вполне несвязности компакта G использовалось равносильное ему условие равенства нулю топологической размерности G.

Необходимо отметить, что теорема 1 в [2] сформулирована не совсем точно: там утверждалась не ω°-, а ω-устойчивость класса $\mathfrak{A}(G)$ с произвольным вполне несвязным компактом G. Это утверждение из [2] неверно (см. замечание 1 настоящей статьи). Неточность исправлена в [3].

Следующая теорема содержит частичное обращение теоремы 4 и является аналогом теоремы 3.

Теорема 5. *Пусть G — непустой компакт в пространстве $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Тогда класс аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ ω°-устойчив в том и только том случае, если все компоненты связности множества G одноточечны* (*т. е. множество G вполне несвязно*).

Доказательство теоремы 5. Ввиду теоремы 4 остается доказать только необходимость. Пусть класс $\mathfrak{A}(G)$ ω°-устойчив и K — компонента связности множества G. Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим через K_ε замыкание ε-оболочки множества K. Привлекая простые геометрические рассуждения, видим, что K_ε есть локально связный континуум. По теореме Мазуркевича [13, § 50, II, теорема 2] существует непрерывное отображение $h : (-1, 1) \to L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, $\operatorname{Im} h = K_\varepsilon$. Интегрируя h, получаем, что существует непрерывно дифференцируемое отображение $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}^m$, $g(x) = \int\limits_0^x h(t)\,dt$, такое, что $\operatorname{Im} g' = \operatorname{Im} h = K_\varepsilon$. По формуле (5) имеем равенство

$$\Omega^\circ(g, \mathfrak{A}(G)) = \varepsilon. \tag{7}$$

Очевидно, отображение h можно подобрать таким образом, что C-норма разности между полученным путем интегрирования h отображением g и произвольным аффинным отображением будет больше $\operatorname{diam} K/4$. Это в силу ω°-устойчивости класса аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$, произвольности ε и (7) влечет равенство $\operatorname{diam} K = 0$, т. е. множество K состоит из одной точки. Теорема 5 доказана.

4. Данный пункт посвящен установлению оценок устойчивости с учетом близости производных в целых областях для изученных в предыдущих пунктах классов $\mathfrak{A}(G)$ аффинных отображений с вполне несвязными компактами G.

Теорема 6. *Пусть $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — непустой компакт, удовлетворяющий хотя бы одному из следующих условий*:

(a) *все компоненты qc-связности множества G одноточечны*;

(b) *$m = 1$ и множество G вполне несвязно.*

Тогда существует функция $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *такая, что*

1) $\gamma(\varepsilon) \to \gamma(0) = 0$ *при* $\varepsilon \to 0$;

2) *для каждого отображения* $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ *области* $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ *с* $\Omega(f, \mathfrak{A}(G)) < \infty$ *найдется аффинное отображение* $g \in \mathfrak{A}(G)$, *для которого выполнены неравенства*

$$\|f - g\|_{C(\Delta)} \leq \gamma(\Omega(f, \mathfrak{A}(G))) \operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} \Delta,$$
$$\|f' - g'\|_{L_\infty(\Delta)} \big(= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Delta} \|f'(x) - g'(x)\|\big) \leq \gamma(\Omega(f, \mathfrak{A}(G))). \tag{8}$$

Здесь символом $\operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} \Delta$ обозначен диаметр области Δ относительно ее внутренней метрики, т. е. точная верхняя грань по всем парам точек $x, y \in \Delta$ инфимумов длин кривых, соединяющих x, y и лежащих в Δ.

Замечание 4. В связи с теоремой 6 напомним, что согласно лемме 3 из [1] всякое отображение $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ с $\Omega(f, \mathfrak{A}(G)) < \infty$ является локально липшицевым и, следовательно, дифференцируемо почти всюду в Δ.

Доказательство теоремы 6. В силу выполнения для отображений $h \in \mathrm{Lip}(\Delta)$ соотношения $|h(x) - h(y)| \leq \|h'\|_{L_\infty(\Delta)} \operatorname{diam}_{\mathrm{inn}} \Delta$, $x, y \in \Delta$, достаточно установить только утверждение теоремы, относящееся к неравенству (8).

Пусть выполнено условие (a), но утверждение теоремы о существовании функции γ неверно. Тогда ввиду замечания 4 и равенства (6) получим, что существуют число $\varepsilon_0 > 0$, последовательность отображений $f_\nu : \Delta_\nu \to \mathbb{R}^m$ областей $\Delta_\nu \subset \mathbb{R}^n$ и пары точек $x_\nu, y_\nu \in \Delta_\nu$ такие, что

$$\sup_{x \in \operatorname{dom} f'_\nu} \operatorname{dist}(f'_\nu(x), G) \leq \Omega(f_\nu, \mathfrak{A}(G)) < \frac{1}{\nu}, \tag{9}$$

отображение f_ν дифференцируемо в x_ν, y_ν и $\|f'_\nu(x_\nu) - f'_\nu(y_\nu)\| \geq \varepsilon_0$. Выделяя, если необходимо, соответствующую подпоследовательность, мы можем предположить далее, что

$$f'_\nu(x_\nu) \to a \in G, \quad f'_\nu(y_\nu) \to b \in G, \quad a \neq b. \tag{10}$$

В силу сделанных ранее замечаний (см. комментарий к теоремам 1 и $1'$) существует представление компакта G в виде (1)–(2) с квазивыпуклыми компактными множествами G_i^α, причем выполнено условие (3). Тогда найдется индекс $\beta \in A$ такой, что

$$a \in G_k^\beta, \quad b \in G_l^\beta, \quad k \neq l. \tag{11}$$

Обозначим $\mathfrak{G}_i^\alpha = \{g \in \mathrm{Lip} \mid g'(x) \in G_i^\alpha \text{ для п. в. } x \in \operatorname{dom} g\}$. Вследствие квазивыпуклости G_i^α по теореме 1 из статьи [8] (см. также [7, теорема 1]) классы отображений $\mathfrak{G}_i^\alpha$ являются ω-устойчивыми. Из (1)–(3) следует справедливость представления

$$\mathfrak{A}(G) = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} \mathfrak{G}_i^\alpha, \quad \mathfrak{G}_i^\alpha \cap \mathfrak{A}(G) \cap \mathfrak{G}_j^\alpha = \varnothing, \ \alpha \in A, \ i \neq j, \ i, j \in \{1, \dots, k_\alpha\}.$$

Тем самым мы попадаем в ситуацию, где выполнены предположения теоремы 2 из [6]. Применяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 2 работы [6] к последовательности отображений f_ν (обсуждаемой в настоящем доказательстве) и принимая во внимание правое неравенство в (9), заключаем, что для всех номеров ν начиная с некоторого найдется индекс i_ν такой, что

$$\Omega\big(f_\nu, \mathfrak{G}_{i_\nu}^\beta\big) < \frac{1}{\nu}.$$

Так как для найденного нами индекса β число классов $\mathfrak{G}_i^\beta$ конечно, мы можем, выбрав соответствующую подпоследовательность, свести дело к случаю, когда $i_\nu \equiv \mathrm{const}$, т. е. $i_\nu = i_1$ для всех ν. Тогда по лемме 1 из [6] получим, что $\sup\limits_{x\in\operatorname{dom} f'_\nu} \operatorname{dist}\bigl(f'_\nu(x), G_{i_1}^\beta\bigr) \to 0$ при $\nu\to\infty$. Это вместе с (10) дает нам, что $a,b\in G_{i_1}^\beta$. Налицо противоречие с (11) и условием (2). Теорема 6 для случая (a) доказана.

Доказательство для случая (b) осуществляется в основном по той же схеме, что и доказательство для случая (a). Нужно только вместо представления (1)–(2) использовать разложение компакта G на классы эквивалентности G_i^ε по отношению

$$a \sim_\varepsilon b \Leftrightarrow \exists\{a_\kappa\}_{\kappa=1}^N \subset G\ a_1 = a,\ a_N = b \text{ и } \|a_\kappa - a_{\kappa+1}\| \le \varepsilon \tag{12}$$

(это же отношение эквивалентности было определено формулой (32) из [6]), и применять затем соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 8 статьи [6]. Ввиду отсутствия каких-либо трудностей в воспроизводстве деталей выкладок мы их опускаем.

Теорема 7. *Пусть $G\subset L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ — непустой вполне несвязный компакт. Тогда существует функция $\gamma:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ такая, что*

1) *$\gamma(\varepsilon)\to\gamma(0)=0$ при $\varepsilon\to 0$;*

2) *для каждого отображения $f:\Delta\to\mathbb{R}^m$ области $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ с $\Omega^\circ(f,\mathfrak{A}(G))<\infty$ найдется аффинное отображение $g\in\mathfrak{A}(G)$, для которого выполнены неравенства*

$$\begin{gathered}\|f-g\|_{C(\Delta)} \le \gamma(\Omega^\circ(f,\mathfrak{A}(G)))\operatorname{diam_{inn}}\Delta,\\ \|f'-g'\|_{L_\infty(\Delta)} \le \gamma(\Omega^\circ(f,\mathfrak{A}(G))).\end{gathered} \tag{13}$$

Доказательство. Здесь, как и в теореме 6, достаточно доказать только утверждение, относящееся к неравенству (13).

Пусть $\varepsilon>0$. Через G_i^ε, $i=1,\dots,k_\varepsilon$, обозначим классы эквивалентности по отношению (12). Тогда имеем разложение

$$\mathfrak{A}(G) = \bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon}\mathfrak{A}(G_i^\varepsilon), \tag{14}$$

причем для произвольного шара $B(x,r)\subset\mathbb{R}^n$ истинна импликация

$$\forall g_1\in\mathfrak{A}(G_i^\varepsilon)\ \forall g_2\in\mathfrak{A}(G_j^\varepsilon)\ \Bigl(r^{-1}\sup_{y\in B(x,r)}|g_1(y)-g_2(y)|\le\varepsilon \Longrightarrow i=j\Bigr). \tag{15}$$

Пусть $f:\Delta\to\mathbb{R}^m$ — отображение области $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ с $\Omega^\circ(f,\mathfrak{A}(G))<\varepsilon/4$. Существует последовательность областей Δ_ν таких, что

$$\Delta = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}}\Delta_\nu, \quad \Delta_\nu \Subset \Delta_{\nu+1}. \tag{16}$$

Для каждого ν в силу определения функционала Ω° и элементарных свойств компактных множеств найдется радиус $r_\nu>0$ такой, что для всех $x\in\Delta_\nu$

$$B(x,r_\nu)\subset\Delta \quad\text{и}\quad \omega(f|_{B(x,r_\nu)},\mathfrak{A}(G))\le\varepsilon/4.$$

Учитывая определение функционала $\omega(\cdot,\mathfrak{A}(G))$ и (14), получаем, что

$$\forall x\in\Delta_\nu\ \forall r\in(0,r_\nu]\ \exists i_\nu(x,r)\in\{1,\dots,k_\varepsilon\}\ \exists g\in\mathfrak{A}(G_{i_\nu(x,r)}^\varepsilon)\ \ r^{-1}\sup_{y\in B(x,r)}|f(y)-g(y)|\le\frac{\varepsilon}{4}. \tag{17}$$

Поскольку истинно (15), номер $i_\nu(x,r)$ определяется однозначно. Из (15) и (17) вытекает, что функция $i_\nu(\cdot,\cdot):\Delta_\nu\times(0,r_\nu]\to\mathbb{N}$ непрерывна. Поэтому вследствие связности ее области определения и дискретности множества ее значений эта функция постоянна, т. е. $i_\nu(x,r)\equiv i_\nu=\mathrm{const}$ для всех $x\in\Delta_\nu$, $r\in(0,r_\nu]$. Отсюда вновь с помощью (15) и (16) делаем вывод, что на самом деле номер i_ν не зависит от ν, т. е. $i_\nu\equiv i_1$. Это ввиду (17) означает, что $\Omega^\circ(f,\mathfrak{A}(G^\varepsilon_{i_1}))\le\varepsilon/4$. Применяя формулу (6), имеем

$$\sup_{x\in\mathrm{dom}\,f'}\mathrm{dist}(f'(x),G^\varepsilon_{i_1})\le\varepsilon/4.$$

Следовательно, для произвольного линейного отображения $a\in G^\varepsilon_{i_1}$ верна оценка

$$\sup_{x\in\mathrm{dom}\,f'}\|f'(x)-a\|\le\varepsilon/4+\mathrm{diam}\,G^\varepsilon_{i_1}\le\varepsilon/4+\sup_{i=1,\dots,k_\varepsilon}\mathrm{diam}\,G^\varepsilon_i.$$

Мера множества $\Delta\setminus\mathrm{dom}\,f'$ равна 0 (см. замечание 4). Ясно теперь, что искомую функцию γ можно задать соотношениями $\gamma(\varepsilon/8)=\varepsilon/4+\sup\limits_{i=1,\dots,k_\varepsilon}\mathrm{diam}\,G^\varepsilon_i$ для $\varepsilon>0$, $\gamma(0)=0$. Сходимость $\gamma(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$ следует из определения (12), теоремы Кантора о континуумах и вполне несвязности компакта G (см. также лемму 3 из [2]). Теорема 7 доказана.

Отметим, что из теорем 6 и 7, в частности, получаем справедливость теорем 1, 2 и 4.

5. В этом пункте установлены оценки ω-устойчивости в W^1_p-норме для классов решений эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Эти результаты используются в п. 7 для получения оценок в W^1_p-норме в целых областях для классов аффинных отображений $\mathfrak{A}(G)$ с множествами G вида (4).

Пусть D — дифференциальный оператор следующего вида:

$$(Dg)_\lambda(x)=\sum_{\mu=1}^m\sum_{\nu=1}^n\gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}(x),\quad \lambda=1,\dots,l,\tag{18}$$

где $\gamma^\nu_{\lambda\mu}\in\mathbb{R}$. Для оператора D, вектора $d\in\mathbb{R}^l$ и компакта $G\subset L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ через $\mathfrak{D}_{D,d,G}$ обозначим класс всех локально липшицевых отображений $g:\Delta\to\mathbb{R}^m$ областей $\Delta\subset\mathbb{R}^n$, являющихся для п. в. $x\in\Delta$ решениями соотношений

$$\begin{cases} Dg(x)=d, & (19)\\ g'(x)\in G. & (20)\end{cases}$$

Напомним, что система (19) называется *эллиптической*, если эллиптическим является оператор D, т. е. для всех $u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $v=(v_1,\dots,v_m)\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ выполнено неравенство $\sum\limits_{\lambda=1}^l\Bigl(\sum\limits_{\mu=1}^m\sum\limits_{\nu=1}^n\gamma^\nu_{\lambda\mu}u_\nu v_\mu\Bigr)^2>0$.

Замечание 5. В силу эффекта гипоэллиптичности локально липшицевы решения эллиптической системы (19) являются C^∞-гладкими. Таким образом, если оператор D эллиптический, то класс $\mathfrak{D}_{D,d,G}$ совпадает с классом C^∞-решений соотношений (19), (20). Кроме того, легко проверяется, что в этом случае он совпадает и с классом $\mathfrak{Z}_{D,d}(G)$ из статьи [6].

В работах [6, 14] исследовалась устойчивость классов $\mathfrak{D}_{D,d,G}$. При этом установлено, что для эллиптического оператора D класс $\mathfrak{D}_{D,d,G}$ является ω-устойчивым [6, теорема 10]. Этот результат можно получить и из теоремы 1 статьи [8], если использовать тот факт (см., например, [10, лемма 2.7]), что компактные множества линейных решений эллиптической системы (19) квазивыпуклы. Следующее утверждение дает оценки устойчивости для класса $\mathfrak{D}_{D,d,G}$ в W_p^1-норме на компактных подобластях.

Теорема 8. *Пусть D — эллиптический дифференциальный оператор вида (18), d — вектор пространства $\mathbb{R}^l$ и G — компакт пространства $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Предположим, что $\mathfrak{D}_{D,d,G} \neq \varnothing$. Тогда для любого $p \in (1, +\infty)$ существует функция $\upsilon = \upsilon_{D,d,G,p} : [0, +\infty) \times (0,1) \to [0, +\infty)$ такая, что*

1) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \upsilon(\varepsilon, \delta) = \upsilon(0, \delta) = 0$, когда $\delta \in (0,1)$;

2) если $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — отображение области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ с $\Omega(f, \mathfrak{D}_{D,d,G}) < \infty$, δ — число из интервала $(0,1)$ и Δ' — ограниченная область, лежащая в Δ вместе со своей φ-окрестностью $N_\varphi(\Delta')$, $\varphi = \frac{1-\delta}{2\delta} \operatorname{diam} \Delta'$, то найдется отображение $g : \Delta' \to \mathbb{R}^m$ класса $\mathfrak{D}_{D,d,G}$ такое, что

$$\|f - g\|_{C(\Delta')} \leq \upsilon(\Omega(f, \mathfrak{D}_{D,d,G}), \delta) \operatorname{diam} \Delta', \tag{21}$$

$$\|f' - g'\|_{L_p(\Delta')} \leq \upsilon(\Omega(f, \mathfrak{D}_{D,d,G}), \delta) (\operatorname{diam} \Delta')^{n/p}. \tag{22}$$

Замечание 6. Поскольку, как отмечено выше, класс $\mathfrak{D}_{D,d,G}$ ω-устойчив, оценка (21) в теореме 8 следует из теоремы 1 статьи [1].

Доказательство теоремы 8. Согласно замечанию 6 существует функция $\tilde{\upsilon} = \tilde{\upsilon}_{D,d,G} : [0, +\infty) \times (0,1) \to [0, +\infty)$, которая обладает свойствами искомой функции, за исключением выполнения для нее неравенства (22). Исходя из $\tilde{\upsilon}$, построим требуемую функцию υ.

Пусть $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — отображение области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, у которого величина $\varepsilon = \Omega(f, \mathfrak{D}_{D,d,G})$ конечна. Фиксируем $\delta \in (0,1)$. Рассмотрим ограниченную область Δ', для которой $N_\varphi(\Delta') \subset \Delta$, $\varphi = \frac{1-\delta}{2\delta} \operatorname{diam} \Delta'$. Пусть $\varphi' = \frac{1-\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\delta}} \operatorname{diam} \Delta'$ и $\Delta'' = N_{\varphi'}(\Delta')$. Легко проверить, что $N_{\varphi''}(\Delta'') \subset \Delta$, где $\varphi'' = \frac{1-\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\delta}} \operatorname{diam} \Delta''$.

Согласно сказанному выше существует отображение $g : \Delta'' \to \mathbb{R}^m$ класса $\mathfrak{D}_{D,d,G}$, удовлетворяющее неравенству $\|f - g\|_{C(\Delta'')} \leq \tilde{\upsilon}(\varepsilon, \sqrt{\delta}) \operatorname{diam} \Delta''$. В силу равенства $\operatorname{diam} \Delta'' = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \operatorname{diam} \Delta'$ и включения $\Delta' \subset \Delta''$ имеем

$$\|f - g\|_{C(\Delta')} \leq \|f - g\|_{C(\Delta'')} \leq \frac{\tilde{\upsilon}(\varepsilon, \sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}} \operatorname{diam} \Delta'. \tag{23}$$

Оценим величину $\|f' - g'\|_{L_p(\Delta')}$. Рассмотрим минимальное покрытие $\{B_1', B_2', \dots, B_N'\}$ области Δ' шарами радиуса $r = \frac{\varphi'}{4} = \frac{1-\sqrt{\delta}}{8\sqrt{\delta}} \operatorname{diam} \Delta'$. Ввиду минимальности покрытия и того факта, что всякое подмножество $\mathbb{R}^n$ содержится в некотором n-мерном кубе, длина ребра которого совпадает с диаметром этого множества, число N допускает такую оценку:

$$N \leq \left(1 + \frac{\sqrt{n} \operatorname{diam} \Delta'}{2r}\right)^n = \left(1 + \frac{4\sqrt{n\delta}}{1 - \sqrt{\delta}}\right)^n. \tag{24}$$

Пусть B_ν — шар радиуса $2r$, концентрический шару B_ν'. Выбор числа r обеспечивает включение $\operatorname{cl} B_\nu \subset \Delta''$, $\nu = 1, \dots, N$. В силу теоремы 3.2.2 из [15] для $x \in B_\nu$ справедливо разложение

$$f(x) - g(x) = (\Phi_\nu(f - g))(x) + (R_\nu(D(f - g)))(x),$$

где для шара B_ν интегральные операторы $\Phi_\nu = \Phi_{\partial B_\nu}$ и $R_\nu = R_{B_\nu}$ определяются формулой (3.2.6) (см. также формулу (3.2.17)) из [15]. (Указанное разложение для произвольного эллиптического оператора D является аналогом классической формулы Бореля — Помпейю

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{B} f_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\bar\zeta\wedge d\zeta}{\zeta - z}$$

для оператора Коши — Римана, см. формулу (2.1.22) из [15].) Заметим, что здесь и далее в доказательстве мы следуем обозначениям монографии [15]. Так как g является решением системы (19), определяя оператор $\overline{P}$ соотношениями (3.2.18) и (3.2.18$'$) из [15], для п. в. $x \in B_\nu$ имеем представление

$$(f-g)'(x) = (\Phi_\nu(f-g))'(x) + (\overline{P}((Df-d)|_{B_\nu}))(x), \tag{25}$$

где под $(Df-d)|_{B_\nu}$ понимается отображение пространства $\mathbb{R}^n$, которое совпадает с $Df - d$ на шаре B_ν и равно 0 на $\mathbb{R}^n \setminus B_\nu$. По лемме 3.3.1 из [15] для $x \in B_\nu$ получаем неравенство

$$\|(\Phi_\nu(f-g))'(x)\| \le c_1 \int\limits_{\partial B_\nu} \frac{|f(y)-g(y)|}{|y-x|^n}\,ds_y,$$

в котором постоянная c_1 зависит только от оператора D. В последнем интеграле ds обозначает поверхностную меру Лебега на сфере ∂B_ν. Из (23) следует, что

$$\|(\Phi_\nu(f-g))'(x)\| \le c_1\frac{\tilde{\upsilon}(\varepsilon,\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}}\operatorname{diam}\Delta'\frac{(2r)^{n-1}nv_n}{r^n} = 2^{n+2}nc_1v_n\frac{\tilde{\upsilon}(\varepsilon,\sqrt{\delta})}{1-\sqrt{\delta}},\ x \in B'_\nu, \tag{26}$$

где v_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Значит,

$$\|(\Phi_\nu(f-g))'\|_{L_p(B'_\nu)} \le 2^{n+2}nc_1v_n^{1+1/p}r^{n/p}\frac{\tilde{\upsilon}(\varepsilon,\sqrt{\delta})}{1-\sqrt{\delta}}. \tag{27}$$

По лемме 3.2.5 из [15] норма $\Upsilon_p = \Upsilon_p(D)$ линейного оператора $\overline{P} : L_p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^l) \to L_p(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$, $p > 1$, конечна: $\Upsilon_p < \infty$. Тем самым

$$\|\overline{P}((Df-d)|_{B_\nu})\|_{L_p(B'_\nu)} \le \Upsilon_p\|Df-d\|_{L_p(B_\nu)} \le 2^{n/p}\Upsilon_pv_n^{1/p}r^{n/p}\Sigma(f;D,d), \tag{28}$$

где $\Sigma(f;D,d) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Delta}|Df(x)-d|$. Пусть $C = \sup_{a\in G}\|a\|$. Тогда $\mathfrak{D}_{D,d,G} \subset \mathfrak{D}_{D,d,\operatorname{cl}B(0,C)}$ и, следовательно, $\Omega(f,\mathfrak{D}_{D,d,\operatorname{cl}B(0,C)}) \le \varepsilon$. В силу леммы 1 статьи [14] имеем $\Sigma(f;D,d) \le c_2\Omega(f,\mathfrak{D}_{D,d,\operatorname{cl}B(0,C)})$, где константа c_2 зависит только от оператора D. Из (24)–(28) следует, что

$$\|f'-g'\|_{L_p(\Delta')} \le \sum_{\nu=1}^{N}\|f'-g'\|_{L_p(B'_\nu)} \le Nv_n^{1/p}r^{n/p}\left[2^{n+2}nc_1v_n\frac{\tilde{\upsilon}(\varepsilon,\sqrt{\delta})}{1-\sqrt{\delta}} + 2^{n/p}c_2\Upsilon_p\varepsilon\right]$$

$$\le v_n^{1/p}\left(1+\frac{4\sqrt{n\delta}}{1-\sqrt{\delta}}\right)^n\left[2^{n+2}nc_1v_n\frac{\tilde{\upsilon}(\varepsilon,\sqrt{\delta})}{1-\sqrt{\delta}} + 2^{n/p}c_2\Upsilon_p\varepsilon\right]\left(\frac{1-\sqrt{\delta}}{8\sqrt{\delta}}\operatorname{diam}\Delta'\right)^{n/p}.$$

Теорема доказана.

В случае, когда G — замкнутый шар $\operatorname{cl}B(0,C)$ пространства $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, теорема 8 получена в работе [14]. Доказательство теоремы 8 есть модификация доказательства теоремы 5 статьи [14] первого автора. При этом в настоящей статье мы устранили технические недочеты доказательства указанной теоремы из [14], состоящие в неправильном выборе радиуса шаров, покрывающих область Δ', и неточном описании константы и множества точек x, для которых выполнена оценка (26) (см. соответствующую формулу статьи [14, с. 551]).

6. Этот пункт посвящен исследованию ω-устойчивости классов $\mathfrak{A}(G)$ с множествами G вида (4).

Пусть $a_\kappa \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\kappa = 1, \dots, k$. Рассмотрим канонические матричные представления $(\alpha^\kappa_{\mu\nu})_{\substack{\mu=1,\dots,m,\\ \nu=1,\dots,n}}$ линейных отображений a_κ. Для $\nu = 1, \dots, n$ построим $m \times k$-матрицу $\mathbf{a}_\nu = (\alpha^1_\nu \ \dots \ \alpha^k_\nu)$, состоящую из ν-х столбцов

$$\alpha^\kappa_\nu = \begin{pmatrix} \alpha^\kappa_{1\nu} \\ \vdots \\ \alpha^\kappa_{m\nu} \end{pmatrix} \tag{29}$$

матричных представлений a_κ, $\kappa = 1, \dots, k$. Положим

$$\mathscr{A}_\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\nu & & 0 & -\mathbf{a}_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 & \\ 0 & & \mathbf{a}_\nu & -\mathbf{a}_{\nu-1} & & & \\ & & & -\mathbf{a}_{\nu+1} & \mathbf{a}_\nu & & 0 \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -\mathbf{a}_n & 0 & & \mathbf{a}_\nu \end{pmatrix}.$$

Определим $nm \times k$-матрицу $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{a_1,\dots,a_k}$ и $n(n-1)m \times nk$-матрицу $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{a_1,\dots,a_k}$ равенствами

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} \mathscr{A}_1 \\ \vdots \\ \mathscr{A}_n \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Теорема 9. *Пусть a_κ, $\kappa = 1, \dots, k$, и b — линейные отображения из пространства $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и K — компакт в $\mathbb{R}^k$. Определим множество G соотношением* (4), *а матрицы $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{a_1,\dots,a_k}$ и $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{a_1,\dots,a_k}$ — равенствами* (30). *Если*

$$\operatorname{rank} \mathscr{A} = nk, \tag{31}$$

то класс $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив. В случае, когда

$$\operatorname{rank} \mathbf{a} = k \quad \text{и} \quad \operatorname{int} K \neq \varnothing, \tag{32}$$

выполнение равенства (31) *также и необходимо для ω-устойчивости класса $\mathfrak{A}(G)$.*

Легко проверить, что из (31) следует первое из соотношений (32). Отметим также, что выполнение соотношений (32) означает, что существует точка множества G, в окрестности которой множество G представляет собой k-мерное линейное подмногообразие пространства $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

При доказательстве теоремы 9 нами используется следующая

Лемма 2. *Если для линейных отображений $a_\kappa \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\kappa = 1, \dots, k$, выполнено равенство* (31), *то*

$$\operatorname{rank} \sum_{\kappa=1}^{k} \eta_\kappa a_\kappa > 1, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}. \tag{33}$$

Доказательство леммы легко проводится рассуждениями от противного с привлечением простейших фактов из линейной алгебры, поэтому мы его опускаем.

Замечание 7. Соотношение (33) означает, что линейное многообразие

$$L = \left\{ \sum_{\kappa=1}^{k} t_\kappa a_\kappa + b \mid t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \right\} \tag{34}$$

является множеством без rank-1 соединений. Напомним, что множество $E \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию *отсутствия* rank-1 *соединений* (см., например, [10, 16]), если $\operatorname{rank}(a-b) > 1$ для любых $a, b \in E$. Хорошо известно, что линейное многообразие L без rank-1 соединений можно задать как множество всех линейных решений некоторой эллиптической системы вида (19) (см., например, [10, п. 2.6]).

Доказательство теоремы 9. Докажем, что выполнение равенства (31) достаточно для ω-устойчивости класса $\mathfrak{A}(G)$. В силу леммы 2 линейное многообразие L, определяемое равенством (34), удовлетворяет условию отсутствия rank-1 соединений. Тогда (см. замечание 7) существуют эллиптический дифференциальный оператор D вида (18) и вектор d пространства $\mathbb{R}^l$, для которых L является множеством линейных решений системы (19). Выберем отображение $g : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{D}_{D,d,G}$. Ввиду замечания 5 g есть C^∞-гладкое отображение. Используя (33), легко показать, что C^∞-гладким является и отображение $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k) : \Delta \to \mathbb{R}^k$, определяемое соотношением $g'(x) = \sum\limits_{\kappa=1}^{k} \tau_\kappa(x) a_\kappa + b$, $x \in \Delta$. Тогда по теореме о равенстве смешанных производных имеем

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \bigl(\partial_{\nu'} \tau_\kappa(x) \alpha^\kappa_{\nu''} - \partial_{\nu''} \tau_\kappa(x) \alpha^\kappa_{\nu'}\bigr) = 0, \quad \nu', \nu'' = 1, \dots, n, \ x \in \Delta.$$

Здесь столбцы α^κ_ν определяются равенствами (29). Принимая во внимание (31), получаем, что для всех $x \in \Delta$ верны равенства $\partial_\nu \tau_\kappa(x) = 0$, $\kappa = 1, \dots, k$, $\nu = 1, \dots, n$. Тем самым отображение g аффинно. Ввиду произвольности выбора отображения g и в силу соотношения $G \subset L$ заключаем, что $\mathfrak{D}_{D,d,G} = \mathfrak{A}(G)$. Тогда ω-устойчивость класса $\mathfrak{A}(G)$ следует из теоремы 10 статьи [6].

Покажем теперь, что при выполнении соотношений (32) равенство (31) необходимо для ω-устойчивости класса $\mathfrak{A}(G)$. Предположим противное, т. е. что класс $\mathfrak{A}(G)$ ω-устойчив, но равенство (31) не выполнено. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация столбцов матрицы $\mathscr{A}$, равная нулю. Обозначим коэффициенты этой комбинации через p^ν_κ (p^ν_κ — коэффициент при $(\nu-1)k+\kappa$-м столбце). Тогда имеем соотношения

$$\sum_{\kappa=1}^{k} (p^{\nu'}_\kappa \alpha^\kappa_{\nu''} - p^{\nu''}_\kappa \alpha^\kappa_{\nu'}) = 0, \quad \nu', \nu'' = 1, \dots, n. \tag{35}$$

Ввиду (32) без ограничения общности можно считать, что $0 \in \operatorname{int} K$. Определим отображение $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ равенствами $\tau_\kappa(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} p^\nu_\kappa x_\nu$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\kappa = 1, \dots, k$. Существует окрестность нуля $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $\tau(\Delta) \subset K$. Рассмотрим отображение $F : \Delta \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $F(\cdot) = \sum\limits_{\kappa=1}^{k} \tau_\kappa(\cdot) a_\kappa + b$. Пусть $(F_{\mu\nu}(x))_{\substack{\mu=1,\dots,m,\\ \nu=1,\dots,n}}$ — каноническое матричное представление для $F(x)$. Из (35) следует, что $\partial_{\nu'} F_{\mu\nu''}(x) = \partial_{\nu''} F_{\mu\nu'}(x)$, $\nu', \nu'' = 1, \dots, n$,

$x \in \Delta$. По теореме Пуанкаре существует отображение $f : \Delta' \to \mathbb{R}^m$ окрестности нуля $\Delta' \subset \Delta$ такое, что $f'(x) = F(x)$, $x \in \Delta'$. Так как $F(\Delta') \subset G$, по лемме 1 имеем $\Omega(f, \mathfrak{A}(G)) = 0$. Используя (32) и тот факт, что не все коэффициенты p_κ^ν равны 0, легко показать, что отображение F непостоянно, а следовательно, отображение f неаффинно. Поэтому $\omega(f, \mathfrak{A}(G)) > 0$, что противоречит ω-устойчивости класса $\mathfrak{A}(G)$. Теорема 9 доказана.

Замечание 8. Нетрудно показать, что для $a_\kappa \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\kappa = 1, \dots, k$, каждое из следующих условий достаточно для выполнения равенства (31):

1) существуют числа $\nu', \nu'' \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $\operatorname{rank}(\alpha^1_{\nu'}\, \alpha^1_{\nu''}\, \dots\, \alpha^k_{\nu'}\, \alpha^k_{\nu''}) = 2k$ (здесь α^κ_ν — столбцы (29));

2) $\operatorname{rank} \sum\limits_{\kappa=1}^{k} \eta_\kappa a_\kappa > k$ для всех $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

Теорема 9 является естественным обобщением теорем 4 и 4′ из [2], в которых данный результат установлен для $k = 1$. В этом случае равенство (31), соотношение (33) и каждое из условий замечания 8 равносильны.

7. В этом пункте для классов $\mathfrak{A}(G)$ с множеством G вида (4) установлена справедливость оценок устойчивости в W^1_p-норме в областях Джона.

Пусть ρ и R — вещественные числа такие, что $0 < \rho \le R < \infty$, и пусть Δ — область в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что Δ принадлежит классу $J(\rho, R)$ (Δ есть *область типа Джона* [17], см. также [18]), если существует точка $\tilde{x} \in \Delta$ такая, что любую точку $x \in \Delta$ можно соединить с $\tilde{x}$ спрямляемой кривой $x(s)$, $0 \le s \le l$ (s — натуральный параметр), для которой $l \le R$, $x(0) = x$, $x(l) = \tilde{x}$ и $\operatorname{dist}(x(s), \partial\Delta) \ge s\rho/l$, $s \in [0, l]$. При этом $\tilde{x}$ называется *отмеченной точкой* Δ.

Теорема 10. *Пусть множество G определено соотношением* (4), *а матрица $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{a_1,\dots,a_k}$ — равенством из* (30), *в которых $a_\kappa, b \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\kappa = 1, \dots, k$, и K — компакт в $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим область Δ класса $J(\rho, R)$, $0 < \rho \le R < \infty$, с отмеченной точкой $\tilde{x}$. Предположим, что для матрицы $\mathscr{A}$ выполнено равенство* (31). *Тогда для каждого $p \in (1, +\infty)$ существуют функция $\upsilon = \upsilon_{G,p} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ и постоянная $C = C_{n,p} \ge 1$ такие, что*

1) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \upsilon(\varepsilon) = \upsilon(0) = 0$;

2) *для каждого отображения $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ с $\Omega(f, \mathfrak{A}(G)) < \infty$ найдется линейное отображение $a \in G$, для которого*

$$\|f - g\|_{C(\Delta)} \le \upsilon(\Omega(f, \mathfrak{A}(G)))R^2/\rho, \quad g(\cdot) = a(\cdot - \tilde{x}) + f(\tilde{x}),$$

$$\|f' - a\|_{L_p(\Delta)} \le \upsilon(\Omega(f, \mathfrak{A}(G)))(R/\rho)^{1+n/p} \|\ln(CR/\operatorname{dist}(\cdot, \partial\Delta))\|_{L_p(\Delta)}. \qquad (36)$$

Замечание 9. Используя лемму 4.4 из [18, гл. 3], для L_p-нормы функции $\ln(CR/\operatorname{dist}(\cdot, \partial\Delta))$ в неравенстве (36) можно получить следующую оценку:

$$\|\ln(CR/\operatorname{dist}(\cdot, \partial\Delta))\|_{L_p(\Delta)} \le \widetilde{C} R^{n/p},$$

где константа $\widetilde{C}$ зависит только от n, p и отношения R/ρ.

Как показано при доказательстве теоремы 9, если для линейных отображений a_κ, участвующих в определении множества G вида (4), выполнено равенство (31), то существуют эллиптический оператор D вида (18) и вектор d пространства $\mathbb{R}^l$ такие, что $\mathfrak{A}(G) = \mathfrak{D}_{D,d,G}$. Тогда теорема 10 вытекает из теоремы 8 и следующего утверждения.

Предложение 1. *Пусть G — компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, Δ — область класса $J(\rho, R)$, $0 < \rho \le R < \infty$, $\tilde{x}$ — ее отмеченная точка и $p \in (1, +\infty)$. Предположим, что отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет следующему условию: существуют числа $\varepsilon_\nu \ge 0$, $\nu = 0, 1$, такие, что для любого шара $B = B(x, r)$ с $B(x, 2r) \subset \Delta$ найдется линейное отображение $a_B \in G$, для которого выполнены неравенства*

$$\|f - g_B\|_{C(B)} \le \varepsilon_0 r, \quad g_B(\cdot) = a_B(\cdot - x) + f(x), \tag{37}$$

$$\|f' - a_B\|_{L_p(B)} \le \varepsilon_1 |B|^{1/p}, \tag{38}$$

где $|B| = v_n r^n$ — объем шара B. Тогда существует линейное отображение $a \in G$ такое, что

$$\|f - g\|_{C(\Delta)} \le C_0 \varepsilon_0 R^2/\rho, \quad g(\cdot) = a(\cdot - \tilde{x}) + f(\tilde{x}), \tag{39}$$

$$\|f' - a\|_{L_p(\Delta)} \le C_1 \varepsilon_1 (R/\rho)^{1+n/p} \|\ln(C_2 R/\operatorname{dist}(\cdot, \partial\Delta))\|_{L_p(\Delta)}$$

для некоторых констант $C_\nu \ge 1$, $\nu = 0, 1, 2$, зависящих только от n и p.

Доказательство предложения проводится по схеме доказательства теоремы 2.2 монографии [18, гл. 5] (см. также [19, теорема 5.1]) об устойчивости в W_p^1-норме класса изометрий со следующими изменениями. Множество G у нас будет играть роль множества ортогональных преобразований, а оценки (37), (38) займут место аналогичных оценок (2.17), (2.18) из доказательства указанной теоремы из [18]. То обстоятельство, что в [18] эти оценки рассматриваются на кубах, а не на шарах, не создает серьезных проблем при переносе соответствующих рассуждений на наш случай. Можно, например, использовать не классическое разбиение Уитни области в объединение кубов, как в [18], а аналог такого разбиения в объединение шаров (см., например, [20, гл. 1, теорема 2.3]). Это позволяет вести все рассмотрения только на шарах. Дальнейшие детали доказательства предложения 1 предоставляются читателю.

Предложение 1 дополняет предложение 1 из [2], в котором утверждается, что из выполнения оценок (37) на всех шарах $B \subset \Delta$ следует справедливость (39) с некоторым $a \in G$.

Авторы признательны профессору А. П. Копылову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копылов А. П.* Об устойчивости изометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 132–144.
2. *Егоров А. А.* Об устойчивости классов аффинных отображений // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1081–1095.
3. *Егоров А. А.* Письмо в редакцию // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1443–1444.
4. *Коробков М. В.* Об одном обобщении понятия связности и его применении в дифференциальном исчислении и в теории устойчивости классов отображений // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 5. С. 590–593.
5. *Коробков М. В.* Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 118–133.
6. *Коробков М. В.* Об устойчивости классов липшицевых отображений, порожденных компактными множествами пространства линейных отображений // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 792–810.
7. *Коробков М. В., Егоров А. А.* Устойчивость классов липшицевых отображений, теорема Дарбу и квазивыпуклые множества // Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 5. С. 583–587.
8. *Егоров А. А., Коробков М. В.* Устойчивость классов липшицевых отображений, теорема Дарбу и квазивыпуклые множества // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1046–1059.
9. *Morrey C. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1966.

10. *Müller S.* Variational models for microstructure and phase transitions. Leipzig: Max-Plank-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, 1998. (Lecture notes; N 2. http://www. mis.mpg.de/jump/publications.html).

11. *Chlebík M., Kirchheim B.* Rigidity for the four gradient problem. Leipzig, 2000. 7 p. (Preprint/ Max-Plank-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften; N 35. http://www. mis.mpg. de/jump/publications.html)

12. *Malý J.* The Darboux property for gradients // Real Anal. Exchange. 1996/97. V. 22, N 1. P. 167–173.

13. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.

14. *Егоров А. А.* Об устойчивости классов липшицевых решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 538–553.

15. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.

16. *Ball J. M.* Sets of gradients with no rank-one connections // J. Math. Pures Appl. 1990. V. 69, N 3. P. 241–259.

17. *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14, N 3. P. 391–413.

18. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. 2-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1996.

19. *Решетняк Ю. Г.* Об устойчивости изометрических преобразований // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 860–878.

20. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.

Статья поступила 1 ноября 2000 г.

Егоров Александр Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
`yegorov@math.nsc.ru`

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
`korob@math.nsc.ru`