*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5*

*УДК 517.925*

# БИФУРКАЦИЯ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

**Ю. В. Усачёв**

**Аннотация:** Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = Lx + X(x, \varepsilon)$, $X(0, \varepsilon) \equiv 0$ в окрестности состояния равновесия $x = 0$. Приводятся достаточные условия бифуркации инвариантного тора в случае, когда спектр матрицы $L$ состоит из нулевых и чисто мнимых собственных значений, а вектор-функция $X(x, \varepsilon)$ имеет по $x$, $\varepsilon$ в нуле третий порядок малости. Библиогр. 4.

Рассмотрим $(2n + l)$-мерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Lx + X(x, \varepsilon), \tag{1}$$

где $\varepsilon$ — параметр, $X(x, \varepsilon) \in \mathbb{C}^4_{x,\varepsilon}(\|x\| \leq x_0, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0)$ и $X(0, \varepsilon) \equiv 0$. Предполагается, что спектр матрицы $L$ состоит из $n$ пар чисто мнимых собственных значений $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_n$, $n \geq 1$, и нулевого собственного значения, алгебраическая кратность которого $l$ равна его геометрической кратности. Кроме того, пусть выполняется условие несоизмеримости:

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \lambda_k \neq 0, \text{ где целые числа } q_k \text{ таковы, что } 0 < \sum_{k=1}^{n} |q_k| \leq 4.$$

Исследуется вопрос о бифуркации инвариантного тора из положения равновесия $x = 0$ при $\varepsilon = 0$ [1]. Случай $\det L = 0$ изучался в работах [2, 3]. Здесь рассмотрим ситуацию, когда вектор-функция $X(x, \varepsilon)$ имеет по $x, \varepsilon$ в нуле третий порядок малости.

Нормализуем систему дифференциальных уравнений (1) до членов третьего порядка включительно [4]. В результате получим

$$\dot{y} = i\lambda y + y[B_1 y^* + \varepsilon B_2 z + \varepsilon^2 b + Y_2(z)] + Y(y, \bar{y}, z, \varepsilon), \tag{2}$$

$$\dot{z} = C_1 y^* C_2 z + \varepsilon C_3 y^* + \varepsilon^2 C_4 z + \varepsilon^3 c + Z_3(z, \varepsilon) + Z(y, \bar{y}, z, \varepsilon), \tag{3}$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_l)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $y^* = y\bar{y}$ $\big(a_1 a_2 = \big(a_1^1, \dots, a_1^n\big) \times \big(a_2^1, \dots, a_2^n\big) \stackrel{\text{def}}{=} \big(a_1^1 a_2^1, \dots, a_1^n a_2^n\big)\big)$; $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ — матрицы, размерность которых согласована с размерностью $y$ и $z$; $b$, $c$ — векторы; $Y_2(z)$ — однородный вектор-полином второго порядка; $Z_3(z, \varepsilon)$ — однородный вектор-полином третьего порядка, имеющий по $z$ порядок малости, не меньший двух; $Y(y, \bar{y}, z, \varepsilon)$, $Z(y, \bar{y}, z, \varepsilon)$ — вектор-функции четвертого порядка малости и выше по $y$, $\bar{y}$, $z$, $\varepsilon$. Отметим, что уравнения для $\bar{y}$ комплексно сопряжены уравнениям (2).

Перейдем в системе (2), (3) к амплитудным и угловым координатам по формулам

$$y = \rho e^{i\tau}, \quad \rho = (\rho_1, \dots, \rho_n), \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n), \quad e^{i\tau} = (e^{i\tau_1}, \dots, e^{i\tau_n}).$$

Будем иметь

$$\dot\rho = \rho \operatorname{Re}[B_1\rho^2 + \varepsilon B_2 z + \varepsilon^2 b + Y_2(z)] + \operatorname{Re} Y(\rho, \tau, z, \varepsilon), \tag{4}$$

$$\dot z = C_1\rho^2 C_2 z + \varepsilon C_3\rho^2 + \varepsilon^2 C_4 z + \varepsilon^3 c + Z_3(z, \varepsilon) + Z(\rho, \tau, z, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\dot\tau = \lambda + \operatorname{Im}[B_1\rho^2 + \varepsilon B_2 z + \varepsilon^2 b + Y_2(z)] + \rho^{-1} \operatorname{Im} Y(\rho, \tau, z, \varepsilon), \tag{6}$$

где $\rho^2 = \rho\rho$, $\rho^{-1} = \left(\rho_1^{-1}, \dots, \rho_n^{-1}\right)$.

Рассмотрим бифуркационную систему

$$\operatorname{Re}[B_1\rho^2 + \varepsilon^2 b] = 0, \tag{7}$$

$$C_3\rho^2 + \varepsilon^2 c = 0. \tag{8}$$

Пусть система уравнений (7), (8) при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ имеет покомпонентно ненулевое решение вида $\rho = \varepsilon\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Введем в системе (4)–(6) новые переменные по формулам

$$\rho = \varepsilon(\alpha + \sqrt{\varepsilon} v_1), \quad z = \sqrt{\varepsilon^3} v_2. \tag{9}$$

В результате получим систему

$$\dot u = \varepsilon^2 D u + \sqrt{\varepsilon^5} U(u, \tau, \varepsilon), \tag{10}$$

$$\dot\tau = \lambda(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon^5} H(u, \tau, \varepsilon), \tag{11}$$

где $u = (v_1, v_2)$, $\lambda(0) = \lambda$, $D = [D_{ij}]_1^2$, $D_{11} = 2A \operatorname{Re} B_1 A$, $D_{12} = A \operatorname{Re} B_2$, $D_{21} = 2C_3 A$, $D_{22} = C_1\alpha^2 \odot C_2\bigl(\Delta_1 \odot \Delta_2 = \left[\delta_{ij}^1\right]_1^n \odot \left[\delta_{ij}^2\right]_1^n \overset{\mathrm{def}}{=} [\delta_{ij}^1 \delta_{ij}^2]_1^n\bigr)$, $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $C_1\alpha^2 = (C_1\alpha^2, \dots, C_1\alpha^2)$ — $l \times l$-матрица, $\alpha^2 = \alpha\alpha$; $U(u, \tau, \varepsilon)$, $H(u, \tau, \varepsilon)$ — непрерывные $2\pi$-периодические по $\tau$ вектор-функции класса $\mathbb{C}^4_{u,\tau}(\|u\| \le u_0,\ \tau \in \mathbb{R}^n, 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$.

Пусть $P(\varepsilon) = \max\{\|U(u, \tau, \varepsilon)\|,\ \|H(u, \tau, \varepsilon)\|\}$, $Q(\varepsilon)$ — постоянная Липшица по $u, \tau$ функций $U(u, \tau, \varepsilon)$, $H(u, \tau, \varepsilon)$.

Для доказательства последующей теоремы нам будет необходимо вспомогательное утверждение, которое мы оформим в виде леммы.

**Лемма.** *Если для непрерывной и неотрицательной на $\mathbb{R}$ функции $p(t)$ выполнено интегральное неравенство*

$$p(t) \le \delta + \left| \int_0^t (\mu p(t_1) + \nu)\, dt_1 \right|, \quad \delta \ge 0,\ \mu > 0,\ \nu > 0, \tag{I}$$

*то $p(t) \le \delta e^{\mu|t|} + \nu\mu^{-1}(e^{\mu|t|} - 1)$.*

Доказательство. Пусть $t \ge 0$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \delta + \int_0^t (\mu x(t_1) + \nu)\, dt_1 \tag{II}$$

и будем искать его решение методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем функцию $x_0(t) = p(t)$. Затем положим

$$x_{j+1}(t) = \delta + \int\limits_0^t (\mu x_j(t_1) + \nu)\, dt_1$$

для любого $j \in \mathbb{N}_0$. Так как подынтегральное выражение в (II) линейно относительно $x(t)$, последовательность приближений сходится к решению $x(t) = q(t)$ уравнения (II) при любом $t \geq 0$. Покажем теперь, что $q(t) \geq p(t)$. Действительно, предполагая, что

$$x_j(t) \leq \delta + \int\limits_0^t (\mu x_j(t_1) + \nu)\, dt_1,$$

получаем

$$x_{j+1}(t) \leq \delta + \int\limits_0^t (\mu x_{j+1}(t_1) + \nu)\, dt_1, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Следовательно, в силу неравенства (I) по принципу математической индукции, для любого $j \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$x_{j+1}(t) \leq \delta + \int\limits_0^t (\mu x_{j+1}(t_1) + \nu)\, dt_1.$$

Тогда последовательность приближений монотонно возрастает, а значит, $q(t) \geq x_j(t)$ для любого $j \in \mathbb{N}_0$, в частности, $q(t) \geq x_0(t) = p(t)$. Для завершения доказательства этого случая отметим, что решение уравнения (II) совпадает с решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = \mu x(t) + \nu$$

при начальном условии $x(0) = \delta$ и, следовательно, имеет вид

$$q(t) = \delta e^{\mu t} + \nu \mu^{-1}(e^{\mu t} - 1).$$

Пусть теперь $t < 0$. Проводя аналогичные рассуждения, устанавливаем, что

$$q(t) \leq \delta e^{-\mu t} + \nu \mu^{-1}(e^{-\mu t} - 1).$$

Таким образом, доказательство леммы завершено. □

**Теорема.** *Если $D$ — некритическая матрица, то имеет место бифуркация $n$-мерного инвариантного тора системы дифференциальных уравнений* (1).

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathbb{C}_n^{2\pi}$ $n$-мерных $2\pi$-периодических по $\tau$ вектор-функций $f(\tau, \varepsilon)$ таких, что

$$|f(\tau, \varepsilon)| \leq M \leq u_0, \quad |f(\tau_1, \varepsilon) - f(\tau_2, \varepsilon)| \leq K|\tau_1 - \tau_2|$$

для любых $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^n$ и для любого $\varepsilon$, удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$; $M, K \in \mathbb{R}^+$.

Для некоторой функции $f = f(\tau, \varepsilon)$ из семейства $\mathbb{C}_n^{2\pi}$ рассмотрим уравнение

$$\dot{\tau} = \lambda(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon^5} H(f, \tau, \varepsilon). \tag{12}$$

Через $\tau_t = T^f(t,\varepsilon,\tau_0)$ обозначим решение этого уравнения с начальными данными $0,\tau_0$. Так как правая часть уравнения (12) является функцией $2\pi$-периодической по угловой переменной $\tau$, то

$$T^f(t,\varepsilon,\tau_0+2\pi) = T^f(t,\varepsilon,\tau_0) + 2\pi. \tag{13}$$

Рассмотрим оператор $S$, преобразующий функцию $f$ из семейства $\mathbb{C}_n^{2\pi}$ в функцию

$$S_{\tau,\varepsilon}(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\varepsilon^2 t)\sqrt{\varepsilon^5}U(f(T^f(t,\varepsilon,\tau),\varepsilon), T^f(t,\varepsilon,\tau),\varepsilon)\,dt,$$

где $G(\varepsilon^2 t)$ — функция Грина системы $\dot{u} = \varepsilon^2 Du$, допускающая оценку

$$\|G(\varepsilon^2 t)\| \le \beta e^{-\varepsilon^2\alpha|t|}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{14}$$

Исходя из свойства (13), можем заключить, что $S_{\tau,\varepsilon}(f)$ является $2\pi$-периодической функцией по переменной $\tau$. Далее, на основании неравенства (14) получаем

$$|S_{\tau,\varepsilon}(f)| \le 2\sqrt{\varepsilon}\alpha^{-1}\beta P(\varepsilon).$$

Уменьшая $\varepsilon_0$, имеем $|S_{\tau,\varepsilon}(f)| \le M$.

Пусть $\tau_t^* = T^{f^*}(t,\varepsilon,\tau^*)$. Тогда

$$|S_{\tau^*,\varepsilon}(f^*) - S_{\tau_0,\varepsilon}(f)| \le \sqrt{\varepsilon^5}\beta Q(\varepsilon)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\varepsilon^2|t|}((1+K)|\tau_t^* - \tau_t| + \|f^* - f\|)\,dt.$$

Но согласно доказанной лемме

$$\begin{aligned}|\tau_t^* - \tau_t| &\le |\tau^* - \tau_0| + \sqrt{\varepsilon^5}Q(\varepsilon)\Big|\int\limits_0^t((1+K)|\tau_\theta^* - \tau_\theta| + \|f^* - f\|)\,d\theta\Big| \\ &\le |\tau^* - \tau_0|e^{\sqrt{\varepsilon^5}Q(\varepsilon)(1+K)|t|} + \|f^* - f\|(1+K)^{-1}(e^{\sqrt{\varepsilon^5}Q(\varepsilon)(1+K)|t|} - 1).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|S_{\tau^*,\varepsilon}(f^*) - S_{\tau_0,\varepsilon}(f)| &\le \sqrt{\varepsilon^5}\beta Q(\varepsilon)((1+K)|\tau^* - \tau_0| + \|f^* - f\|) \\ &\quad\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\sqrt{\varepsilon^5}Q(\varepsilon)(1+K)-\varepsilon^2\alpha)|t|}\,dt.\end{aligned} \tag{15}$$

Потребуем, чтобы $2\sqrt{\varepsilon}Q(\varepsilon)(1+K)\alpha < \alpha$ при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Тогда, как следует из (15),

$$|S_{\tau^*,\varepsilon}(f^*) - S_{\tau_0,\varepsilon)}(f)| \le 4\sqrt{\varepsilon}\alpha^{-1}\beta Q(\varepsilon)((1+K)|\tau^* - \tau_0| + \|f^* - f\|).$$

Уменьшим $\varepsilon_0$, если это необходимо, настолько, чтобы $4\sqrt{\varepsilon}\beta Q(\varepsilon)(1+K) < \alpha K$. Тогда окончательно получим

$$|S_{\tau^*,\varepsilon}(f^*) - S_{\tau_0,\varepsilon)}(f)| \le K|\tau^* - \tau_0| + \rho\|f^* - f\|,\ \rho = \sqrt{\varepsilon}\alpha^{-1}\beta Q(\varepsilon) < 1.$$

В частности, при $f = f^*$ имеем

$$|S_{\tau^*,\varepsilon}(f^*) - S_{\tau_0,\varepsilon)}(f)| \le K|\tau^* - \tau_0|,$$

а при $\tau^* = \tau_0 = \tau$ —

$$\|S_{\tau^*,\varepsilon}(f^*) - s_{\tau_0,\varepsilon)}(f)\| \le \rho\|f^* - f\|,$$

т. е. при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ оператор $S$, определенный на классе функций $\mathbb{C}_n^{2\pi}$, является оператором сжатия. В силу принципа сжимающих отображений оператор $S$ имеет неподвижную точку $\tilde f = \tilde f(\tau, \varepsilon)$, где

$$\tilde f(\tau,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\varepsilon^2 v)\sqrt{\varepsilon^5}U(\tilde f(T^{\tilde f}(v,\varepsilon,\tau),\varepsilon), T^{\tilde f}(v,\varepsilon,\tau),\varepsilon)\,dv. \tag{16}$$

Заменим в соотношении (16) $\tau$ на $T^{\tilde f}(t,\varepsilon,\tau_0)$ и заметим, что согласно нашим обозначениям

$$T^{\tilde f}(v,\varepsilon,T^{\tilde f}(t,\varepsilon,\tau_0)) = T^{\tilde f}(v+t,\varepsilon,\tau_0).$$

Тогда, вводя вместо $v$ в качестве новой переменной интегрирования $u = v + t$ и полагая для упрощения

$$T^{\tilde f}(t,\varepsilon,\tau_0) = \tilde\tau(t,\varepsilon), \quad \tilde f(T^{\tilde f}(t,\varepsilon,\tau_0),\varepsilon) = \tilde f(t,\varepsilon),$$

из (16) получаем

$$\tilde f(t,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\varepsilon^2(u-t))\sqrt{\varepsilon^5}U(\tilde f(u,\varepsilon),\tilde\tau(u,\varepsilon),\varepsilon)\,du.$$

Дифференцируя это выражение по $t$, видим, что функции $\tilde f(t,\varepsilon)$, $\tilde\tau(t,\varepsilon)$ удовлетворяют системе (10), (11) при любых $\tau_0$. Следовательно, уравнение $u = \tilde f(\tau,\varepsilon)$ задает инвариантное многообразие системы (10), (11). Учитывая замену (9), можем заключить, что для системы дифференциальных уравнений (1) имеет место бифуркация $n$-мерного инвариантного тора. $\square$

Замечание. Пусть $l = 0$, т. е. матрица $L$ не имеет нулевых собственных значений. Тогда система бифуркационных уравнений (7), (8) принимает вид (7). Для того чтобы система (7) имела решение $\rho = \varepsilon\alpha$ и выполнялось требование некритичности матрицы $D$, необходимо предположить, чтобы $\det \operatorname{Re} B_1 \ne 0$ и $\operatorname{Re} b \ne 0$.

Система бифуркационных уравнений (7), (8) примет вид (7) и в том случае, если $C_3 = 0$ и $c = 0$, т. е. если среди членов третьего порядка системы уравнений (5) отсутствуют члены, не зависящие от $z$.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot x_1 &= -x_2 - x_1x_2^2 - x_3^3 + \varepsilon^2 x_1 + X_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\varepsilon),\\
\dot x_2 &= x_1 - x_1^3 + 4x_5^3 - 2\varepsilon x_2^2 + X_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\varepsilon),\\
\dot x_3 &= -16x_4 + 2x_1^3 - 3x_3x_4^2 + \varepsilon x_3^2 + X_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\varepsilon),\\
\dot x_4 &= x_3 - x_2x_5^2 + x_3^3 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 x_4 + X_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\varepsilon),\\
\dot x_5 &= -2x_1^2x_4 - x_5^3 + 2\varepsilon^2 x_5 + X_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\varepsilon),
\end{aligned}$$

где $X_i$ принадлежат $C^4_{x,\varepsilon}(\|x\| \le x_0, \varepsilon \le \varepsilon_0)$ и имеют четвертый или выше порядок малости по $x,\varepsilon$, $x = (x_1,\dots,x_5)$, $i = \overline{1,5}$. Отметим, что здесь $n = 2$, $l = 1$.

В результате нормализации до членов порядка 3 включительно получим

$$
\begin{aligned}
\dot y_1 &= iy_1 - y_1\left[\frac{1+3i}{2}y_1\bar y_1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right] + \dots,\\
\dot y_2 &= 4iy_2 - y_2\left[\left(\frac{3}{32} - 6i\right)y_2\bar y_2 - \frac{3}{8}\varepsilon^2\right] + \dots,\\
\dot z &= -z^3 + \varepsilon^2 z + \dots,
\end{aligned}
$$

где точками обозначены члены, имеющие четвертый порядок малости и выше по $y_1,\ \bar y_1,\ y_2,\ \bar y_2,\ z,\ \varepsilon$.

Система бифуркационных уравнений

$$\frac{1}{2}\rho_1^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 = 0, \quad \frac{3}{32}\rho_2^2 - \frac{3}{8}\varepsilon^2 = 0$$

имеет решение $\rho_1 = \varepsilon,\ \rho_2 = 2\varepsilon$. Следовательно, $D = \operatorname{diag}(-1, -3/4, 2)$. В силу доказанной теоремы для рассматриваемой системы имеет место бифуркация двумерного инвариантного тора.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Бибиков Ю. Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991.
2. *Langford W. F.* Periodic and steady-state mode interactions lead to tori // SIAM J. Appl. Math. 1979. V. 37, N 1. P. 22–48.
3. *Волков Д. Ю.* Бифуркация инвариантных торов из состояния равновесия при наличии характеристических чисел // Вестн. ЛГУ. 1988. Сер. 1, вып. 2, № 6. С. 102–103.
4. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.


*Статья поступила 8 июля 1998 г.*

*Усачёв Юрий Владимирович*
*Рязанский институт воздушно-десантных войск, Рязань 390031*
uyv@ttc.ryazan.ru