Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 512.54

О МИНИМАЛЬНОСТИ АКТИВНОГО ФРАГМЕНТА ТАБЛИЦЫ ХАРАКТЕРОВ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

В. А. Белоногов

Аннотация: Для изучения строения конечной группы можно привлечь определенные подматрицы ее таблицы характеров, так называемые активные фрагменты группы (см. книгу автора «Представления и характеры в теории конечных групп». Свердловск: УрО АН СССР, 1990). В § 1 доказано, что если A — активный фрагмент группы G и A записан в блочной форме $A = (B|C)$ или $A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, то B (и также C) — активный фрагмент группы G, если и только если $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) + \mathrm{r}(C)$ ($\mathrm{r}(M)$ обозначает ранг матрицы M). Таким образом, разложимость активного фрагмента A на меньшие активные фрагменты зависит только от матрицы A, но не от G. В частности, никакая матрица не может быть минимальным активным фрагментом одной группы и неминимальным активным фрагментом другой. В § 2 показывается, как информация о разложимости активного фрагмента A на меньшие активные фрагменты (полученная с помощью результатов § 1) может быть использована для упрощения «централизаторного уравнения» $AXA^*A = A$, позволяющего получить информацию о порядках централизаторов элементов группы, связанных с A. Библиогр. 3.

Введение

Пусть G — конечная группа, D — ее нормальное подмножество и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Если X — таблица характеров группы G, то через $\mathrm{X}(\Phi, D)$ обозначается подматрица из X, состоящая из значений характеров из Φ на элементах из D. Матрица $\mathrm{X}(\Phi, D)$ называется *активным фрагментом* таблицы X, а также группы G, если D и Φ взаимодействуют. Говорят, что D и Φ *взаимодействуют* [1, 2], если D-срезка $\varphi|_D^0$ любого характера φ из Φ есть линейная комбинация (с комплексными коэффициентами) характеров из Φ ($\varphi|_D^0$ совпадает с φ на D и обращается в нуль на $G \setminus D$). Минимальное (по включению) непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, взаимодействующее с D, называется *D-блоком*, а минимальное непустое нормальное подмножество из G, взаимодействующее с Φ, — *Φ-блоком* группы G. (При D, равном множеству всех p'-элементов группы G, где p — простое число, понятие D-блока совпадает с классическим понятием p-блока [2]). Матрицу $\mathrm{X}(\Phi, D)$ назовем *минимальным активным фрагментом* группы G, если Φ — D-блок, а D — Φ-блок группы G.

Пусть $A = \mathrm{X}(\Phi, D)$ — непустой (т. е. с непустыми Φ и D) активный фрагмент группы G. Легко увидеть, что A не является минимальным, если и только если он может быть представлен в виде $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ (после подходящей перестановки

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00462).

строк) или в виде $(A_1|A_2)$ (после подходящей перестановки столбцов), где A_1 и A_2 — непустые активные фрагменты группы G.

В § 1 дается ответ на вопрос: может ли какая-либо матрица A быть минимальным активным фрагментом одной группы и неминимальным активным фрагментом другой? Оказалось, что это невозможно. Более того, как показывается в теоремах 1 и 2, все представления активного фрагмента A в виде объединения двух меньших активных фрагментов (как в предыдущем абзаце) могут быть получены из знания одной лишь матрицы A.

В § 2 показывается, как информация о разложимости активного фрагмента группы G (полученная с помощью результатов § 1) может быть использована для упрощения так называемого «централизаторного уравнения» $AXA^*A = A$, где $X = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n)$ с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ [2, § 8Б], позволяющего в ряде случаев вычислить порядки централизаторов элементов из D (быть может, не все) и даже $|G|$. Например, в [2, гл. 8] простые группы Судзуки $\mathrm{Sz}(q)$ (и некоторые другие) охарактеризованы довольно простым своим активным фрагментом и первый этап этой характеризации состоит в нахождении порядка группы с помощью централизаторного уравнения.

Используемые в статье обозначения стандартны (см., например, [2]). В частности, $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G, A^* — матрица, сопряженная к матрице A (комплексно сопряженная к матрице транспонированной к A), $\mathrm{r}(A)$ — ранг матрицы A, O — нулевая матрица известных из контекста размеров.

Употребляя выражение «$\mathrm{X}(\Phi, D)$ — активный фрагмент группы G», мы подразумеваем, что X — некоторая таблица характеров группы G, D — нормальное подмножество в G и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$.

Если группа обозначена буквой G, D — ее нормальное подмножество и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, то положим $D^- = G \setminus D$ и $\Phi^- = \mathrm{Irr}(G) \setminus \Phi$; $k_G(D)$ обозначает число классов сопряженных элементов группы G, содержащихся в D.

§ 1. Разложение активного фрагмента на минимальные

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{X}(\Phi, D)$ *— активный фрагмент конечной группы* G *и* $\varnothing \subset \Phi_1 \subseteq \Phi$. *Равносильны условия:*

(1) $\mathrm{X}(\Phi_1, D)$ *— активный фрагмент группы* G,

(2) $\mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D)) = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi_1, D)) + \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi \setminus \Phi_1, D))$.

Доказательство. Положим $\Phi_2 = \Phi \setminus \Phi_1$, $r = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D))$, $r_i = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi_i, D))$ для $i \in \{1, 2\}$ и $s = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi^-, D))$. Для наглядности изобразим на рис. 1 разбиение (подходящей) таблицы характеров группы G на части (клетки), фигурирующие в последующих рассуждениях; в некоторых клетках запишем ранги соответствующих им матриц.

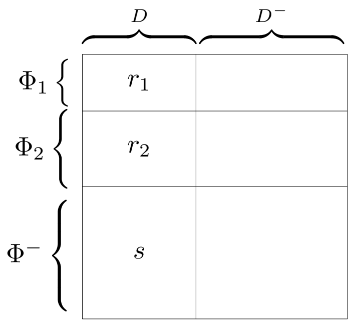

Рис. 1.

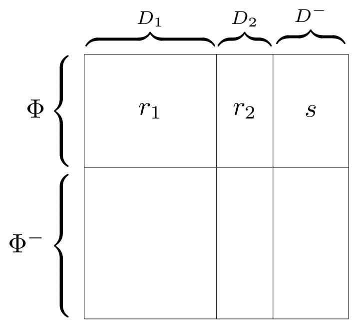

Рис. 2.

Так как $\mathrm{X}(\Phi, D)$ — активный фрагмент группы G, т. е. D взаимодействует с Φ, то по [2, теорема 3Б12 ((1)⇒(2))] никакая ненулевая линейная комбинация строк матрицы $\mathrm{X}(\Phi, D)$ не является одновременно линейной комбинацией строк матрицы $\mathrm{X}(\Phi^-, D)$. Отсюда следует, что

$$k_G(D) = r + s \tag{1.1}$$

(так как $k_G(D) = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\mathrm{Irr}(G), D))$) и также

$$\mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi_i \cup \Phi^-, D)) = r_i + s \quad \text{при} \quad i \in \{1, 2\}. \tag{1.2}$$

Предположим теперь, что выполнено условие (1). Тогда по [2, теорема 8А6 ((4)⇒(2))] и (1.2)

$$k_G(D) = r_1 + \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi_2 \cup \Phi^-, D)) = r_1 + r_2 + s.$$

Отсюда и из (1.1) следует, что $r = r_1 + r_2$, т. е. верно условие (2). Итак, из (1) вытекает (2).

Пусть выполнено условие (2). Тогда по (1.1) и (1.2)

$$k_G(D) = r + s = r_1 + r_2 + s = r_1 + \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi_2 \cup \Phi^-, D)) = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi_1, D)) + \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi_1^-, D)),$$

откуда по [2, теорема 8А6 ((2)⇒(4))] получаем, что D взаимодействует с Φ_1, т. е. верно (1). Таким образом, (2) влечет (1).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{X}(\Phi, D)$ *— активный фрагмент конечной группы* G *и* D_1 *— нормальное подмножество из* G *такое, что* $\varnothing \subset D_1 \subset D$. *Равносильны условия:*

(1) $\mathrm{X}(\Phi, D_1)$ *— активный фрагмент группы* G,

(2) $\mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D)) = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D_1)) + \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D \setminus D_1))$.

Доказательство. Положим $D_2 = D \setminus D_1$, $r = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D))$, $r_i = \mathrm{X}(\Phi, D_i))$ для $i \in \{1, 2\}$ и $s = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D^-))$. Интересующее нас здесь разбиение (подходящей) таблицы характеров группы G на части показано на рис. 2.

Так как по условию D взаимодействует с Φ, то согласно [2, теорема 3Б12 ((1)⇒(3))] никакая ненулевая линейная комбинация столбцов матрицы $\mathrm{X}(\Phi, D)$ не может быть одновременно линейной комбинацией столбцов матрицы $\mathrm{X}(\Phi, D^-)$. Отсюда следует, что

$$|\Phi| = r + s \tag{1.3}$$

и

$$\mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D_i \cup D^-)) = r_i + s \quad \text{при} \quad i \in \{1, 2\}. \tag{1.4}$$

Предположим, что выполнено условие (1). Тогда согласно [2, теорема 8А6 ((4)⇒(1))] и (1.4)

$$|\Phi| = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D_1)) + \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D_1^-)) = r_1 + r_2 + s,$$

а отсюда и из (1.3) следует (2).

Если же выполнено условие (2), т. е. $r = r_1 + r_2$, то с помощью (1.3) и (1.4) получаем

$$|\Phi| = r_1 + r_2 + s = r_1 + \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D_2 \cup D^-)) = \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D_1)) + \mathrm{r}(\mathrm{X}(\Phi, D_1^-)).$$

Отсюда по [2, теорема 8А6 ((1)⇒(4))] следует (1).

Теорема 2 доказана.

Замечание. Легко заметить, что в условиях теоремы 2 условиям (1) и (2) равносильно также условие $\Phi|_{D_1}^0 \subseteq \mathbf{C}[\Phi|_D^0]$, т. е. при подходящем упорядочении столбцов в X строки матрицы $(\mathrm{X}(\Phi, D_1)|O)$, где O — нулевая матрица тех же размеров, что и $\mathrm{X}(\Phi, D \setminus D_1)$, суть линейные комбинации строк матрицы $\mathrm{X}(\Phi, D) = (\mathrm{X}(\Phi, D_1)|\mathrm{X}(\Phi, D \setminus D_1))$. Также с помощью [2, теорема 3Г7 ((0)⇔(1))] легко проверить, что условиям (1) и (2) теоремы 1 равносильно условие: при подходящем упорядочении строк в X столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \mathrm{X}(\Phi_1, D) \\ O \end{pmatrix}$, где O — нулевая матрица тех же размеров, что и $\mathrm{X}(\Phi \setminus \Phi_1, D)$, являются линейными комбинациями столбцов матрицы $\mathrm{X}(\Phi, D) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}(\Phi_1, D) \\ \mathrm{X}(\Phi \setminus \Phi_1, D) \end{pmatrix}$.

§ 2. Упрощение централизаторного уравнения

Имеется большое число работ, посвященных характеризациям конечных групп их таблицами характеров (см. [3, § 1.5]). В [2, гл. 8] некоторые конечные простые группы (в частности, группы Судзуки) охарактеризованы определенными их активными фрагментами, составляющими лишь малую часть полной таблицы характеров. Важным этапом такой характеризации является определение порядков централизаторов элементов из D и порядка группы.

Пусть $A = \mathrm{X}(\Phi, D)$ — активный фрагмент группы G. Как показано в [2, § 8Б], уравнение

$$AXA^*A = A, \quad \text{где} \quad X = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n), \tag{2.1}$$

представляющее собой матричную форму системы линейных уравнений с неизвестными $x_1, \dots, x_n$, имеет решение

$$x_1 = \frac{1}{|C_G(d_1)|}, \dots, \ x_n = \frac{1}{|C_G(d_n)|},$$

где $d_1, \dots, d_n$ — представители всех классов сопряженных элементов группы G, содержащихся в D (n — число таких классов, $\mathrm{X}\big(\Phi, d_i^G\big)$ — i-й столбец в A).

В следующих предложениях 1 и 2 показывается, как информация о разложимости A на меньшие активные фрагменты (полученная с помощью теорем 1 и 2) может быть использована для упрощения *«централизаторного уравнения»* (2.1).

Предложение 1. *Пусть D — нормальное подмножество конечной группы G и $\varnothing \subset \Phi_1 \subset \Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Положим $A = \mathrm{X}(\Phi, D)$, $A_1 = \mathrm{X}(\Phi_1, D)$ и $A_2 = \mathrm{X}(\Phi \backslash \Phi_1, D)$. Предположим, что A и A_1 — активные фрагменты группы G. Тогда уравнение*

$$AXA^*A = A, \tag{2.2}$$

где $X = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_t)$, $t = k_G(D)$, равносильно системе уравнений

$$A_1XA_1^*A_1 = A_1, \quad A_2XA_2^*A_2 = A_2, \quad A_1XA_2^* = O. \tag{2.3}$$

Доказательство. Если в уравнении (2.2) матрицу A заменить матрицей, полученной из A перестановкой строк (или перестановкой столбцов), то получится уравнение, эквивалентное уравнению (2.2). Это следует из того, что (2.2) эквивалентно системе уравнений

$$\sum_{m=1}^{t} A_{im}\left(\sum_{n=1}^{|\Phi|} \overline{A_{nm}}A_{nj}\right)x_m = A_{ij} \quad (i = 1, \dots, |\Phi|;\ j = 1, \dots, t).$$

Поэтому мы можем считать, что $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$. Но теперь видно, что уравнение (2.2) равносильно системе

$$A_1X(A_1^*A_1 + A_2^*A_2) = A_1, \quad A_2X(A_1^*A_1 + A_2^*A_2) = A_2. \tag{2.4}$$

Пусть

$$T = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{|C_G(d_1)|}, \dots, \frac{1}{|C_G(d_t)|}\right),$$

где d_i — элемент из D такой, что $\mathrm{X}\big(\Phi, d_i^G\big)$ есть i-й столбец в A. Так как A_1 — активный фрагмент группы G, то по [2, теорема 3Б1 ((1)⇒(4) и (1)⇒(2))]

$$A_1TA_1^*A_1 = A_1 \quad \text{и} \quad A_2TA_1^* = O. \tag{2.5}$$

Умножив первое равенство в (2.4) справа на $TA_1^*A_1$, получим

$$A_1X(A_1^*A_1TA_1^*A_1 + A_2^*A_2TA_1^*A_1) = A_1TA_1^*A_1.$$

Отсюда и из (2.5) выводится первое равенство системы (2.3).

Поскольку по [2, 3Б4] A_2 также активный фрагмент группы G, то (подобно предыдущему) из системы (2.4) выводится второе уравнение системы (2.3). Кроме того, из активности A_2 следует (по [2, 3Б1]), что $A_2TA_2^*A_2 = A_2$ и, значит,

$$A_2^*A_2TA_2^* = A_2^*. \tag{2.6}$$

Из первых уравнений систем (2.3) и (2.4) выводим уравнение

$$A_1XA_2^*A_2 = O.$$

Умножив обе части его на TA_2^* и применив (2.6), получим третье уравнение системы (2.3).

Итак, из уравнения (2.2) выводится система (2.3). Обратно, из системы (2.3) выводятся, очевидно, система (2.4), а следовательно, и уравнение (2.2).

Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Пусть D и D_1 — нормальные подмножества конечной группы G такие, что $\varnothing \subset D_1 \subset D$, и пусть $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, $A = \mathrm{X}(\Phi, D)$, $A_1 = \mathrm{X}(\Phi, D_1)$, $A_2 = \mathrm{X}(\Phi, D \setminus D_2)$. Предположим, что A и A_1 — активные фрагменты группы G. Тогда уравнение*

$$A \begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} A^* A = A, \tag{2.7}$$

где $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_t)$, $t = k_G(D_1)$, и $Y = \mathrm{diag}(y_1, \ldots, y_s)$, $s = k_G(D \setminus D_1)$, равносильно системе уравнений

$$A_1 X A_1^* A_1 = A_1, \quad A_2 Y A_2^* A_2 = A_2. \tag{2.8}$$

Доказательство. Без ограничения общности (см. начало доказательства предложения 1) можно считать, что $A = (A_1|A_2)$. Поэтому уравнение (2.7) можно переписать в виде

$$(A_1 X | A_2 Y) \begin{pmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{pmatrix} (A_1|A_2) = (A_1|A_2),$$

что равносильно системе

$$(A_1 X A_1^* + A_2 Y A_2^*) A_1 = A_1, \quad (A_1 X A_1^* + A_2 Y A_2^*) A_2 = A_2. \tag{2.9}$$

Так как по условию D_1 взаимодействует с Φ, то по [2, теорема 3Б1 ((1)⇒(3))] $A_2^* A_1 = O$ и, следовательно, $A_1^* A_2 = O$. Но эти равенства влекут равносильность систем уравнений (2.9) и (2.8).

Предложение 2 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоногов В. А.* D-блоки характеров конечной группы // Исследования по теории групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1984. С. 3–31.
2. *Белоногов В. А.* Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990.
3. *Кострикин А. И., Чубаров И. А.* Представления конечных групп // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 23. С. 119–195. (Итоги науки и техники).

Статья поступила 28 февраля 2000 г.

Белоногов Вячеслав Александрович
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
belonogov@imm.uran.ru