Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Г. В. Алексеев

Аннотация: Рассматриваются обратные экстремальные задачи для стационарной системы уравнений тепломассопереноса, описывающих распространение вещества в вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в ограниченной области с липшицевой границей. Указанные задачи заключаются в нахождении неизвестных параметров среды либо плотностей источников по определенной информации о решении. Исследована разрешимость прямой краевой и обратной экстремальной задач, обосновано применение принципа Лагранжа, выведены и проанализированы системы оптимальности, установлены достаточные условия единственности решений. Библиогр. 22.

§ 1. Введение. Постановка прямой краевой задачи

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N либо Γ_D^c и Γ_N^c. Рассмотрим в Ω краевую задачу

$$-\nu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u}+\mathrm{grad}\,p = \mathbf{f}+(\beta_C C-\beta_T T)\mathbf{G} \text{ в } \Omega, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \tag{1.1}$$

$$-\lambda\Delta T + \mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,T = f \text{ в } \Omega, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T\right) = \chi \text{ на } \Gamma_N, \tag{1.2}$$

$$-\lambda_c\Delta C + \mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,C - w_0\frac{\partial C}{\partial z} + kC = f_c \text{ в } \Omega, \quad C = 0 \text{ на } \Gamma_D^c, \quad \lambda_c\frac{\partial C}{\partial n} = \chi_c \text{ на } \Gamma_N^c, \tag{1.3}$$

описывающую перенос вещества в вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости. Здесь используются обычные обозначения (см., например, [1–3]). В частности, $\mathbf{u}$, p, T и C — скорость, давление, температура и концентрация вещества (субстанции) в жидкости — искомые функции, $\nu = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $\lambda = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент температуропроводности, $\lambda_c = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент диффузии, $\mathbf{f}$ — объемная плотность внешних сил, f — объемная плотность источников тепла, f_c — объемная плотность источников вещества, $w_0 = \mathrm{const} \geq 0$ — величина вертикальной скорости осаждения вещества, $\mathbf{G} = -(0, 0, G)$ — вектор ускорения свободного падения, β_T, β_C, $\mathbf{g}$, ψ, α, χ и χ_c — некоторые функции. Ниже на задачу (1.1), (1.3) при заданных функциях $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, β_T, β_C, f, ψ, α, χ, k, f_c и χ_c будем ссылаться как на задачу 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00214).

Целью настоящей работы является исследование разрешимости обратных экстремальных задач для модели (1.1)–(1.3). Интерес к указанным задачам вызывается тем обстоятельством, что задача (1.1)–(1.3) содержит ряд параметров, в том числе и функциональных, часть которых могут быть неизвестными. Так, например, в прикладных задачах распространения примеси в жидкости может возникнуть ситуация, когда источники примеси неизвестны либо скрываются, а требуется их восстановить по определенной информации о создаваемом ими поле концентраций. Соответствующие задачи относятся к классу обратных задач обнаружения источников. Другой класс обратных задач, а именно класс обратных задач идентификации параметров среды, возникает в случае, когда неизвестными величинами являются, наряду с решением, некоторые характеристики среды, например коэффициенты k в (1.3) и α в (1.2), и их требуется восстановить по определенной информации о решении. Наконец, важную роль в приложениях играют задачи управления для уравнений гидродинамики и тепломассопереноса. Эти задачи заключаются в достижении определенных целей за счет действия граничных либо распределенных управлений. К типичным целям относятся уменьшение силы сопротивления в жидкости, избежание высоких температур на определенных участках границы либо области, уменьшение градиентов температур либо концентраций и др. Возможные управления реализуются путем впрыскивания жидкости на определенных участках границы, а также путем нагревания или охлаждения некоторых ее частей.

В случае, когда $\beta_C = 0$, задача (1.1)–(1.3) распадается на две: задачу (1.1), (1.2) для уравнений тепловой конвекции в приближении Обербека — Буссинеска и линейную (при заданном $\mathbf{u}$) краевую задачу (1.3), описывающую распространение пассивной субстанции. Экстремальные задачи для системы (1.1), (1.2) изучались рядом авторов (см., например, [4–10]). Ряд работ посвящен исследованию экстремальных задач для системы (1.3) (при заданном $\mathbf{u}$). Упомянем, в частности, работы [2, 3], в которых рассматриваются экстремальные задачи для нестационарного аналога задачи (1.3), возникающие в задачах охраны окружающей среды, и [11], где изучаются обратные задачи обнаружения источников субстанции. Отметим также работы [12–14], в которых рассматривались экстремальные либо обратные задачи для системы массопереноса (1.1), (1.3) при $\beta_T = 0$. Что касается полной системы (1.1)–(1.3), то автору фактически не известны работы, посвященные строгому исследованию как прямых, так и обратных экстремальных задач для указанной системы. Хотя в последнее время возник определенный интерес к изучению полной системы уравнений тепломассопереноса, описывающей так называемые двойные диффузионные течения (double diffusive flows по терминологии зарубежных авторов [15, 16]).

Особенностью предлагаемого ниже метода исследования рассматриваемых обратных задач является то, что все три возможных типа обратных задач формулируются в виде единой обратной экстремальной задачи. Это достигается путем введения соответствующего функционала качества, который далее минимизируется на слабых решениях задачи (1.1)–(1.3). Использование этого подхода позволит сравнительно просто исследовать разрешимость рассматриваемых задач, вывести системы оптимальности для ряда функционалов качества, а с помощью анализа последних установить достаточные условия, обеспечивающие единственность решений конкретных обратных экстремальных задач.

Ниже будем широко использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, и $L^r(D)$, $1 \le r \le \infty$, где D представляет собой либо область Ω, либо границу

Γ, либо ее некоторую часть Γ_0 с положительной мерой. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{H}^s(D)$ и $\mathbf{L}^r(D)$. Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$, скалярные произведения в $L^2(\Gamma)$ либо в $L^2(\Gamma_0)$ — через $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ либо $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_0}$, норму в $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma_0)$, через $\|\cdot\|$ либо $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$, норму либо полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ — через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$, норму в $H^{1/2}(\Gamma)$ — через $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$, соотношение двойственности для пары X и X^* — через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ или $\langle\cdot,\cdot\rangle$ там, где это не приведет к путанице.

Пусть выполняются условия:

(i) Ω — ограниченная конечно-связная область в пространстве $\mathbb{R}^d$ с границей $\Gamma\in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(i)}$, $i=1,2,\dots,N$;

(ii) открытые участки Γ_D и Γ_N границы Γ удовлетворяют условиям $\Gamma_D\in C^{0,1}$, $\Gamma_D\neq\varnothing$, $\Gamma_N\in C^{0,1}$, $\Gamma_D\cap\Gamma_N=\varnothing$, $\Gamma=\overline{\Gamma}_D\cup\overline{\Gamma}_N$; открытые участки Γ_D^c и Γ_N^c границы Γ — условиям $\Gamma_D^c\in C^{0,1}$, $\Gamma_D^c\neq\varnothing$, $\Gamma_N^c\in C^{0,1}$, $\Gamma_D^c\cap\Gamma_N^c=\varnothing$, $\Gamma=\overline{\Gamma_D^c}\cup\overline{\Gamma_N^c}$.

Хорошо известно, что при выполнении условий (i), (ii) существуют линейные непрерывные операторы следа $\gamma:\mathbf{H}^1(\Omega)\to\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma|_{\Gamma_0}:H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma_0)$, где Γ_0 — один из участков $\Gamma_D,\Gamma_N,\Gamma_D^c$ и Γ_N^c. Положим $H^{1/2}(\Gamma,\Gamma\backslash\Gamma_0)=\{\varphi\in H^{1/2}(\Gamma):\varphi|_{\Gamma\backslash\Gamma_0}=0\}$, $H_0^{1/2}(\Gamma_0)=\{\varphi|_{\Gamma_0}:\varphi\in H^{1/2}(\Gamma,\Gamma\setminus\Gamma_0)\}$. Введем сопряженные пространства $H^{-1/2}(\Gamma)=(H^{1/2}(\Gamma))^*$ и $H^{-1/2}(\Gamma_0)=(H_0^{1/2}(\Gamma_0))^*$. Главную роль при исследовании рассматриваемых задач будут играть пространства $\mathbf{V}=\{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega):\operatorname{div}\mathbf{v}=0\}$, $L_0^2(\Omega)=\{p\in L^2(\Omega):(p,1)=0\}$, $\mathbf{Z}=\{\mathbf{v}\in\mathbf{L}^4(\Omega):\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0 \text{ на } \Gamma_N\cup\Gamma_N^c\}$, $\mathscr{T}=H^1(\Omega,\Gamma_D)\equiv\{S\in H^1(\Omega):S|_{\Gamma_D}=0\}$, $\mathscr{C}=H^1(\Omega,\Gamma_D^c)$. Пространство $\mathbf{V}$ гильбертово с нормой $\mathbf{v}\to\|\mathbf{v}\|_1$, пространство $\mathbf{Z}$ банахово с нормой $\mathbf{v}\to\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}$; пространства $\mathscr{T}$ и $\mathscr{C}$ гильбертовы с нормой $\|\cdot\|_1$, эквивалентной полунорме $|\cdot|_1$ в силу неравенства Фридрихса — Пуанкаре $\|T\|_1\le c_P|T|_1\ \forall T\in\mathscr{T}$ (либо $C\in\mathscr{C}$), $c_P=\mathrm{const}$. Ясно, что $\gamma\mathscr{T}=H^{1/2}(\Gamma,\Gamma_D)$, $\gamma\mathscr{C}=H^{1/2}(\Gamma,\Gamma_D^c)$, $\gamma|_{\Gamma_N}\mathscr{T}\subset L^2(\Gamma_N)$, $\gamma|_{\Gamma_N^c}\mathscr{C}\subset L^2(\Gamma_N^c)$ и с некоторой константой c_Γ справедливы оценки

$$\|\mathbf{f}|_\mathbf{V}\|_{\mathbf{V}^*}\le\|\mathbf{f}\|_{-1}\ \forall\mathbf{f}\in\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\quad \|T\|_{\Gamma_N}\le c_\Gamma\|T\|_1\ \forall T\in\mathscr{T},\\ \|C\|_{\Gamma_N^c}\le c_\Gamma\|C\|_1\ \forall C\in\mathscr{C}. \tag{1.4}$$

Введем билинейные и трилинейные формы для скорости и давления: $a:\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, $b:\mathbf{H}^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)\to\mathbb{R}$, $c:\mathbf{L}^4(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ по формулам

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}\,d\Omega,\ b(\mathbf{v},q)=-\int_\Omega q\operatorname{div}\mathbf{v}\,d\Omega,\ c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=\int_\Omega[(\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{v}]\cdot\mathbf{w}\,d\Omega,$$

и формы $\tilde a:H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, $b_i:H^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, $i=1,2$, $\tilde c:\mathbf{L}^4(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ для T, C и $\mathbf{u}$, определяемые соотношениями

$$\tilde a(T,S)=\int_\Omega\nabla T\cdot\nabla S\,d\Omega,\quad b_i(S,\mathbf{v})=\int_\Omega\mathbf{b}_iS\cdot\mathbf{v}\,d\Omega,\quad i=1,2,$$

$$\tilde c(\mathbf{u},T,S)=\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}T)\,d\Omega,$$

где $\mathbf{b}_1=\beta_T\mathbf{G}$, $\mathbf{b}_2=\beta_C\mathbf{G}$. Известно (см. [7,17]), что указанные формы непрерывны, причем

$$c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=-c(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}),\quad c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v})=0\,\forall\mathbf{u}\in\mathbf{Z},\quad \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{H}^1(\Omega),\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0 \text{ на } \Gamma, \tag{1.5}$$

$$\tilde{c}(\mathbf{w}, T, S) = -\tilde{c}(\mathbf{w}, S, T), \quad \tilde{c}(\mathbf{w}, S, S) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{Z}, \tag{1.6}$$
$$T \in H^1(\Omega), \quad S \in \mathscr{T} \text{ (либо } S \in \mathscr{C}),$$

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq c_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1, \quad \tilde{c}(\mathbf{u}, S, T) \leq c_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|S\|_1 \|T\|_{L^4(\Omega)}. \tag{1.7}$$

Здесь c_0 — некоторая константа. Формы a и $\tilde{a}$ к тому же коэрцитивны на $\mathbf{V}$ и $\mathscr{T}$ (либо $\mathscr{C}$) соответственно, так что с некоторыми константами $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_1 > 0$ имеем

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha_0 \|\mathbf{v}\|_1^2 \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \tilde{a}(S, S) \geq \alpha_1 \|S\|_1^2 \ \forall S \in \mathscr{T}, \quad \tilde{a}(h, h) \geq \alpha_1 \|h\|_1^2 \ \forall h \in \mathscr{C}. \tag{1.8}$$

§ 2. Разрешимость задачи 1

Положим $L^\infty_+(\Gamma_N) = \{\alpha \in L^\infty(\Gamma_N) : \alpha \geq 0 \text{ на } \Gamma_N\}$, $L^2_+(\Omega) = \{k \in L^2(\Omega) : k \geq 0 \text{ в } \Omega\}$,

$$\beta_1 = \sup_{\substack{T \in H^1(\Omega),\\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}}} \frac{|b_1(T, \mathbf{v})|}{\|T\|_1 \|\mathbf{v}\|_1}, \quad \beta_2 = \sup_{\substack{C \in \mathscr{C},\\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}}} \frac{|b_2(C, \mathbf{v})|}{\|C\|_1 \|\mathbf{v}\|_1}, \quad k_1 = \sup_{\substack{C \in \mathscr{C},\\ h \in \mathscr{C}}} \frac{|(kC, h)|}{\|C\|_1 \|h\|_1}, \tag{2.1}$$

$$\mathscr{N} = \sup_{\substack{\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),\\ \mathbf{w} \in \mathbf{V}}} \frac{|c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|}{\|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1}, \quad \mathscr{N}_1 = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega),\\ T \in H^1(\Omega), S \in \mathscr{T}}} \frac{|c_1(\mathbf{u}, T, S)|}{\|\mathbf{u}\|_1 \|T\|_1 \|S\|_1},$$
$$\mathscr{N}_2 = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in H^1(\Omega),\\ C \in \mathscr{C}, h \in \mathscr{C}}} \frac{|c_1(\mathbf{u}, C, h)|}{\|\mathbf{u}\|_1 \|C\|_1 \|h\|_1},$$

где $c_1 = \tilde{c}|_{\mathbf{Z} \times H^1(\Omega) \times \mathscr{T}}$, $c_2 = \tilde{c}|_{\mathbf{Z} \times \mathscr{C} \times \mathscr{C}}$. Пусть выполняются условия

(iii) $\mathbf{b}_i \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, $0 < \beta_1 < \infty$, $0 \leq \beta_2 < \infty$, $\lambda_* \equiv \lambda_c \alpha_1 - w_0 > 0$;

(iv) $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $f \in \mathscr{T}^*$, $\chi_c \in L^2(\Gamma^c_N)$;

(v) $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$, $\alpha \in L^\infty_+(\Gamma_N)$, $f_c \in \mathscr{C}^*$, $k \in L^2_+(\Omega)$;

(vi) $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\int\limits_{\Gamma^{(i)}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$;

(vii) $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ на $\Gamma_N \cup \Gamma^c_N$.

Введем билинейные формы $a_1 : H^1(\Omega) \times \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ и $a_2 : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ по формулам

$$a_1(T, S) = \lambda \tilde{a}(T, S) + \lambda(\alpha T, S)_{\Gamma_N}, \quad a_2(C, h) = \lambda_c \tilde{a}(C, h) - w_0 \left(\frac{\partial C}{\partial z}, h \right) + (kC, h). \tag{2.2}$$

Умножим первое уравнение в (1.1) на функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, второе — на функцию $q \in L^2_0(\Omega)$, уравнение в (1.2) — на функцию $S \in \mathscr{T}$, а уравнение в (1.3) — на функцию $h \in \mathscr{C}$, проинтегрируем по Ω и воспользуемся граничными условиями в (1.1)–(1.3). В результате получим слабую формулировку задачи 1. Она заключается в нахождении таких функций $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $p \in L^2_0(\Omega)$, $T \in H^1(\Omega)$, $C \in \mathscr{C}$, что

$$\nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - b_1(T, \mathbf{v}) + b_2(C, \mathbf{v}) \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), \tag{2.3}$$

$$a_1(T, S) + c_1(\mathbf{u}, T, S) = \langle \bar{f}, S \rangle \equiv \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} \ \forall S \in \mathscr{T}, \tag{2.4}$$

$$a_2(C, h) + c_2(\mathbf{u}, C, h) = \langle \bar{f}_c, h \rangle \equiv \langle f_c, h \rangle + (\chi_c, h)_{\Gamma^c_N} \ \forall h \in \mathscr{C}, \tag{2.5}$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \ \forall q \in L^2_0(\Omega), \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D. \tag{2.6}$$

Рассуждая, как в [7], можно показать, что задача нахождения четверки функций $(\mathbf{u}, p, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathscr{C}$ из условий (2.3)–(2.6) эквивалентна задаче нахождения тройки $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathscr{C}$ из (2.4)–(2.6) и тождества

$$\nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - b_1(T, \mathbf{v}) + b_2(C, \mathbf{v}) \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{2.7}$$

Поэтому для доказательства разрешимости задачи 1 достаточно доказать разрешимость задачи (2.4)–(2.7). Последнее основывается на следующих результатах из [9, 13].

Предложение 2.1. *При выполнении условия* (i) *для функции* $\mathbf{g}$, *удовлетворяющей условиям* (vi), *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая вектор-функция* $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, *что*

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_\Gamma = \mathbf{g}, \quad \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_1 \le c_\varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \\ |c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v})| \le \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} \|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь постоянная c_ε *зависит от* ε *и, быть может, от* Ω *и* d.

Предложение 2.2. *Пусть выполняются условия* (i), (ii). *Тогда существует семейство непрерывных неубывающих функций* $M_\delta : \mathbb{R}_+ \equiv (0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ *с* $M_\delta(0) = 0$, $\delta \in (0, 1]$, *зависящих от параметра* $\delta > 0$ *так же, как от* Ω *и* Γ_D, *такое, что для любой не равной тождественно нулю функции* $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ *найдется такая функция* $T_\delta \in H^1(\Omega)$, *что*

$$\gamma|_{\Gamma_D} T_\delta = \psi, \quad \|T_\delta\|_{L^4(\Omega)} \le \delta, \quad \|T_\delta\|_1 \le M_\delta(\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}). \tag{2.9}$$

Замечание 2.1. Отметим, что предложение 2.1 является усиленным аналогом для липшицевой области известной леммы Хопфа. Усиление заключается в том, что в правую часть неравенства для $|c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v})|$ в (2.8) входит $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$. Ниже это будет играть основополагающую роль при выводе оценок для решения, непрерывно зависящих от $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$. Насколько известно автору, аналогичное неравенство установлено в [17] лишь в случае, когда $\Gamma \in C^2$. В [18] аналогичный результат получен в случае, когда $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

Выбрав ε из условия $\varepsilon = \varepsilon_0 \le \alpha_0 \nu / (2\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}) \Rightarrow |c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v})| \le (\alpha_0 \nu/2) \|\mathbf{v}\|_1^2$ $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, будем искать решение $(\mathbf{u}, T, C)$ задачи (2.4)–(2.7) в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$, $T = T_\delta + \tau$, C, где $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}_{\varepsilon_0}$, а $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ и $\tau \in \mathscr{T}$ — новые неизвестные функции. Подставляя эти соотношения в (2.4)–(2.7), приходим к следующим тождествам для нахождения тройки $(\mathbf{w}, \tau, C) \in \mathbf{V} \times \mathscr{T} \times \mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} \nu a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ = \langle \overline{\mathbf{f}}, \mathbf{v} \rangle - b_1(T_\delta + \tau, \mathbf{v}) + b_2(C, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$a_1(\tau, S) + c_1(\mathbf{u}_0, \tau, S) + c_1(\mathbf{w}, \tau, S) = \langle \bar{f}_\delta, S \rangle - c_1(\mathbf{w}, T_\delta, S) \quad \forall S \in \mathscr{T}, \tag{2.11}$$

$$a_2(C, h) + c_2(\mathbf{u}_0, C, h) + c_2(\mathbf{w}, C, h) = \langle \bar{f}_c, h \rangle \quad \forall h \in \mathscr{C}, \tag{2.12}$$

где $\langle \overline{\mathbf{f}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \nu a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - c(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v})$, $\langle \bar{f}_\delta, S \rangle = \langle \overline{f}, S \rangle - a_1(T_\delta, S) - c_1(\mathbf{u}_0, T_\delta, S)$. Ясно, что $\overline{\mathbf{f}} \in \mathbf{V}^*$, $\bar{f}_\delta \in \mathscr{T}^*$, $\bar{f}_c \in \mathscr{C}^*$, причем в силу (1.4), (1.6), (1.7), (2.8), (2.9)

$$\|\overline{\mathbf{f}}\|_{\mathbf{V}^*} \le \|\mathbf{f}\|_{-1} + M_{\mathbf{g}}, \quad M_{\mathbf{g}} \equiv \nu c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} + \mathscr{N}(c_{\varepsilon_0})^2 \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}^2, \tag{2.13}$$

$$|\langle \bar{f}_\delta, S \rangle| \le [\|f\|_{\mathscr{T}^*} + c_\Gamma \|\chi\|_{\Gamma_N} + \big(\lambda + \lambda c_\Gamma^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_N)} + \mathscr{N}_1 \|\mathbf{u}_0\|_1\big) \|T_\delta\|_1] \|S\|_1, \tag{2.14}$$

$$|c_1(\mathbf{w},T_\delta,S)|=|c_1(\mathbf{w},S,T_\delta)|\le c_0\delta\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|S\|_1,\quad \|\bar f_c\|_{\mathscr{C}^*}\le\|f_c\|_{\mathscr{C}^*}+c_\Gamma\|\chi_c\|_{\Gamma_N^c}. \tag{2.15}$$

Для доказательства существования решения задачи (2.10)–(2.12) введем отображение $F:\mathbf{Z}\to\mathbf{V}$, действующее по формуле $F(\mathbf{w})=\mathbf{z}$. Здесь $\mathbf{z}\in\mathbf{V}$ является решением задачи

$$\nu a(\mathbf{z},\mathbf{v})+c(\mathbf{u}_0,\mathbf{z},\mathbf{v})+c(\mathbf{z},\mathbf{u}_0,\mathbf{v})+c(\mathbf{w},\mathbf{z},\mathbf{v})=\langle\bar{\mathbf{f}},\mathbf{v}\rangle-b_1(T_\delta+\tau,\mathbf{v})+b_2(C,\mathbf{v})\;\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}, \tag{2.16}$$

где $(\tau,C)\equiv(\tau_{\mathbf{w}},C_{\mathbf{w}})\in\mathscr{T}\times\mathscr{C}$ — решение задачи (2.11), (2.12). Легко видеть, что отображение F определено корректно. Действительно, используя (2.1), (2.2), (1.6), (1.8) и формулу Гаусса — Остроградского, имеем с учетом условий (iii) и (vii), что для любых $C,h\in\mathscr{C}$

$$|a_2(C,h)|\le(\lambda_c+w_0+k_1)\|C\|_1\|h\|_1,\quad a_2(C,C)\ge(\lambda_c\alpha_1-w_0)\|C\|_1^2=\lambda_*\|C\|_1^2,$$

$$c_2(\mathbf{u}_0,h,h)=\frac12\int\limits_{\Gamma_N^c}(\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})h^2\,d\Gamma\ge0,\quad c_2(\mathbf{w},h,h)=0\quad\forall\mathbf{w}\in\mathbf{Z},\ h\in\mathscr{C}.$$

Отсюда следует, что билинейная форма, стоящая в левой части (2.12), непрерывна и коэрцитивна на $\mathscr{C}$ с константой $\lambda_*>0$. В таком случае из теоремы Лакса — Мильграма вытекает, что для любого вектора $\mathbf{w}\in\mathbf{Z}$ решение $C=C_{\mathbf{w}}\in\mathscr{C}$ задачи (2.12) существует, единственно и для него справедлива оценка $\|C\|_1\le M_C\equiv\lambda_*^{-1}(\|f_c\|_{\mathscr{C}^*}+c_\Gamma\|\chi_c\|_{\Gamma_N^c})$.

Точно так же показывается, что билинейная форма в левой части (2.11) непрерывна и коэрцитивна на $\mathscr{T}$ с константой $\alpha_1\lambda$. Поэтому решение $\tau\in\mathscr{T}$ задачи (2.12) существует и единственно, причем для функции $T=T_\delta+\tau$ выполняется оценка

$$\|T\|_1\le M_T'+M_{\psi,\delta}+\frac{c_0\delta}{\alpha_1\lambda}\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\equiv M_{1,\delta}+M_2\delta\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}. \tag{2.17}$$

Здесь $M_{\psi,\delta}=\big[1+(1/\alpha_1\lambda)\big(\lambda+\lambda c_\Gamma^2\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_N)}+\mathscr{N}_1c_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}\big)\big]M_\delta(\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D})$,

$$M_T'=\frac{1}{\alpha_1\lambda}\left(\|f\|_{\mathscr{T}^*}+c_\Gamma\|\chi\|_{\Gamma_N}\right),\quad M_{1,\delta}=M_T'+M_{\psi,\delta},\quad M_2=\frac{c_0}{\alpha_1\lambda}. \tag{2.18}$$

Подставим $\mathbf{w}$, $C_{\mathbf{w}}$ и $T_{\mathbf{w}}$ в (2.16). Из (1.5), (1.8) и (2.8) следует, что билинейная форма в левой части (2.16) непрерывна и коэрцитивна на $\mathbf{V}$ с константой $\alpha_0\nu/2$. В силу теоремы Лакса — Мильграма решение $\mathbf{z}\in\mathbf{V}$ задачи (2.16) существует и единственно, причем для него выполняется с учетом (2.13) и оценок для T и C следующая оценка:

$$\|\mathbf{z}\|_1\le\frac{2}{\alpha_0\nu}[\|\mathbf{f}\|_{-1}+M_{\mathbf{g}}+\beta_1(M_{1,\delta}+M_2\delta\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)})+\beta_2M_C]=M_{3,\delta}'+M_4'\delta\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}. \tag{2.19}$$

Здесь постоянные $M_{3,\delta}'$ и M_4' не зависят от $\mathbf{w}$ и определяются соотношениями

$$M_{3,\delta}'=\frac{2}{\alpha_0\nu}\left(\|\mathbf{f}\|_{-1}+M_{\mathbf{g}}\right)+\frac{2}{\alpha_0\nu}(\beta_1M_{1,\delta}+\beta_2M_C),\quad M_4'=\frac{2\beta_1}{\alpha_0\nu}M_2. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и вложения $\mathbf{V}\subset\mathbf{Z}$ следует оценка $\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\le M_{3,\delta}+M_4\delta\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}$, где $M_{3,\delta}=c_{\mathbf{Z}}M_{3,\delta}'$, $M_4=c_{\mathbf{Z}}M_4'$, а $c_{\mathbf{Z}}$ — константа вложения, не зависящая от $\mathbf{w}$.

Выберем теперь $\delta=\delta_0$ из условия $M_4\delta_0\le1/2$. Положив $r=2M_{3,\delta_0}$, введем в $\mathbf{Z}$ шар $B_r=\{\mathbf{w}\in\mathbf{Z}:\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\le r\}$. Ясно, что оператор F отображает шар B_r

в себя. Легко проверить, что он непрерывен и компактен. Из теоремы Шаудера следует, что отображение F имеет по крайней мере одну неподвижную точку $\mathbf{w} \in B_r$, которая вместе с соответствующими функциями $\tau_{\mathbf{w}} \in \mathscr{T}$ и $C_{\mathbf{w}} \in \mathscr{C}$ является искомым решением задачи (2.10)–(2.12). Тогда тройка $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$, $T = T_{\delta_0} + \tau_{\mathbf{w}}$ и C является решением задачи (2.4)–(2.7). Поскольку $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le 2M_{3,\delta_0} = 2c_{\mathbf{Z}}M'_{3,\delta_0}$, $\delta_0\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le M'_{3,\delta_0}/M'_4$, $M_2\delta_0\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le (\alpha_0\nu M'_{3,\delta_0})/(2\beta_1)$, то с учетом (2.17)–(2.20) приходим к следующим оценкам для $(\mathbf{u}, T, C)$:

$$\|C\|_1 \le M_C, \quad \|T\|_1 \le 2M'_T + 2M_{\psi,\delta_0} + \frac{1}{\beta_1}(\|\mathbf{f}\|_{-1} + M_{\mathbf{g}}) + \frac{\beta_2}{\beta_1}M_C, \tag{2.21}$$

$$\|\mathbf{u}\|_1 \le \frac{4}{\alpha_0\nu}(\|\mathbf{f}\|_{-1} + M_{\mathbf{g}}) + \frac{4\beta_1}{\alpha_0\nu}(M'_T + M_{\psi,\delta_0}) + \frac{4\beta_2}{\alpha_0\nu}M_C + c_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}. \tag{2.22}$$

Отметим, что при $\psi = 0$ оценка для T в (2.21) является слишком грубой, ибо она содержит нормы «гидродинамических» данных $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. В то же время истинные оценки для T и $\mathbf{u}$ при $\psi = 0$ имеют, как легко проверить, вид

$$\|T_1\| \le M'_T, \quad \|\mathbf{u}\|_1 \le \frac{2}{\alpha_0\nu}(\|\mathbf{f}\|_{-1} + M_{\mathbf{g}} + \beta_1 M'_T + \beta_2 M_C) + c_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}. \tag{2.23}$$

С учетом этого введем параметр $\varkappa$, равный 0, когда $\psi = 0$, и 1, когда $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} > 0$. Используя $\varkappa$, перепишем оценки (2.21)–(2.23) в следующем едином виде:

$$\|C\|_1 \le M_C, \quad \|T\|_1 \le M_T, \quad \|\mathbf{u}\|_1 \le M_{\mathbf{u}}. \tag{2.24}$$

Здесь константы M_C, M_T и $M_{\mathbf{u}}$, зависящие от данных, определяются соотношениями

$$M_C = \lambda_*^{-1}(\|f_c\|_{\mathscr{C}^*} + c_\Gamma\|\chi_c\|_{\Gamma_N^c}),$$
$$M_T = (1+\varkappa)(M'_T + M_{\psi,\delta_0}) + \frac{\varkappa}{\beta_1}(\|\mathbf{f}\|_{-1} + M_{\mathbf{g}} + \beta_2 M_C),$$
$$M_{\mathbf{u}} = \frac{2(1+\varkappa)}{\alpha_0\nu}[\|\mathbf{f}\|_{-1} + M_{\mathbf{g}} + \beta_1(M'_T + M_{\psi,\delta_0}) + \beta_2 M_C] + c_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}. \tag{2.25}$$

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(vii). *Тогда существует по крайней мере одно слабое решение* $(\mathbf{u}, p, T, C)$ *задачи* 1 *и справедливы оценки* (2.24), *где* $M_{\mathbf{u}}$, M_T *и* M_C *— неубывающие непрерывные функции норм* $\|\mathbf{f}\|_{-1}$, $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|f\|_{\mathscr{T}^*}$, $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} > 0$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$, $\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_N)}$, $\|f_c\|_{\mathscr{C}^*}$, $\|\chi_c\|_{\Gamma_N}$, $\|\kappa\|$, *определяемые формулами* (2.25).

Замечание 2.2. По аналогичной, хотя и несколько более сложной схеме, может быть исследована разрешимость соответствующей задачи с неоднородным условием Дирихле для концентрации C на участке Γ_D^c. Формулировку соответствующей теоремы можно найти в [19, 20]. В [19] показано также, что при дополнительном условии $f \in L^{6/5}(\Omega)$ либо $f_c \in L^{6/5}(\Omega)$ температура T либо концентрация C удовлетворяет следующему граничному условию: $(\partial T/\partial n + \alpha T)|_{\Gamma_N} = \chi$ в $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ либо $\partial C/\partial n|_{\Gamma_N^c} = \chi_c$ в $H^{-1/2}(\Gamma_N^c)$.

Предположим, что наряду с решением $(\mathbf{u}_1, p_1, T_1, C_1)$, существование которого вытекает из теоремы 2.1, существует еще одно решение $(\mathbf{u}_2, p_2, T_2, C_2)$ задачи 1. Легко проверить, что разность $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $p = p_1 - p_2$, $T = T_1 - T_2$, $C = C_1 - C_2$ этих решений удовлетворяет соотношениям

$$\nu a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}) = -b_1(T, \mathbf{u}) + b_2(C, \mathbf{u}), \tag{2.26}$$

$$a_1(T,T)+c_1(\mathbf{u},T_1,T)\le 0,\quad a_2(C,C)+c_2(\mathbf{u},C_1,C)\le 0. \tag{2.27}$$

Из (2.27) выводим с учетом оценок $\|T_1\|\le M_T$, $\|C_1\|_1\le M_C$, вытекающих из (2.24), что

$$\|T\|_1\le \frac{\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}M_T\|\mathbf{u}\|_1,\quad \|C\|_1\le \frac{\mathscr{N}_2}{\lambda_*}M_C\|\mathbf{u}\|_1. \tag{2.28}$$

Используя (2.28) и (2.1), из (2.26) приходим в силу оценки $\|\mathbf{u}\|_1\le M_{\mathbf{u}}$ к соотношению

$$\left(\alpha_0\nu-\mathscr{N}M_{\mathbf{u}}-\frac{\beta_1\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}M_T-\frac{\beta_2\mathscr{N}_2}{\lambda_*}M_C\right)\|\mathbf{u}\|_1^2\le 0. \tag{2.29}$$

Введем числа Рейнольдса Re, Рэлея Ra и диффузионное число Рэлея Ra^c по формулам

$$\mathrm{Re}=\frac{1}{\alpha_0\nu}\mathscr{N}M_{\mathbf{u}},\quad \mathrm{Ra}=\frac{1}{\alpha_0\nu}\frac{\beta_1\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}M_T,\quad \mathrm{Ra}^c=\frac{1}{\alpha_0\nu}\frac{\beta_2\mathscr{N}_2}{\lambda_*}M_C$$

и предположим, что выполняется следующее условие «малости» исходных данных:

$$\mathrm{Re}+\mathrm{Ra}+\mathrm{Ra}^c<1. \tag{2.30}$$

Тогда из (2.29) вытекает, что $\mathbf{u}=0$, $T=0$ и $C=0$. Сформулируем полученный результат.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1 *и условие* (2.30). *Тогда слабое решение* $(\mathbf{u},p,T,C)$ *задачи* 1 *единственно.*

В частном случае, когда $\beta_2=0$ или $M_C=0$, либо $\beta_1=0$ или $M_T=0$, (2.30) переходит в условие $\mathrm{Re}+\mathrm{Ra}<1$ либо $\mathrm{Re}+\mathrm{Ra}^c<1$ единственности решения краевой задачи для уравнений тепло- либо массопереноса. При $\beta_1=\beta_2=0$ (2.30) переходит в условие $\mathrm{Re}<1$ единственности решения задачи Дирихле для уравнений Навье — Стокса (см. [17]).

В заключение рассмотрим слабую формулировку линейного аналога задачи 1. Она заключается в нахождении четверки $(\mathbf{u},p,T,C)\in\mathbf{H}^1(\Omega)\times L^2_0(\Omega)\times H^1(\Omega)\times\mathscr{C}$ из (2.6) и из тождеств

$$\nu a(\mathbf{u},\mathbf{v})+c(\mathbf{u}_0,\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},p)-b_1(T,\mathbf{v})+b_2(C,\mathbf{v})=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle\ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega), \tag{2.31}$$

$$a_1(T,S)+c_1(\mathbf{u}_0,T,S)=\langle\bar f,S\rangle\ \forall S\in\mathscr{T},\, a_2(C,h)+c_2(\mathbf{u}_0,C,h)=\langle\bar f_c,h\rangle\ \forall h\in\mathscr{C}, \tag{2.32}$$

являющихся линейными аналогами тождеств (2.3)–(2.5). Здесь $\mathbf{u}_0\in\mathbf{Z}$ — заданная функция. Введем линейные непрерывные операторы $A:\mathbf{H}^1(\Omega)\to\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $A_1:H^1(\Omega)\to\mathscr{T}^*$, $A_2:\mathscr{C}\to\mathscr{C}^*$, $B_1:H^1(\Omega)\to\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $B_2:\mathscr{C}\to\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $B:\mathbf{H}^1_0(\Omega)\to(L^2_0(\Omega))^*\equiv L^2_0(\Omega)$ и $B^*:L^2_0(\Omega)\to\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, действующие по формулам

$$\langle A\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}=\nu a(\mathbf{u},\mathbf{v})+c(\mathbf{u}_0,\mathbf{u},\mathbf{v}),$$
$$\langle A_1T,S\rangle_{\mathscr{T}^*\times\mathscr{T}}=a_1(T,S)+c_1(\mathbf{u}_0,T,S),$$
$$\langle A_2C,h\rangle_{\mathscr{C}^*\times\mathscr{C}}=a_2(C,h)+c_2(\mathbf{u}_0,C,h),\quad \langle B_1T,\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}=b_1(T,\mathbf{v}),$$
$$\langle B_2C,\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}=b_2(C,\mathbf{v}),$$
$$\langle B\mathbf{v},q\rangle_{L^2_0(\Omega)\times L^2_0(\Omega)}=b(\mathbf{v},q)=\langle B^*q,\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)},$$

и перепишем (2.31), (2.32) в виде

$$A\mathbf{u}+B^*p+B_1T-B_2C=\mathbf{f},\quad A_1T=\bar f,\quad A_2C=\bar f_c. \tag{2.33}$$

Введем подпространства

$$\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_N \cup \Gamma_N^c,\ \int\limits_{\Gamma^{(i)}} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, d\Gamma = 0,\ i = 1,2,\dots,N \right\}$$

и $\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) = \{\gamma\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\}$ пространств $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ соответственно и положим $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, p, T, C)$,

$$\begin{gathered} X = \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathscr{C}, \\ Y = \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) \times \mathscr{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D) \times \mathscr{C}^*. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Рассмотрим оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6) : X \to Y$, действующий по формулам

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \widetilde{\Phi}_1(\mathbf{x}) + B_1 T - B_2 C, \quad \widetilde{\Phi}_1(\mathbf{x}) \equiv A\mathbf{u} + B^* p, \quad \Phi_2(\mathbf{x}) = \mathrm{div}\mathbf{u}, \quad \Phi_3(\mathbf{x}) = \gamma\mathbf{u},$$

$$\Phi_4(\mathbf{x}) = A_1 T, \quad \Phi_5(\mathbf{x}) = \gamma|_{\Gamma_D} T, \quad \Phi_6(\mathbf{x}) = A_2 C. \tag{2.35}$$

Простой анализ показывает, что линейные операторы $A_2 : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^*$, $(A_1, \gamma|_{\Gamma_D}) : H^1(\Omega) \to \mathscr{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$ и $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \to \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$ являются изоморфизмами. С учетом этого приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.3. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii) *и* $\alpha \in L_+^\infty(\Gamma_N)$, $k \in L_+^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{Z}$. *Тогда оператор* $\Phi : X \to Y$, *определяемый формулами* (2.35), *осуществляет изоморфизм.*

Отметим, что условие $\mathbf{g} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$ является более жестким, чем условия на $\mathbf{g}$, указанные в (vi), (vii). Другими словами, любая функция $\mathbf{g} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$ заведомо удовлетворяет всем условиям в (vi), (vii). Следствием теоремы 2.1 является

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv). *Тогда для любой шестерки* $(\psi, \chi, \alpha, f_c, \kappa, \mathbf{g}) \in H^{1/2}(\Gamma_D) \times L^2(\Gamma_N) \times L_+^\infty(\Gamma_N) \times \mathscr{C}^* \times L_+^2(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$ *существует слабое решение* $(\mathbf{u}, p, T, C) \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathscr{C}$ *задачи* 1 *и справедливы оценки* (2.24), (2.25).

§ 3. Постановка и разрешимость обратных экстремальных задач

Рассмотренная выше задача 1 содержит ряд физических параметров, а также функций, описывающих плотности термогидродинамических источников. Эти параметры и плотности источников должны быть заданы для нахождения ее решения. Вместе с тем в ряде случаев достоверная информация о них неизвестна. В этих случаях возникает необходимость решения обратных задач для модели (1.1)–(1.3), заключающихся в нахождении неизвестных коэффициентов уравнений либо плотностей неизвестных источников по определенной информации о состоянии среды. Важно отметить, что исследование обратных задач можно свести к исследованию экстремальных задач при соответствующем выборе функционала качества. С учетом этого сформулируем и исследуем экстремальную задачу для модели (1.1)–(1.3), где рассмотрим в качестве возможных управлений функции ψ, α и χ, входящие в граничные условия для T, плотность f_c источников вещества, коэффициент k в (1.3) и граничную функцию $\mathbf{g}$ для скорости $\mathbf{u}$. Другими словами, мы разбиваем множество всех исходных данных задачи 1 на две группы: группу управлений, куда входят функции ψ, χ, α, f_c, k и $\mathbf{g}$, играющие роль управлений, и группу фиксированных данных, куда входят неизменяемые функции $\mathbf{f}$, f, χ_c, $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$. Будем считать, что управления ψ, χ, α, f_c, k и $\mathbf{g}$ могут изменяться в некоторых множествах K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 и K_6. Более точно, предположим, что

(a) $K_1 \subset H^{1/2}(\Gamma_D)$, $K_2 \subset L^2(\Gamma_N)$, $K_3 \subset L^\infty_+(\Gamma_N)$, $K_4 \subset \mathscr{C}^*$, $K_5 \subset L^2_+(\Omega)$, $K_6 \subset \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$ — непустые замкнутые выпуклые множества.

Пусть $\widetilde{J} : X \equiv \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал, $\mu_j \geq 0$ — константы, $j = 1, \dots, 6$. Полагая $K \equiv K_1 \times K_2 \times K_3 \times K_4 \times K_5 \times K_6$, $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, p, T, C)$, $v \equiv (\psi, \chi, \alpha, f_c, k, \mathbf{g})$, введем функционал $J : X \times K \to \mathbb{R}$ по формуле

$$J(\mathbf{x}, v) = \widetilde{J}(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2}\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma_D} + \frac{\mu_2}{2}\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_3}{2}\|\alpha\|^2_{L^\infty(\Gamma_N)} + \frac{\mu_4}{2}\|f_c\|^2_{\mathscr{C}^*} + \frac{\mu_5}{2}\|k\|^2 + \frac{\mu_6}{2}\|\mathbf{g}\|^2_{1/2,\Gamma}. \tag{3.1}$$

Предположим в дополнение к условию (a), что выполняется условие

(b) $\mu_j \geq 0$ и K_j — ограниченное множество, $j = 1, \dots, 6$.

Рассматривая функционал J на слабых решениях задачи 1, запишем соответствующее ограничение, имеющее вид ее слабой формулировки (2.3)–(2.6):

$$F(\mathbf{x}, v) \equiv F(\mathbf{u}, p, T, C, \psi, \chi, \alpha, f_c, k, \mathbf{g}) = 0. \tag{3.2}$$

Здесь $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6) : X \times K \to Y$ — оператор, действующий по формулам

$$\langle F_1(\mathbf{x}, v), \mathbf{v}\rangle = \nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b_1(T, \mathbf{v}) - b_2(C, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega),$$
$$\langle F_2(\mathbf{x}, v), q\rangle = b(\mathbf{u}, q) \ \forall q \in L^2_0(\Omega), \quad F_3(\mathbf{x}, v) = \gamma\mathbf{u} - \mathbf{g}, \quad F_5(\mathbf{x}, v) = \gamma|_{\Gamma_D} T - \psi,$$
$$\langle F_4(\mathbf{x}, v), S\rangle = a_1(T, S) + c_1(\mathbf{u}, T, S) - \langle f, S\rangle - (\chi, S)_{\Gamma_N} \quad \forall S \in \mathscr{T}, \tag{3.3}$$
$$\langle F_6(\mathbf{x}, v), h\rangle = a_2(C, h) + c_2(\mathbf{u}, C, h) - \langle f_c, h\rangle - (\chi_c, h)_{\Gamma_N^c} \quad \forall h \in \mathscr{C}.$$

Исследуем задачу условной минимизации

$$J(\mathbf{x}, v) \equiv J(\mathbf{u}, p, T, C, \psi, \chi, \alpha, f_c, k, \mathbf{g}) \to \inf, \quad F(\mathbf{x}, v) = 0, \quad (\mathbf{x}, v) \in X \times K. \tag{3.4}$$

В качестве возможных функционалов качества будем рассматривать следующие:

$$J_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 d\Omega, \quad J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla T|^2\, d\Omega, \tag{3.5}$$

$$J_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla C|^2\, d\Omega, \quad J_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega r|C - C_d|^2\, d\Omega, \quad J_5(\mathbf{x}) = \int_\Omega rC\, d\Omega.$$

Здесь $r \in L^2(\Omega)$ — неотрицательная весовая функция. О физическом смысле функционалов $J_1, \dots, J_4$ можно прочитать в [7, 13]. Функционал J_5 в случае, когда $r = \rho_Q$, где ρ_Q — характеристическая функция подобласти $Q \subseteq \Omega$, описывает количество вещества, поступающее в область Q в единицу времени. Указанный функционал широко применяется при решении задач оптимального размещения предприятий в окрестности экологически значимых зон. Более подробно о постановках и методах решения указанных задач для линейных нестационарных уравнений конвекции-диффузии можно прочитать в [2, 3]. Заметим, что каждый из функционалов $J_1, \dots, J_5$ слабо полунепрерывен снизу и не зависит от p. С учетом этого любое утверждение, которое будет доказано ниже для слабо полунепрерывного снизу функционала $\widetilde{J}$, не зависящего от p, будет справедливо и для каждого из них. Положим $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, v) \in X \times K : F(\mathbf{x}, v) = 0, J(\mathbf{x}, v) < \infty\}$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv), (a), (b), $\widetilde{J} : X \to \mathbb{R}$ — *слабо полунепрерывный снизу функционал, не зависящий от* p, *и множество* Z_{ad} *непусто. Тогда существует по крайней мере одно решение экстремальной задачи* (3.4).

Доказательство. Обозначим через $(\mathbf{x}_m, v_m) \in Z_{ad}$ минимизирующую последовательность, для которой $\lim\limits_{m\to\infty} J(\mathbf{x}_m, v_m) = \inf\limits_{(\mathbf{x}_m, v_m)\in Z_{ad}} J(\mathbf{x}_m, v_m) \equiv J^*$. В силу (b) и теоремы 2.4 для управлений $v_m = (\psi_m, \chi_m, \alpha_m, f_c^m, k_m, \mathbf{g}_m)$ и отвечающих им решений $(\mathbf{u}_m, p_m, T_m, C_m)$ задачи 1 выполняются оценки $\|\psi_m\|_{1/2,\Gamma_D} \le c_1$, $\|\chi_m\|_{\Gamma_N} \le c_2$, $\|\alpha_m\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \le c_3$, $\|f_c^m\|_{\mathscr{C}^*} \le c_4$, $\|k_m\| \le c_5$, $\|\mathbf{g}_m\|_{1/2,\Gamma} \le c_6$, $\|\mathbf{u}_m\|_1 \le c_7$, $\|T_m\|_1 \le c_8$, $\|C_m\|_1 \le c_9$. Здесь $c_1, c_2, \dots$ — некоторые константы, не зависящие от m. Из этих оценок вытекает, что существуют слабые пределы $\psi^* \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi^* \in L^2(\Gamma_N)$, $f_c^* \in \mathscr{C}^*$, $k^* \in L^2_+(\Omega)$, $\mathbf{g}^* \in \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{u}^* \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, $T^* \in H^1(\Omega)$, $C^* \in \mathscr{C}$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\psi_m\}$, $\{\chi_m\}$, $\{f_c^m\}$, $\{k_m\}$, $\{\mathbf{g}_m\}$, $\{\mathbf{u}_m\}$, $\{T_m\}$, $\{C_m\}$ и $*$-слабый предел $\alpha^* \in L^\infty_+(\Gamma_N)$ подпоследовательности последовательности $\{\alpha_m\}$. Рассуждая, как в [7], легко доказываем существование такой функции $p^* \in L^2_0(\Omega)$, что $F(\mathbf{x}^*, v^*) = 0$, где $\mathbf{x}^* = (\mathbf{u}^*, p^*, T^*, C^*)$, $v^* = (\psi^*, \chi^*, \alpha^*, f_c^*, k^*, \mathbf{g}^*)$, а из слабой полунепрерывности снизу функционала J вытекает, что $J(\mathbf{x}^*, v^*) = J^*$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *В условиях теоремы* 3.1 *существует по крайней мере одно решение экстремальной задачи* (3.4) *при* $\widetilde{J} = J_l$, $l = 1, 2, \dots, 5$.

Если K_j — неограниченные множества, утверждения теоремы 3.1 остаются справедливыми при дополнительном предположении об ограниченности снизу функционала $\widetilde{J}$ и положительности коэффициентов μ_j. Соответствующие утверждения будут справедливы и для функционалов $J_1, \dots, J_4$, поскольку они неотрицательны. Что касается функционала J_5, то в общем случае он не ограничен снизу, хотя последнее имеет место тогда, когда для любого элемента $v \in K$ компонента C решения $(\mathbf{u}, p, T, C)$ задачи 1 неотрицательна и $r \ge 0$. О достаточных условиях неотрицательности концентрации C можно прочитать, например, в [10, 12]. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 3.2. *Пусть* $\widetilde{J} : X \to \mathbb{R}$ — *ограниченный снизу слабо полунепрерывный снизу функционал, не зависящий от* p, *и выполняются условия* (i)–(iv), (a), *причем* $\mu_j > 0$, $j = 1, \dots, 5$, *и* $Z_{ad} \ne \varnothing$. *Тогда существует по крайней мере одно решение задачи* (3.4).

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.2 *существует по крайней мере одно решение экстремальной задачи* (3.4) *при* $\widetilde{J} = J_l$, $l = 1, \dots, 4$. *Если, кроме того,* $r \in L^2_+(\Omega)$, *причем компонента* C *решения* $(\mathbf{u}, p, T, C)$ *задачи* 1 *неотрицательна на множестве* K, *то задача* (3.4) *при* $J = J_5$ *имеет по крайней мере одно решение.*

§ 4. Вывод системы оптимальности

4.1. Обоснование принципа Лагранжа. Выведем в этом параграфе систему оптимальности для задачи (3.4). По аналогии с [7–9] воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых задачах условной минимизации [21]. Для этого вычислим производные Фреше по $\mathbf{x}$ от оператора F. Простой анализ показывает, что производная Фреше оператора $F : X \times K \to Y$ по $\mathbf{x}$ в каждой точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \equiv (\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \widehat{T}, \widehat{C}, \hat{\psi}, \hat{\chi}, \hat{\alpha}, \hat{f}_c, \hat{k}, \hat{\mathbf{g}}) \in X \times K$ есть линейный непрерывный оператор $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) : X \to Y$, ставящий в соответствие каждому элементу $(\mathbf{w}, r, \tau, \mu) \in X$ элемент $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})(\mathbf{w}, r, \tau, \mu) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \in Y$, где

$$\langle y_1, \mathbf{v}\rangle = \nu a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, r) + b_1(\tau, \mathbf{v}) - b_2(\mu, \mathbf{v}),$$

$$\langle y_2, q\rangle = b(\mathbf{w}, q), \quad y_3 = \gamma \mathbf{w}, \quad \langle y_4, S\rangle = a_1(\tau, S) + c_1(\hat{\mathbf{u}}, \tau, S) + c_1(\mathbf{w}, \widehat{T}, S),$$
$$y_5 = \gamma|_{\Gamma_D}\tau, \quad \langle y_6, h\rangle = a_2(\mu, h) + c_2(\hat{\mathbf{u}}, \mu, h) + c_2(\mathbf{w}, \widehat{C}, h). \tag{4.1}$$

Положим $\mathbf{y}^* = (\xi, \sigma, \zeta, \theta, \zeta_1, \eta) \in Y^* = \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times \big(\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)\big)^* \times \mathscr{T} \times (H^{1/2}(\Gamma_D))^* \times \mathscr{C}$. Введем для функционала J лагранжиан $\mathscr{L} : X \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}, v, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, v) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, v)\rangle \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, v) + \langle F_1(\mathbf{x}, v), \xi\rangle + (F_2(\mathbf{x}, v), \sigma)$$
$$+ \langle \zeta, F_3(\mathbf{x}, v)\rangle_\Gamma + \langle F_4(\mathbf{x}, v), \theta\rangle_{\mathscr{T}^* \times \mathscr{T}} + \langle \zeta_1, F_5(\mathbf{x}, v)\rangle_{\Gamma_D} + \langle F_6(\mathbf{x}, v), \eta\rangle_{\mathscr{C}^* \times \mathscr{C}}, \tag{4.2}$$

где $\langle \zeta, \cdot\rangle_\Gamma = \langle \zeta, \cdot\rangle_{(\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma))^* \times \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)}$, $\langle \zeta_1, \cdot\rangle_{\Gamma_D} \equiv \langle \zeta_1, \cdot\rangle_{(H^{1/2}(\Gamma_D))^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)}$. Положив $\mathbb{R}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$, сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv), $K_1 \subset H^{1/2}(\Gamma_D)$, $K_2 \subset L^2(\Gamma_N)$, $K_3 \subset L^\infty_+(\Gamma_N)$, $K_4 \subset \mathscr{C}^*$, $K_5 \subset L^2_+(\Omega)$, $K_6 \subset \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$ *— непустые выпуклые множества,* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \in X \times K$ *— элемент, на котором достигается локальный минимум в задаче* (3.4), *и пусть* $J(\mathbf{x}, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ *— выпуклый функционал для каждой точки* $\mathbf{x} \in X$, *причем функция* $\mathbf{x} \to J'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, v)$ *со значениями в* X^* *принадлежит пространству* C^0 *в точке* $\hat{\mathbf{x}}$ *для любого элемента* $v \in K$. *Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \xi, \sigma, \zeta, \theta, \zeta_1, \eta) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$ *такой, что справедливо уравнение Эйлера — Лагранжа*

$$\lambda_0 \langle J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), (\mathbf{w}, r, \tau, \mu)\rangle_{X^* \times X} + \langle \mathbf{y}^*, F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})(\mathbf{w}, r, \tau, \mu)\rangle_{Y^* \times Y} = 0 \ \forall (\mathbf{w}, r, \tau, \mu) \in X \tag{4.3}$$

и выполняется принцип минимума

$$\mathscr{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathscr{L}(\hat{\mathbf{x}}, v, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \quad \forall v \in K. \tag{4.4}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой из [21, с. 79], согласно которой для доказательства существования множителя Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ достаточно доказать с учетом выпуклости множеств K и $F(\hat{\mathbf{x}}, K) \subset Y$ фредгольмовость оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) : X \to Y$. Но в силу (4.1) $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) = \Phi + \widehat{\Phi} \equiv \Phi + (\widehat{\Phi}_1, 0, 0, \widehat{\Phi}_4, 0, \widehat{\Phi}_6)$, где оператор Φ введен в (2.35), а операторы $\widehat{\Phi}_1 : X \to \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $\widehat{\Phi}_4 : X \to \mathscr{T}^*$ и $\widehat{\Phi}_6 : X \to \mathscr{C}^*$ определяются соотношениями

$$\langle \widehat{\Phi}_1(\mathbf{w}, r, \tau, \mu), \mathbf{v}\rangle = c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}),$$

$$\langle \widehat{\Phi}_4(\mathbf{w}, r, \tau, \mu), S\rangle = c_1(\mathbf{w}, \widehat{T}, S), \quad \langle \widehat{\Phi}_6(\mathbf{w}, r, \tau, \mu), h\rangle = c_2(\mathbf{w}, \widehat{C}, h).$$

В силу теоремы 2.3 оператор $\Phi : X \to Y$ является изоморфизмом, а из оценок (1.7) следует непрерывность оператора $(\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_4, \widehat{\Phi}_6)$, зависящего только от $\mathbf{w}$, из $\mathbf{L}^4(\Omega)$ в $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathscr{T}^*\times\mathscr{C}^*$, а следовательно, и компактность из $\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ в $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathscr{T}^*\times\mathscr{C}^*$.

Обратимся к уравнению (4.3) и предположим, что J не зависит от p, так что

$$\langle J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),(\mathbf{w},r,\tau,\mu)\rangle_{X^*\times X}=\langle J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mathbf{w}\rangle+\langle J'_T(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\tau\rangle+\langle J'_C(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mu\rangle. \quad (4.5)$$

Полагая в (4.3) сначала $r=0$, $\tau=0$, $\mu=0$, затем $\mathbf{w}=0$, $\tau=0$, $\mu=0$, $\mathbf{w}=0$, $r=0$, $\mu=0$ и $\mathbf{w}=0$, $r=0$, $\tau=0$, приходим к следующим соотношениям для ξ, σ, ζ, θ, ζ_1 и η:

$$\nu a(\mathbf{w},\xi)+c(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{w},\xi)+c(\mathbf{w},\hat{\mathbf{u}},\xi)+c_1(\mathbf{w},\widehat{T},\theta)+c_2(\mathbf{w},\widehat{C},\eta)+b(\mathbf{w},\sigma)+\langle\zeta,\mathbf{w}\rangle_\Gamma$$
$$+\lambda_0\langle J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mathbf{w}\rangle=0\ \forall\mathbf{w}\in\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega),\quad b(\xi,r)=0\ \forall r\in L^2_0(\Omega), \quad (4.6)$$

$$\hat{a}_1(\tau,\theta)+c_1(\hat{\mathbf{u}},\tau,\theta)+b_1(\tau,\xi)+\langle\zeta_1,\tau\rangle_{\Gamma_D}+\lambda_0\langle J'_T(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\tau\rangle=0\ \forall\tau\in H^1(\Omega), \quad (4.7)$$

$$\hat{a}_2(\mu,\eta)+c_2(\hat{\mathbf{u}},\mu,\eta)-b_2(\mu,\xi)+\lambda_0\langle J'_C(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mu\rangle=0\ \forall\mu\in\mathscr{C}, \quad (4.8)$$

где $\hat{a}_1(\tau,\theta)=\lambda\tilde{a}(\tau,\theta)+\lambda(\hat{\alpha}\tau,\theta)_{\Gamma_N}$, $\hat{a}_2(\mu,\eta)=\lambda_c\tilde{a}(\mu,\eta)-w_0(\frac{\partial\mu}{\partial z},\eta)+(\hat{k}\mu,\eta)$. Обратившись к принципу минимума (4.4), перепишем его в виде

$$\langle\zeta_1,\psi-\hat{\psi}\rangle_{\Gamma_D}+(\chi-\hat{\chi},\theta)_{\Gamma_N}-\lambda((\alpha-\hat{\alpha})\widehat{T},\theta)_{\Gamma_N}+\langle f_c-\hat{f}_c,\eta\rangle_{\mathscr{C}^*\times\mathscr{C}}$$
$$-((k-\hat{k})\widehat{C},\eta)+\langle\zeta,\mathbf{g}-\hat{\mathbf{g}}\rangle_\Gamma\le\lambda_0[J(\hat{\mathbf{x}},v)-J(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})]\quad\forall v\in K. \quad (4.9)$$

Соотношения (4.6)–(4.8) вместе с принципом минимума (4.4), эквивалентным (4.9), и операторным ограничением (3.2), эквивалентным (2.3)–(2.6), представляют собой *систему оптимальности*. Она состоит из трех частей. Первая часть имеет вид слабой формулировки (2.3)–(2.6) задачи 1, вторая состоит из тождеств (4.6)–(4.8) для множителей ξ, σ, ζ, θ, ζ_1 и η и, наконец, последняя часть представляет собой вариационное неравенство (4.9) для управления v.

4.2. Вывод дифференциальных уравнений и граничных условий для множителей Лагранжа. Следующий этап состоит в выводе из тождеств (4.6)–(4.8) дифференциальных уравнений и граничных соотношений для множителей Лагранжа. Этот этап проводится по схеме, развитой в [7]. Поэтому ограничимся здесь приведением соответствующих результатов. Обозначим через $S_{\mathbf{H}}:(\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega))^*\to\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $S_H:(H^1(\Omega))^*\to H^{-1}(\Omega)$ и $S^c_H:\mathscr{C}^*\to H^{-1}(\Omega)$ линейные непрерывные операторы сужения. Справедлива

Теорема 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.1 *и функционал* J *не зависит от* p. *Тогда существуют функции* $\xi\in\mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $\sigma\in L^2_0(\Omega)$, $\zeta\in(\tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma))^*$, $\theta\in\mathscr{T}$, $\zeta_1\in(H^{1/2}(\Gamma_D))^*$, $\eta\in\mathscr{C}$ *и константа* $\lambda_0\ge0$, *которые вместе с решением* $(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})=(\hat{\mathbf{u}},\hat{p},\widehat{T},\widehat{C},\hat{\psi},\hat{\chi},\hat{\alpha},\hat{f}_c,\hat{k},\hat{\mathbf{g}})$ *экстремальной задачи* (3.4) *удовлетворяют уравнениям*

$$-\nu\Delta\xi-(\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\xi+\nabla\hat{\mathbf{u}}^T\cdot\xi+\nabla\sigma+\theta\nabla\widehat{T}+\eta\nabla\widehat{C}$$
$$=-\lambda_0S_{\mathbf{H}}J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}},\hat{v})\ \text{в}\ \mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathrm{div}\xi=0\ \text{в}\ \Omega, \quad (4.10)$$

$$-\lambda\Delta\theta-\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\theta+\mathbf{b}_1\cdot\xi=-\lambda_0S_HJ'_T(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})\ \text{в}\ H^{-1}(\Omega), \quad (4.11)$$

$$-\lambda_c\Delta\eta-\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\eta+w_0\frac{\partial\eta}{\partial z}+\hat{\kappa}\eta-\mathbf{b}_2\cdot\xi=-\lambda_0S^c_HJ'_C(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})\ \text{в}\ H^{-1}(\Omega), \quad (4.12)$$

интегральным тождествам (4.6)–(4.8) *и принципу минимума* (4.4).

Если предположить, что ξ, σ, η обладают бо́льшей гладкостью, например, $\xi \in \mathbf{H}^1(\Delta,\Omega)\cap\mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $\sigma \in H^1(\Omega)$, $\theta \in H^1(\Delta,\Omega)\cap\mathscr{T}$, $\eta \in H^1(\Delta,\Omega)\cap\mathscr{C}$, то из (4.6)–(4.8) и (4.10)–(4.12) можно получить «поточечные» граничные соотношения для лагранжевых множителей. Действительно, умножив (4.10), (4.11) и (4.12) на функции $\mathbf{w} \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$, $\tau \in H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ и $\mu \in \mathscr{C} \subset L^6(\Omega)$, проинтегрируем по Ω. Вычитая полученные соотношения из (4.6)–(4.8), легко выводим, что

$$\langle\zeta,\mathbf{w}\rangle_\Gamma - \int\limits_\Gamma \sigma\mathbf{n}\cdot w\,d\Gamma + \nu\left\langle\frac{\partial\xi}{\partial n},\mathbf{w}\right\rangle_\Gamma$$
$$= \lambda_0\int\limits_\Omega S_{\mathbf{H}}J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})\cdot\mathbf{w}\,d\Omega - \lambda_0\langle J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mathbf{w}\rangle \quad \forall\mathbf{w}\in\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega),$$

$$\langle\zeta_1,\tau\rangle_{\Gamma_D} + \lambda(\hat\alpha\tau,\theta)_{\Gamma_N} + \lambda\left\langle\frac{\partial\theta}{\partial n},\tau\right\rangle_\Gamma = \lambda_0\int\limits_\Omega S_H J'_T(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})\tau\,d\Omega - \lambda_0\langle J'_T(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\tau\rangle$$
$$\forall\tau\in H^1(\Omega), (\langle\cdot,\tau\rangle_\Gamma \equiv \langle\cdot,\tau\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}),$$

$$\lambda_c\left\langle\frac{\partial\eta}{\partial n},\mu\right\rangle_\Gamma - w_0\int\limits_\Gamma n_3\eta\mu\,d\Gamma = \lambda_0\int\limits_\Omega S^c_H J'_C(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})\mu\,d\Omega - \lambda_0\langle J'_C(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mu\rangle \quad \forall\mu\in\mathscr{C}. \tag{4.13}$$

Дальнейший процесс вывода граничных соотношений зависит от вида функционала J.

Рассмотрим сначала случай, когда $J = J_1$. Предполагая, что $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^1(\Delta,\Omega)$, $\widehat{T},\widehat{C} \in H^1(\Delta,\Omega)$, имеем в силу (3.5) и формулы Грина, что $J'_T = J'_C = 0$,

$$\int\limits_\Omega S_{\mathbf{H}}J'_{1\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})\cdot\mathbf{w}\,d\Omega = -\int\limits_\Omega \Delta\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{w}\,d\Omega = a(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{w}) - \left\langle\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial n},\mathbf{w}\right\rangle_\Gamma \quad \forall\mathbf{w}\in\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega). \tag{4.14}$$

С учетом этого соотношения (4.10)–(4.12) принимают вид

$$-\nu\Delta\xi - (\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\xi + \nabla\hat{\mathbf{u}}^T\cdot\xi + \nabla\sigma + \theta\nabla\widehat{T} + \eta\nabla\widehat{C} = \lambda_0\Delta\hat{\mathbf{u}} \quad \text{в } \Omega, \quad \operatorname{div}\xi = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{4.15}$$

$$-\lambda\Delta\theta - \hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\theta + \mathbf{b}_1\cdot\xi = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{4.16}$$

$$-\lambda_c\Delta\eta - \hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\eta + w_0\frac{\partial\eta}{\partial z} + \hat\kappa\eta - \mathbf{b}_2\cdot\xi = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{4.17}$$

а из (4.13) приходим к следующим граничным соотношениям:

$$\lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial n} + \hat\alpha\theta\right)\Big|_{\Gamma_N} = 0 \quad \text{в } H^{-1/2}(\Gamma_N), \quad \left(\lambda_c\frac{\partial\eta}{\partial n} - w_0 n_3\eta\right)\Big|_{\Gamma^c_N} = 0 \quad \text{в } H^{-1/2}(\Gamma^c_N), \tag{4.18}$$

$$\zeta = \sigma\mathbf{n} - \nu\frac{\partial\xi}{\partial n} - \lambda_0\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial n} \quad \text{в } (\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma))^*, \quad \zeta_1 = -\lambda\frac{\partial\theta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_D} \quad \text{в } H^{-1/2}(\Gamma_D). \tag{4.19}$$

Для заданных функций $\hat{\mathbf{u}}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ соотношения (4.15)–(4.19) вместе с условиями $\xi = 0$ на $\Gamma, \theta = 0$ на $\Gamma_D, \eta = 0$ на Γ^c_D представляют собой систему для $\xi,\sigma,\zeta,\theta,\zeta_1$ и η, эквивалентную в силу теоремы 4.1 линейному уравнению с фредгольмовым оператором. В общем же случае, когда $\hat{\mathbf{u}}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ неизвестны, эти соотношения представляют собой вторую часть системы оптимальности, которую следует рассматривать совместно с (2.3)–(2.6) и (4.4).

Аналогичные рассуждения приводят к соотношениям (4.17) и

$$-\nu\Delta\xi - (\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\xi + \nabla\hat{\mathbf{u}}^T\cdot\xi + \nabla\sigma + \theta\nabla\widehat{T} + \eta\nabla\widehat{C} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \mathrm{div}\xi = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{4.20}$$

$$-\lambda\Delta\theta - \hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\theta + \mathbf{b}_1\cdot\xi = \lambda_0\Delta\widehat{T} \quad \text{в } \Omega, \tag{4.21}$$

$$\begin{gathered}\lambda\Big(\frac{\partial\theta}{\partial n} + \hat{\alpha}\theta\Big)\Big|_{\Gamma_N} = -\lambda_0\frac{\partial\widehat{T}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_N} \quad \text{в } H^{-1/2}(\Gamma_N),\\ \Big(\lambda_c\frac{\partial\eta}{\partial n} - w_0 n_3\eta\Big)\Big|_{\Gamma_N^c} = 0 \quad \text{в } H^{-1/2}(\Gamma_N^c),\end{gathered} \tag{4.22}$$

$$\zeta = \sigma\mathbf{n} - \nu\frac{\partial\xi}{\partial n} \quad \text{в } (\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma))^*, \quad \zeta_1 = -\Big(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial n} + \lambda_0\frac{\partial\widehat{T}}{\partial n}\Big)\Big|_{\Gamma_D} \quad \text{в } H^{-1/2}(\Gamma_D) \tag{4.23}$$

в случае функционала J_2, к соотношениям (4.20), (4.16), (4.18) и

$$-\lambda_c\Delta\eta - \hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\eta + w_0\frac{\partial\eta}{\partial z} + \hat{\kappa}\eta - \mathbf{b}_2\cdot\xi = -\lambda_0 r(\widehat{C} - C_d) \quad \text{в } \Omega, \tag{4.24}$$

$$\zeta = \sigma\mathbf{n} - \nu\frac{\partial\xi}{\partial n} \quad \text{в } (\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma))^*, \quad \zeta_1 = -\lambda\frac{\partial\theta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_D} \quad \text{в } H^{-1/2}(\Gamma_D) \tag{4.25}$$

для функционала J_4, а в случае функционала J_5 — к (4.20), (4.16), (4.18), (4.25) и

$$-\lambda\Delta\eta - \hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\eta + w_0\frac{\partial\eta}{\partial z} + \hat{\kappa}\eta - \mathbf{b}_2\cdot\xi = -\lambda_0 r \quad \text{в } \Omega. \tag{4.26}$$

4.3. Система оптимальности в случае линейной задачи 1. По аналогичной схеме выводится система оптимальности в случае, когда условное ограничение для задачи (3.4) имеет вид слабой формулировки (2.6), (2.31), (2.32) линейного аналога задачи 1. Действительно, достаточно записать эти соотношения в виде $F_0(\mathbf{x}, v) = 0$, где $F_0 : X \times K \to Y$ — оператор, отвечающий линейной задаче, составить лагранжиан $\mathscr{L}$ по формуле (4.2), где F следует заменить на F_0, и применить теорему 4.1. Полученная система оптимальности будет состоять из соотношений (2.6), (2.31), (2.32), принципа минимума (4.4), тождества $b(\xi, r) = 0\ \forall r \in L_0^2(\Omega)$ и тождеств

$$\nu a(\mathbf{w},\xi) + c(\mathbf{u}_0,\mathbf{w},\xi) + b(\mathbf{w},\sigma) + \langle\zeta,\mathbf{w}\rangle_\Gamma + \lambda_0\langle J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mathbf{w}\rangle = 0 \quad \forall\mathbf{w}\in\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega), \tag{4.27}$$

$$\hat{a}_1(\tau,\theta) + c_1(\mathbf{u}_0,\tau,\theta) + b_1(\tau,\xi) + \langle\zeta_1,\tau\rangle_{\Gamma_D} + \lambda_0\langle J'_T(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\tau\rangle = 0 \quad \forall\tau\in H^1(\Omega), \tag{4.28}$$

$$\hat{a}_2(\mu,\eta) + c_2(\mathbf{u}_0,\mu,\eta) - b_2(\mu,\xi) + \lambda_0\langle J'_C(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\mu\rangle = 0 \quad \forall\mu\in\mathscr{C}. \tag{4.29}$$

В частном случае, когда J не зависит от $\mathbf{u}$, система оптимальности упрощается, поскольку в этом случае из (4.27) вытекает, что $\xi = 0$ в Ω, $\sigma = 0$ в $L_0^2(\Omega)$, $\zeta = 0$ в $(\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma))^*$. Если к тому же J не зависит от T (либо C), то, кроме того, $\theta = 0$ и $\zeta_1 = 0$ (либо $\eta = 0$). Особенно просто решается система оптимальности в случае, когда $J = J_5$, а $\hat{k}$ является заданной функцией. Действительно, полагая во втором уравнении (2.32) $h = \eta$, $f_c = \hat{f}_c$, $C = \widehat{C}$, а в (4.29) $J = J_5$ и $\mu = \widehat{C}$ и вычитая полученные соотношения, будем иметь при $\lambda_0 > 0$

$$J_5^{\min} \equiv \int_\Omega r\widehat{C}\,d\Omega = -\frac{1}{\lambda_0}\Big(\langle\hat{f}_c,\eta\rangle_{\mathscr{C}^*\times\mathscr{C}} + \int_{\Gamma_N}\chi_c\eta\,d\Gamma\Big). \tag{4.30}$$

Формула (4.30) означает, что для нахождения минимального значения $J_5^{\min}$ функционала J_5 нет необходимости находить решение прямой задачи для $\widehat{C}$. Достаточно лишь определить сопряженную концентрацию η из тождества (4.29), представляющего собой при $J = J_5$ слабую формулировку эллиптической краевой задачи

$$-\lambda\Delta\eta - \mathbf{u}_0\cdot\nabla\eta + w_0\frac{\partial\eta}{\partial n} + \hat{\kappa}\eta = -\lambda_0 r, \quad \eta = 0 \quad \text{на } \Gamma_D^c, \quad \lambda\frac{\partial\eta}{\partial n} - w_0 n_3\eta = 0 \quad \text{на } \Gamma_N^c, \tag{4.31}$$

затем найти управление $\hat{f}_c$ из вариационного неравенства (4.9), принимающего вид $\langle f_c - \hat{f}_c, \eta\rangle_{\mathscr{C}^*\times\mathscr{C}} \le 0\ \forall f_c \in K_4$, и далее подставить η и $\hat{f}_c$ в (4.30).

Применение формулы (4.30) значительно упрощает численное решение исходной экстремальной задачи, что является серьезным преимуществом использования функционала J_5 в случае линейной задачи по сравнению с остальными функционалами. Именно на идее минимизации функционала вида J_5 был основан экономичный подход к решению задач оптимального размещения предприятий вблизи экологически значимых зон, предложенный Г. И. Марчуком в [2] и далее развиваемый в ряде работ (см., например, [3]). Отметим, что формула (4.30) остается справедливой и в случае, когда коэффициент $\hat{k}$ является неизвестной функцией. Однако в этом случае задача (4.31) является нелинейной относительно пары η, $\hat{k}$, поэтому ее необходимо решать вместе с вариационным неравенством (4.9), принимающим в этом случае вид

$$\langle f_c - \hat{f}_c, \eta\rangle_{\mathscr{C}^*\times\mathscr{C}} - ((k - \hat{k})\widehat{C}, \eta) \le 0 \quad \forall f_c \in K_4,\ k \in K_5,$$

и нелинейной относительно пары $\widehat{C}$, $\hat{k}$ задачей в (2.32). Это представляет собой достаточно сложную задачу даже при рассмотрении линейной модели распространения субстанции. Таким образом, применение формулы (4.30) не дает в этом случае какого-либо выигрыша в вычислительном плане, но может служить для проверки точности решения после его нахождения.

§ 5. Единственность решений обратных экстремальных задач

Весьма интересным и сложным является вопрос об установлении достаточных условий, гарантирующих единственность решений рассматриваемых обратных экстремальных задач. Ниже мы исследуем этот вопрос в некоторых частных случаях.

5.1. Положительность множителя Лагранжа λ_0. Как и в [7–9], можно выделить два разных случая в теореме 4.1: *регулярный*, когда любой нетривиальный множитель Лагранжа, удовлетворяющий (4.3), (4.4), является *регулярным*, т. е. имеет вид $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, где $\lambda_0 > 0$, и *нерегулярный*, когда существует хотя бы один множитель $(0, \mathbf{y}^*)$, где $\mathbf{y}^* \ne 0$, удовлетворяющий (4.3), (4.4). В первом случае, заменив в (4.3), (4.4) $\mathbf{y}^*$ на $\mathbf{y}^*/\lambda_0$, можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Во втором случае уравнение (4.3) принимает вид

$$F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})^*\mathbf{y}^* = 0. \tag{5.1}$$

Ниже докажем регулярность множителя Лагранжа в предположении, что элементы $(\mathbf{f}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, f, \chi_c) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathscr{T}^*\times L^2(\Gamma_N^c)$ и управления

$v \in K$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\alpha_0\nu}\mathscr{N} M_{\mathbf{u}}(\mathbf{f},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,f,\chi_c,v)+\frac{1}{\alpha_0\nu}\frac{\beta_1\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}M_T(\mathbf{f},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,f,\chi_c,v)$$
$$+\frac{1}{\alpha_0\nu}\frac{\beta_2}{\lambda_*}\mathscr{N}_2 M_C(\mathbf{f},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,f,\chi_c,v)<1 \quad \forall v\in K, \tag{5.2}$$

обеспечивающему в силу теоремы 2.2 единственность решения задачи 1. Здесь величины $M_{\mathbf{u}}$, M_T и M_C введены в (2.25). Для доказательства регулярности достаточно доказать, что система (4.6)–(4.8) при $\lambda_0 = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Предположим противное, т. е. что существует хотя бы одно нетривиальное решение $\mathbf{y}^* = (\xi,\sigma,\zeta,\theta,\zeta_1,\eta)$ системы (4.6)–(4.8) при $\lambda_0 = 0$, где элементы $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{u}},\hat{p},\widehat{T},\widehat{C})$ и $\hat{v}$ связаны соотношением $F(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}) = 0$. Тогда, полагая в ней $\mathbf{w} = \xi$, $r = \sigma$, $\tau = \theta$, $\mu = \eta$, приходим к равенствам

$$\nu a(\xi,\xi)+c(\xi,\hat{\mathbf{u}},\xi)+c_1(\xi,\widehat{T},\theta)+c_2(\xi,\widehat{C},\eta)=0,$$
$$\hat{a}_1(\theta,\theta)+b_1(\theta,\xi)=0, \hat{a}_2(\eta,\eta)-b_2(\eta,\xi)=0.$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.2, отсюда выводим, что

$$\alpha_0\nu\|\xi\|_1^2 \le [\mathscr{N}\|\hat{\mathbf{u}}\|_1+\frac{\beta_1\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}\|\widehat{T}\|_1+\frac{\beta_2\mathscr{N}_2}{\lambda_*}\|\widehat{C}\|_1]\|\xi\|_1^2. \tag{5.3}$$

Но в силу (5.2) и оценок (2.24) для $\hat{\mathbf{u}}$, $\widehat{T}$ и $\widehat{C}$ неравенство (5.3) возможно, только если $\xi = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{y}^* = 0$. Из фредгольмовости задачи (4.6)–(4.8) вытекает

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.1 *и условие* (5.2). *Тогда*

1) *однородное уравнение* (5.1) *имеет лишь тривиальное решение;*

2) *любой нетривиальный множитель Лагранжа, удовлетворяющий* (4.3), *является регулярным, т. е. имеет вид* $(1,\mathbf{y}^*)$*;*

3) *решение* $\mathbf{y}^*$ *уравнения* (4.3) *при* $\lambda_0 = 1$ *единственно.*

5.2. Единственность решения экстремальной задачи для функционала J_2. Исследуем единственность решения экстремальной задачи (3.4) в случае, когда $J = J_2$, а роль управления играет функция ψ в условии Дирихле для температуры. Последнее эквивалентно выбору в качестве K_2, K_3, K_4, K_5 и K_6 фиксированных элементов $\chi_0 \in L^2(\Gamma_N)$, $\alpha_0 \in L^\infty_+(\Gamma_N)$, $f_c^0 \in \mathscr{C}^*$, $k_0 \in L^2_+(\Omega)$ и $\mathbf{g}_0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$. В качестве K_1 выберем ограниченное подмножество $K_1 = \{\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D) : \psi = \psi_0$ на $\Gamma_D^0 \subset \Gamma_D, \operatorname{meas}\Gamma_D^0 > 0, \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} \le c_{10} < \infty\}$, состоящее из функций ψ, сужения которых на некоторый участок $\Gamma_D^0 \subset \Gamma_D$ границы Γ с ненулевой мерой $\operatorname{meas}\Gamma_D^0$ совпадают с заданной функцией $\psi_0 \in \gamma|_{\Gamma_D^0}(H^{1/2}(\Gamma_D))$. Положим $H^1(\Omega,\Gamma_D^0) = \{S \in H^1(\Omega) : S = 0$ на $\Gamma_D^0\}$. В силу неравенства Фридрихса — Пуанкаре имеем

$$\|S\|_1^2 \le \frac{1}{\alpha_1^*}|S|_1^2 \quad \forall S \in H^1(\Omega,\Gamma_D^0). \tag{5.4}$$

Здесь $\alpha_1^* \le \alpha_1$ — константа, зависящая от Ω и Γ_D^0, при этом $\alpha_1^* = \alpha_1$ при $\Gamma_D^0 = \Gamma_D$. С учетом вышеизложенного выберем $K = K_1 \times \{\chi_0\} \times \{\alpha_0\} \times \{f_c^0\} \times$

$\{k_0\} \times \{\mathbf{g}_0\}$, причем в (3.4) положим $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_6 = 0$. Таким образом, рассмотрим экстремальную задачу

$$J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|T|_1^2 \equiv \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla T|^2\, d\Omega \to \inf, \qquad F\big(\mathbf{x}, \psi, \chi_0, \alpha_0, f_c^0, k_0, \mathbf{g}_0\big) = 0, \quad \mathbf{x} \in X,\ \psi \in K_1. \tag{5.5}$$

Положим $v' = (\psi, \chi_0, \alpha_0, f_c^0, k_0, \mathbf{g}_0)$ и допустим, что выполняется условие

$$\frac{1}{\alpha_0\nu}\mathscr{N} M_{\mathbf{u}}^0 + \frac{1}{\alpha_0\nu}\frac{\beta_1\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}M_T^0 + \frac{1}{\alpha_0\nu}\frac{\beta_2\mathscr{N}_2}{\lambda_*}M_C^0 \le \frac{1}{2}, \tag{5.6}$$

где

$$M_{\mathbf{u}}^0 = \sup_{\psi\in K_2} M_{\mathbf{u}}(\mathbf{f}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, f, \chi_c, v'), \quad M_T^0 = \sup_{\psi\in K_2} M_T(\mathbf{f}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, f, \chi_c, v'),$$
$$M_C^0 = \sup_{\psi\in K_2} M_C(\mathbf{f}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, f, \chi_c, v').$$

Пусть $(\mathbf{x}, \psi) \equiv (\mathbf{u}, p, T, C, \psi)$ — решение задачи (5.5). В силу теорем 4.1, 5.1 существует единственный множитель Лагранжа $(1, \xi, \sigma, \zeta, \theta, \zeta_1, \eta)$ такой, что выполняются тождества (4.6)–(4.8), где следует положить $\lambda_0 = 1$, $\langle J_T'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \tau\rangle = \tilde{a}(T, \tau)$, $J_{\mathbf{u}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) = 0$, $J_C'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) = 0$, и вариационное неравенство (4.9), принимающее вид

$$\langle \zeta_1, \tilde{\psi} - \psi\rangle_{\Gamma_D} \le 0 \quad \forall \tilde{\psi} \in K_1. \tag{5.7}$$

Предположим теперь, что существуют два решения $(\mathbf{x}_i, \psi_i) \equiv (\mathbf{u}_i, p_i, T_i, C_i, \psi_i)$, $i = 1, 2$, задачи (5.5). В силу теоремы 2.4 для $\mathbf{u}_i$, T_i и C_i справедливы оценки вида

$$\|\mathbf{u}_i\|_1 \le M_{\mathbf{u}}^0, \quad \|T_i\|_1 \le M_T^0, \quad \|C_i\|_1 \le M_C^0, \quad i = 1, 2. \tag{5.8}$$

Обозначим через $(1, \mathbf{y}_i^*) \equiv (1, \xi_i, \sigma_i, \zeta_i, \theta_i, \zeta_1^i, \eta_i)$, $i = 1, 2$, отвечающие указанным решениям нетривиальные множители Лагранжа (определяемые при выполнении условия (5.6) единственным образом). Положим $\psi = \psi_1 - \psi_2$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$. Вычитая уравнения (2.3)–(2.6), записанные для $\mathbf{u}_2, p_2, C_2, \psi_2$, из соответствующих уравнений для $\mathbf{u}_1, p_1, C_1, \psi_1$ и полагая сначала $\mathbf{v} = \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $h = C \in \mathscr{C}$, а затем $\mathbf{v} = \xi$, $S = \theta$, $h = \eta$, будем иметь

$$b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \qquad T = \psi \equiv \psi_1 - \psi_2 \text{ на } \Gamma_D, \quad C \in \mathscr{C}, T \in H^1(\Omega, \Gamma_D^0), \tag{5.9}$$

$$\nu a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) + b_1(T, \mathbf{u}) - b_2(C, \mathbf{u}) = 0, \quad a_2(C, C) + c_2(\mathbf{u}, C_2, C) = 0, \tag{5.10}$$

$$\nu a(\mathbf{u}, \xi) + c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \xi) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \xi) + b_1(T, \xi) - b_2(C, \xi) = 0, \tag{5.11}$$

$$a_1(T, \theta) + c_1(\mathbf{u}_1, T, \theta) + c_1(\mathbf{u}, T_2, \theta) = 0, \quad a_2(C, \eta) + c_2(\mathbf{u}_1, C, \eta) + c_2(\mathbf{u}, C_2, \eta) = 0. \tag{5.12}$$

Из (5.10) с учетом (5.8) приходим к следующим оценкам для C и $\mathbf{u}$:

$$\|C\|_1 \le \frac{\mathscr{N}_2}{\lambda_*}M_C^0\|\mathbf{u}\|_1, \quad \|\mathbf{u}\|_1 \le \frac{\beta_1}{\alpha_0\nu - \mathscr{N} M_{\mathbf{u}}^0 - (\beta_2\mathscr{N}_2/\lambda_*)M_C^0}\|T\|_1. \tag{5.13}$$

Вычтем друг из друга уравнения (4.6)–(4.8) при $\lambda_0 = 1$, $J = J_2$, записанные для множителей $(1, \mathbf{y}_1^*)$ и $(1, \mathbf{y}_2^*)$, и положим $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\tau = T$, $\mu = C$. Получим

$$\nu a(\mathbf{u}, \xi) + c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \xi) + 2c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \xi_2) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \xi) + c_1(\mathbf{u}, T_1, \theta) + c_1(\mathbf{u}, T, \theta_2) + c_2(\mathbf{u}, C_1, \eta) + c_2(\mathbf{u}, C, \eta_2) = 0, \tag{5.14}$$

$$a_1(T,\theta)+c_1(\mathbf{u}_1,T,\theta)+c_1(\mathbf{u},T,\theta_2)+b_1(T,\xi)+|T|_1^2=-\langle\zeta_1,\psi\rangle_{\Gamma_D}, \tag{5.15}$$

$$a_2(C,\eta)+c_2(\mathbf{u}_1,C,\eta)+c_2(\mathbf{u},C,\eta_2)-b_2(C,\xi)=0. \tag{5.16}$$

Полагая $\tilde\psi=\psi_2$ в неравенстве (5.7) для ψ_1 и $\tilde\psi=\psi_1$ в неравенстве для ψ_2 и складывая полученные неравенства, будем иметь $-\langle\zeta_1,\psi\rangle_{\Gamma_D}\le 0$. Вычитая (5.11) из (5.14), первое (либо второе) уравнение в (5.12) из (5.15) (либо (5.16)) и складывая полученные выражения, приходим к неравенству

$$c(\mathbf{u},\mathbf{u},\xi_1+\xi_2)+c_1(\mathbf{u},T,\theta_1+\theta_2)+c_2(\mathbf{u},C,\eta_1+\eta_2)+|T|_1^2=-\langle\zeta_1,\psi\rangle_{\Gamma_D}\le 0. \tag{5.17}$$

Предположим, что выполняется условие

$$|c(\mathbf{u},\mathbf{u},\xi_1+\xi_2)+c_1(\mathbf{u},T,\theta_1+\theta_2)+c_2(\mathbf{u},C,\eta_1+\eta_2)|<|T|_1^2. \tag{5.18}$$

Тогда из (5.17) в силу оценки (5.4) при $S=T$ получим, что $T=0$, а следовательно, $\mathbf{u}=0$, $C=0$, $p=0$ и $\psi=0$. Таким образом, для доказательства единственности решения задачи (5.5) осталось найти условия на исходные данные, при которых выполняется (5.18).

Записав уравнения (4.6)–(4.8) при $\lambda_0=1$, $J=J_2$ для величин ξ_i, σ_i, ζ_i, θ_i, ζ_1^i и η_i при $\mathbf{u}=\mathbf{u}_i$, $T=T_i$, $C=C_i$, $i=1,2$, положим в них $\mathbf{w}=\xi_i$, $r=\sigma_i$, $\tau=\theta_i$, $\mu=\eta_i$. Получим

$$\nu a(\xi_i,\xi_i)+c(\xi_i,\mathbf{u}_i,\xi_i)+c_1(\xi_i,T_i,\theta_i)+c_2(\xi_i,C_i,\eta_i)=0,\quad b(\xi_i,\sigma_i)=0,\quad i=1,2, \tag{5.19}$$

$$a_1(\theta_i,\theta_i)+b_i(\theta_i,\xi_i)=-\tilde a(T_i,\theta_i), a_2(\eta_i,\eta_i)-b_2(\eta_i,\xi_i)=0,\quad i=1,2. \tag{5.20}$$

Из (5.20) приходим к следующим оценкам для θ_i и η_i:

$$\|\theta_i\|_1\le\frac{\beta_1}{\alpha_1\lambda}\|\xi_i\|_1+\frac{1}{\alpha_1\lambda}\|T_i\|_1,\quad \|\eta_i\|_1\le\frac{\beta_2}{\lambda_*}\|\xi_i\|_1,\quad i=1,2. \tag{5.21}$$

Используя (5.21), из (5.19) выводим, что

$$\left(\alpha_0\nu-[\mathscr{N}\|\mathbf{u}_i\|_1+\frac{\beta_1\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}\|T_i\|_1+\frac{\beta_2\mathscr{N}_2}{\lambda_*}\|C_i\|_1]\right)\|\xi_i\|_1^2\le\frac{\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}\|T_i\|_1^2\|\xi_i\|_1. \tag{5.22}$$

Отсюда с учетом (5.8) приходим к следующей оценке для ξ_i:

$$\|\xi_i\|_1\le\frac{(\mathscr{N}_1/\alpha_1\lambda)(M_T^0)^2}{\alpha_0\nu-[\mathscr{N}M_{\mathbf{u}}^0+(\beta_1\mathscr{N}_1/\alpha_1\lambda)M_T^0+(\beta_2\mathscr{N}_2/\lambda_*)M_C^0]},\quad i=1,2. \tag{5.23}$$

Поскольку знаменатели в оценке (5.23) для $\|\xi_i\|_1$ и оценке (5.13) для $\|\mathbf{u}\|_1$ не меньше $\alpha_0\nu/2$ в силу условия (5.6), то из (5.13), (5.23) и (5.6) выводим, что

$$\|\mathbf{u}\|_1\le\frac{2\beta_1}{\alpha_0\nu}\|T\|_1,\quad \|C\|_1\le\frac{\beta_1}{\beta_2}\|T\|_1,\quad \|\xi_i\|_1\le\frac{M_T^0}{\beta_1},\quad i=1,2. \tag{5.24}$$

Используя оценки (5.21), (5.24) и оценку (5.4) для функции $T\in H^1(\Omega,\Gamma_D^0)$, имеем

$$\begin{aligned}|c(\mathbf{u},\mathbf{u},\xi_1+\xi_2)&+c_1(\mathbf{u},T,\theta_1+\theta_2)+c_2(\mathbf{u},C,\eta_1+\eta_2)|\\&\le\frac{4\beta_1M_T^0}{\alpha_0\nu\alpha_1^*}\left[\frac{2\mathscr{N}}{\alpha_0\nu}+\frac{2\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}+\frac{\mathscr{N}_2}{\lambda_*}\right]|T|_1^2.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Из (5.25) следует, что условие (5.18) заведомо выполняется, если

$$\frac{4\beta_1M_T^0}{\alpha_0\nu\alpha_1^*}\left[\frac{2\mathscr{N}}{\alpha_0\nu}+\frac{2\mathscr{N}_1}{\alpha_1\lambda}+\frac{\mathscr{N}_2}{\lambda_*}\right]<1. \tag{5.26}$$

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 5.2. *Пусть в дополнение к условиям* (i)–(iv) $\chi_0 \in L^2(\Gamma_N)$, $\alpha_0 \in L^\infty_+(\Gamma_N)$, $f_c^0 \in \mathscr{C}^*$, $k_0 \in L^2_+(\Omega)$, $\mathbf{g}_0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$ — *фиксированные элементы и выполняются условия* (5.6), (5.26). *Тогда экстремальная задача* (5.5) *имеет единственное решение* $(\mathbf{u}, p, T, C, \psi) \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathscr{C} \times K_1$.

Следствие 5.1. *При выполнении условий теоремы* 5.2 *система оптимальности для экстремальной задачи* (5.5) *имеет единственное решение* ($\mathbf{u}$, p, T, C, $\psi, \xi, \sigma, \zeta, \theta, \zeta_1, \eta) \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathscr{C} \times K_1 \times \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times (\widetilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma))^* \times \mathscr{T} \times (H^{1/2}(\Gamma_D))^* \times \mathscr{C}$.

По аналогичной схеме может быть исследована единственность решения экстремальной задачи (3.4) для других функционалов качества при соответствующем выборе управлений. Формулировки теорем и их доказательства можно найти в [19].

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту РАН В. В. Пухначеву за полезные обсуждения результатов работы.

Замечание при корректуре. Сотрудник ИГ СО РАН В. Н. Старовойтов обратил внимание автора на то обстоятельство, что предложение 2.1 и его доказательство для липшицевой области можно найти в [22]. Автор выражает ему благодарность за указанную ссылку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.

2. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.

3. *Белолипецкий В. М., Шокин Ю. И.* Математическое моделирование в задачах защиты окружающей среды. Новосибирск: Инфолио-пресс, 1997.

4. *Gunzburger M. D., Hou L., Svobodny T. P.* The approximation of boundary control problems for fluid flows with an application to control by heating and cooling // Comput. Fluids. 1993. V. 22. P. 239–251.

5. *Abergel F., Casas E.* Some optimal control problems of multistate equation appearing in fluid mechanics // Math. Modeling Numer. Anal. 1993. V. 27. P. 223–247.

6. *Алексеев Г. В.* Стационарные задачи граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Докл. РАН. 1998. Т. 362, № 2. С. 174–177.

7. *Алексеев Г. В.* Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.

8. *Alekseev G. V., Tereshko D. A.* On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid // J. Inverse Ill-posed Problems. 1998. V. 6, N 6. P. 521–562.

9. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Стационарные задачи оптимального управления для уравнений вязкой теплопроводной жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 2. С. 24–44.

10. *Ito K., Ravindran S. S.* Optimal control of thermally convected fluid flows // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19, N 6. P. 1847–1869.

11. *Алексеев Г. В.* Обратные задачи обнаружения источников примеси в вязких жидкостях. Владивосток, 1999. 48 с. (Препринт/ИПМ ДВО РАН; № 8).

12. *Căpătină A., Stavre R.* A control problem in biconvective flow // J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ). 1998. V. 37, N 4. P. 585–595.

13. *Адомавичюс Э. А., Алексеев Г. В.* Теоретический анализ обратных экстремальных задач для стационарных уравнений массопереноса. Владивосток, 1999. 44 с. (Препринт/ИПМ ДВО РАН; № 7).

14. *Адомавичюс Э. А., Алексеев Г. В.* Теоретический анализ обратных экстремальных задач для стационарных уравнений массопереноса. II. Владивосток, 1999. 36 с. (Препринт/ИПМ ДВО РАН; № 18).

15. *Ames K. A., Straughan B.* Stability and Newtons's law of cooling in double diffusive flow // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 230. P. 57–69.
16. *Yang G. Z., Zabaras N.* The adjoint method for an inverse design problem in the directional solidification of binary alloys // J. Comp. Phys. 1998. V. 140, N 2. P. 432–452.
17. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. М.: Мир, 1981.
18. *Finn R., Solonnikov V.* Gradient estimates for solutions of the Navier — Stokes equations // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1997. V. 9. P. 29–39.
19. *Алексеев Г. В.* Теоретический анализ обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса. Владивосток, 2000. 60 с. (Препринт/ИПМ ДВО; № 7).
20. *Алексеев Г. В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Докл. РАН. 2000. Т. 375, № 3. С. 315–319.
21. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
22. *Galdi G.* An introduction to the mathematical theory of the Navier — Stokes equations. New York: Springer-Verl., 1994. V. II.

Статья поступила 5 июня 2000 г.

Алексеев Геннадий Валентинович
Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, Владивосток 690041
alekseev@iam.dvo.ru