Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 512.5

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ВЛОЖЕНИИ ШМЕЛЬКИНА

Е. И. Тимошенко

Аннотация: Изучается подгруппа Фиттинга для некоторых фактор-групп свободного произведения с использованием вложения Шмелькина. Полученное описание подгруппы Фиттинга применяется при исследовании универсальной теории метабелевых произведений групп. Библиогр. 9.

Универсальной теорией группы G называют совокупность всех $\forall$-формул, истинных на группе G.

Две группы G_1 и G_2 называют *универсально эквивалентными*, если их универсальные теории совпадают.

Будем обозначать универсальную теорию группы G через $\mathrm{Th}_\forall(G)$.

О. Шапюи в [1, 2] описал универсальную теорию свободной метабелевой группы. Напомним необходимые определения и сформулируем некоторые его результаты.

Известно (см., например, [3]), что все свободные разрешимые группы неединичного ранга универсально эквивалентны. В частности, универсально эквивалентны все неабелевы метабелевы группы. В дальнейшем через S обозначим свободную метабелеву группу ранга ≥ 2.

Обозначим через $\mathrm{uncl}(S)$ — класс групп, удовлетворяющих универсальной теории группы S.

Для группы G обозначим через $\mathrm{Fit}(G)$ подгруппу Фиттинга, т. е. произведение всех нильпотентных нормальных подгрупп из G. Подгруппа $\mathrm{Fit}(G)$ локально нильпотентна.

Группа G называется *ρ-группой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) G — метабелева группа без кручения;

2) $\mathrm{Fit}(G)$ — изолированная абелева подгруппа из G;

3) $\mathbf{Z}(G/\mathrm{Fit}(G))$-модуль $\mathrm{Fit}(G)$ не имеет кручения.

Группа G называется *$\forall$-свободной*, если ее универсальная теория $\mathrm{Th}_\forall(G)$ совпадает с универсальной теорией группы S.

Сформулируем фрагмент основных результатов Шапюи об универсальной теории свободной метабелевой группы.

i) Пусть G — группа. Тогда условия

a) $G \in \mathrm{uncl}(S)$,

b) G является ρ-группой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00567), научной программы Министерства образования Российской Федерации «Фундаментальные исследования высшей школы. Университеты России» и гранта Министерства образования Российской Федерации.

эквивалентны.

ii) Если G — неабелева группа и $G \in \mathrm{uncl}(S)$, то G является $\forall$-свободной метабелевой группой.

iii) Пусть G — конечно порожденная неабелева группа, $W_{m,n}$ — дискретное сплетение свободных абелевых групп A_m и A_n рангов m и n соответственно. Группа G является $\forall$-свободной метабелевой группой тогда и только тогда, когда при некоторых n и m ее можно вложить в $W_{m,n}$.

Хорошо известен следующий критерий универсальной эквивалентности. Две группы G_1 и G_2 универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда каждую конечную подмодель одной группы можно вложить в другую группу.

С помощью этого критерия в [4] доказано, что универсальная эквивалентность сохраняется при дискретном сплетении групп. Легко доказать, что универсальная эквивалентность сохраняется при свободном и прямом произведении групп, т. е. если $\mathrm{Th}_\forall(A_1) = \mathrm{Th}_\forall(B_1)$ и $\mathrm{Th}_\forall(A_2) = \mathrm{Th}_\forall(B_2)$, то $\mathrm{Th}_\forall(A_1 \times A_2) = \mathrm{Th}_\forall(B_1 \times B_2)$ и $\mathrm{Th}_\forall(A_1 * A_2) = \mathrm{Th}_\forall(B_1 * B_2)$. Так как прямое произведение в другой терминологии является вербальным произведением в многообразии $\mathbf{A}$ всех абелевых групп, а свободное произведение — вербальным произведением в многообразии $\mathbf{G}$ всех групп, то из $\mathrm{Th}_\forall(A_1) = \mathrm{Th}_\forall(B_1)$ и $\mathrm{Th}_\forall(A_2) = \mathrm{Th}_\forall(B_2)$ следует, что $\mathrm{Th}_\forall(A_1 \underset{\mathbf{A}}{*} A_2) = \mathrm{Th}_\forall(B_1 \underset{\mathbf{A}}{*} B_2)$ и $\mathrm{Th}_\forall(A_1 \underset{\mathbf{G}}{*} A_2) = \mathrm{Th}_\forall(B_1 \underset{\mathbf{G}}{*} B_2)$.

Верно ли это утверждение для других многообразий? В связи с исследованиями Шапюи универсальной теории свободной метабелевой группы этот вопрос интересен для метабелевых произведений групп $A \underset{\mathbf{A}^2}{*} B$.

Для исследования метабелевых произведений групп применяется вложение Шмелькина [5], а также его обобщение, полученное Н. С. Романовским [6, 7].

Пусть A_i $(i \in I)$ — нетривиальные группы, X — свободная группа с базисом $\{x_j \mid j \in J\}$; R — нормальная подгруппа из группы $F = (\underset{i\in I}{*} A_i) * X$ такая, что $R \cap A_i = 1$ при $i \in I$.

Теорема 1 связана с изучением подгруппы Фиттинга для групп вида F/R'. Она используется при доказательстве теоремы 2. В связи с приведенными результатами Шапюи подгруппа Фиттинга влияет на универсальную теорию группы. Из теоремы 1 следует, что подгруппа Фиттинга является формульной подгруппой для групп вида F/R'.

Предложение 1 показывает, что по аналогии со свободной метабелевой группой подгруппа Фиттинга для метабелевых произведений $\forall$-свободных метабелевых групп совпадает с коммутантом.

Предложение 2 и его следствие демонстрирует, насколько широк класс $\mathrm{uncl}(S)$. И, наконец, теорема 2 отвечает на вопрос о сохранении универсальной эквивалентности при метабелевом произведении групп. В общем случае ответ отрицателен. Но метабелево произведение свободных абелевых групп позволяет получить $\forall$-свободные метабелевы группы.

Приведем некоторые необходимые сведения об общем вложении Шмелькина [7]. Во введенных выше обозначениях пусть $\overline{G} = F/R$, $G = F/R$, T — свободный правый $\mathbf{Z}\overline{G}$-модуль с базой $\{t_l \mid l \in I \cup J\}$.

Элементам $a_i \in A_i$ поставим в соответствие матрицы $\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ t_i(a_i - 1) & 1 \end{pmatrix}$, а элементам x_j — матрицы $\begin{pmatrix} \overline{x}_j & 0 \\ t_j & 1 \end{pmatrix}$, где $\overline{x}_j$ — образ элемента x_j в группе $\overline{G}$. Это отображение продолжается до вложения группы G в группу матриц $\begin{pmatrix} \overline{G} & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$. При этом образом элемента $g \in G$ является матрица $\begin{pmatrix} \overline{g} & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix}$, где

$$\tau = \sum_{l \in I \cup J} t_l D_l(g)$$

— элемент модуля T, а $D_l g$ — образы частных производных Фокса от элемента g в кольце $\mathbf{Z}\overline{G}$.

Производные Фокса определяются однозначно следующими формулами. Если $a_i \in A_i$ $(i \in I)$, то $D_i(a_i) = a_i - 1$, $D_p(a_i) = 0$ при $i \neq p$.

$$D_j(x_j) = 1 (j \in J), \quad D_p(x_j) = 0 \quad \text{при} \quad p \neq j. \tag{1}$$

Если $u, v \in \mathbf{Z}F$, то $D_q(u + v) = D_q(u) + D_q(v) D_q(uv) = D_q(u)v + \epsilon(u) D_q(v)$ $(q \in I \cup J)$, где $\epsilon : \mathbf{Z}F \to \mathbf{Z}$ — отображение тривиализации.

Как обычно, $[x, y] = x^{-1} y^{-1} xy$.

Теорема 1. *Пусть $A_1, \dots, A_n$ — нетривиальные группы, X_r — свободная группа ранга r, $F = A_1 * \dots * A_n * X_r$, $n + r \geq 2$, R — нормальная подгруппа из F, $F \cap A_t = 1$ $(t = 1, \dots, n)$, $G = F/R'$, $\overline{G} = F/R$, $N = R/R'$. Тогда* $\operatorname{Fit}(G) = N$ *и подгруппа* $\operatorname{Fit}(G)$ *выделяется в группе G универсальной формулой.*

Доказательство. Предположим, что для элементов $a \in N$ и $g \in G$ коммутатор $[a, g, \dots, g]$ равен 1 и $2 \leq m$ — количество вхождений элемента g в этот коммутатор. Докажем, что тогда $[a, g] = 1$.

Вычислим, используя формулы (1), значения частных производных Фокса D_i $(i = 1, \dots, n + r)$ от элемента $[a, g, \dots, g]$. Получим

$$D_i[a, g, \dots, g] = D_i a \cdot (\bar{g} - 1)^m,$$

где черта означает образ элемента из группы G в группе $\bar{g}$ при естественном гомоморфизме $G \to \overline{G}$.

Так как $[a, g, \dots, g] = 1$, то $D_i a \cdot (\bar{g} - 1)^m = 0$ $(i = 1, \dots, n + r)$. Возможны два случая.

Случай 1. $D_i a \cdot (\bar{g} - 1)^{m-1} = 0$ при $i = 1, \dots, n + r$.

Это равносильно тому, что коммутатор $[a, g, \dots, g]$, в котором элемент g встречается $m - 1$ раз, равен 1. Из индукционного предположения заключаем, что $[a, g] = 1$.

Случай 2. Для некоторого $i \in \{1, \dots, n + r\}$ имеет место неравенство $D_i a \cdot (\bar{g} - 1)^{m-1} \neq 0$.

Пусть t_j, $j \in J$, — все представители левых смежных классов группы $\overline{G}$ по бесконечной циклической группе $\langle \bar{g} \rangle$. Для некоторого конечного подмножества $J_0 \subseteq J$ возможна запись

$$D_i a \cdot (\bar{g} - 1)^{m-1} = \sum_{j_0 \in J_0} t_{j_0} \alpha_{j_0}, \tag{2}$$

где α_{j_0} — ненулевые элементы из кольца $\mathbf{Z}\langle \bar{g} \rangle$. Но тогда $\alpha_{j_0}(\bar{g} - 1) = 0$ для любого $j_0 \in J_0$.

Если элемент $\bar{g}$ имеет бесконечный порядок, то для $\alpha_j \neq 0$ это равенство невозможно.

Предположим, что $\bar{g}$ — элемент конечного порядка l. Тогда каждый элемент α_j ($j \in J$) можно записать в виде

$$\alpha_j = a_{0j} + a_{1j}\bar{g} + \dots + a_{l-1,j}\bar{g}^{l-1}$$

для некоторых $a_{0j}, \dots, a_{m-1,j} \in \mathbf{Z}$. Равенство $\alpha_j(\bar{g}-1) = 0$ влечет $a_{0j} = \dots = a_{l-1,j} = a_j$. Элемент $D_i a$ также можно записать в виде (2):

$$D_i a = \sum_{j_1 \in J_1} t_{j_1}\beta_{j_1}, \tag{3}$$

где $J_0 \subseteq J_1$, $\beta_{j_1} \in \mathbf{Z}\langle\bar{g}\rangle$. Из (2) и (3) для всех $j_0 \in J_0$ получим

$$\beta_{j_0}(\bar{g}-1)^{m-1} = a_{j_0}(1 + \bar{g} + \dots + \bar{g}^{l-1}). \tag{4}$$

Из (4) при тривиализации $\epsilon : \mathbf{Z}\langle\bar{g}\rangle \to \mathbf{Z}$ получаем $la_{j_0} = 0$ при $j_0 \in J_0$.

Завершим доказательство теоремы. Пусть $g \in \operatorname{Fit}(G)$ и a — любой элемент из N. Так как $N \subseteq \operatorname{Fit}(G)$, то группа, порожденная элементами g и a, нильпотентна. Значит, $[a, g, \dots, g] = 1$. Но тогда $[a, g] = 1$ для любого $a \in N$. Из леммы 2 [8] следует, что $g \in N$.

Покажем теперь, что формула

$$Y(g) \rightleftharpoons \forall x([g^x, g] = 1)$$

выделяет подгруппу N. Пусть элемент $g \in G$ удовлетворяет этой формуле. Тогда его нормальное замыкание $\langle g\rangle^G$ — абелева подгруппа. Таким образом, для любого $a \in N$ имеет место равенство $[a, g, g] = 1$. Но тогда $[a, g] = 1$ и, следовательно, $g \in N$. Теорема доказана.

В [9] А. Ф. Красников доказал, в частности, что для групп вида X_r/R', где X_r — свободная группа ранга r, подгруппа R/R' является эпиморфно допустимой, т. е. переходит в себя при любом эпиморфизме группы X_r/R' на себя. Из теоремы 1 получаем более общее

Следствие 1. *Подгруппа R/R' эпиморфно допустима в группе F/R'.*

Даже для группы G из класса $\operatorname{uncl}(S)$ равенство $\operatorname{Fit}(G) = G'$ не обязано выполняться. Например, это не верно для группы $W_{1,1}$ — дискретного сплетения двух бесконечных циклических групп. Тем не менее верно

Предложение 1. *Пусть A, B — конечно порожденные $\forall$-свободные метабелевы группы. Если A/A' и B/B' — группы без кручения, то $\operatorname{Fit}(A \underset{\mathbf{A}^2}{*} B)$ совпадает с коммутантом группы $A \underset{\mathbf{A}^2}{*} B$.*

Доказательство. Обозначим $G = A \underset{\mathbf{A}^2}{*} B$. Каждый элемент $g \in G$ можно записать в виде $g = abd$, где a — элемент из образа группы A в группе G, b — элемент из образа группы B в группе G, а элемент d принадлежит образу декартовой подгруппы $D = \langle [A, B]\rangle^{A*B}$ в группе G.

Предположим, что $g \in \operatorname{Fit}(G)$. Выберем $1 \neq a' \in A'$. Так как $A' \subseteq G' \subseteq \operatorname{Fit}(G)$, то группа, порожденная элементами g и a', нильпотентна, значит,

$$[a', ab, \dots, ab] = 1, \tag{5}$$

ибо $d \in G'$. Предположим, что $b \notin B'$. Рассмотрим естественный гомоморфизм группы G на группу $\widetilde{G} = A \underset{\mathbf{A}^2}{*} \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} = B/B'$. Из (5) вытекает, что

$$[a', a\tilde{b}, \dots, a\tilde{b}] = 1 \tag{6}$$

и $\tilde{b}$ — неединичный элемент из абелевой группы без кручения $\widetilde{B}$.

Поскольку группа A универсально эквивалентна группе S и конечно порождена, она является подгруппой группы $W_{n,n} = A_n \wr B_n$ для некоторого $n \geq 1$. Можно считать, что $n \geq$ ранг $(\widetilde{B})$.

Рассмотрим вложение ϵ_1 группы A в группу $W_{n,n}$. При этом элемент a' переходит в базовую подгруппу $\overline{A}_n$ группы $W_{n,n}$, так как он лежит в коммутанте. Образ $\epsilon_1(a)$ элемента a не обязан лежать в подгруппе $\overline{A}_n$. Возможны два случая.

1. $\epsilon_1(a) \in \overline{A}_n$.

Рассмотрим какое-либо вложение группы $\widetilde{B}$ в группу B_n. Обозначим его через ϵ_2. Таким образом, обе группы A и $\widetilde{B}$ вложены в группу $W_{n,n}$. Тогда существует гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ в группу $W_{n,n}$, совпадающий на A и $\widetilde{B}$ с ϵ_1 и ϵ_2 соответственно. Обозначим этот гомоморфизм через α. Тогда

$$[\alpha(a'), \alpha(a)\alpha(\tilde{b}), \dots, \alpha(a)\alpha(\tilde{b})] = [\epsilon_1(a'), \epsilon_1(a)\epsilon_2(\tilde{b}), \dots, \epsilon_1(a)\epsilon_2(\tilde{b})] \neq 1, \qquad (7)$$

так как $\epsilon_1(a)\epsilon_2(\tilde{b}) \notin \overline{A}_n$, а $1 \neq \epsilon_1(a') \in \overline{A}_n$.

2. $\epsilon(a) \notin \overline{A}_n$.

Пусть $b_1, \dots, b_n$ — базис группы B_n, а $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n, \dots, \tilde{b}_m$ — базис группы $\widetilde{B}$. Пусть t — целое число. Через $\epsilon_{3,t}$ обозначим вложение группы $\widetilde{B}$ в группу B_n, при котором элементы $\tilde{b}_j$ $(j = 1, \dots, m)$ переходят в элементы b_j^t. Выберем t так, что $\epsilon_1(a)\epsilon_{3,t}(\tilde{b}) \notin \overline{A}_n$. Заменим ϵ_2 в формуле (7) на $\epsilon_{3,t}$ и получим аналогичное неравенство.

Полученное противоречие доказывает, что $b \in B'$. Аналогично $a \in A'$. Таким образом, $g \in G'$. Предложение доказано.

Свободная метабелева группа S обладает тем свойством, что ее абелизация $S_{ab} = S/S'$ — группа без кручения. Однако это свойство не записывается на языке $\forall$-формул, как показывает следующее предложение. Поэтому ограничение из предложения 1 о том, что группы A/A' и B/B' не имеют кручения, не выполняются автоматически для всех групп из класса $\mathrm{uncl}(S)$. Более точно, верно следующее

Предложение 2. *Существует конечно порожденная $\forall$-свободная метабелева группа G такая, что G/G' содержит элементы конечного порядка.*

Доказательство. Рассмотрим группу $W_{1,1} = \langle a \rangle \wr \langle b \rangle$ — дискретное сплетение двух бесконечных циклических групп. В качестве G рассмотрим подгруппу $W_{1,1}$, порожденную элементами b, a_1^2, $a_1 a_2^{-1}$, где $a_i = b^{-i} a_1 b^i$. Так как каждая неабелева конечно порожденная подгруппа из $W_{1,1}$ является $\forall$-свободной метабелевой группой, достаточно доказать, что группа G/G' содержит элементы конечного порядка.

Подгруппа G' содержит элемент $a_1 a_2^{-1}$, ибо

$$\left[b, a_1^2\right] = b^{-1} a_1^{-2} b a_1^2 = \left(a_2^{-1} a_1\right)^2.$$

Покажем, что $a_1 a_2^{-1} \notin G'$. Поскольку

$$\left[b, a_1 a_2^{-1}\right] = b^{-1} a_1^{-1} a_2 b a_2^{-1} a_1 = a_3 a_2^{-2} a_1,$$

любой элемент c из G' можно записать в виде

$$c = \left(a_1^2 a_2^{-2}\right)^{f_1(b)} \left(a_1 a_2^{-2} a_3\right)^{f_2(b)},$$

где

$$f_1(b) = \alpha_m b^m + \alpha_{m-1} b^{m-1} + \cdots + \alpha_n b^n, f_2(b) = \beta_q b^q + \beta_{q-1} b^{q-1} + \cdots + \beta_p b^p,$$

α_m, α_n, β_q, β_p ($m \geq n$, $q \geq p$) — не равные нулю целые числа. Если элемент $a_1 a_2^{-1}$ лежит в G', то получим систему сравнений

$$\begin{gathered} \beta_q \equiv \epsilon_q (\mod 2) \\ \beta_{q+1} \equiv \epsilon_{q+1} (\mod 2) \\ \beta_q + \beta_{q+2} \equiv \epsilon_{q+2} (\mod 2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_{p+1} + \beta_{p+3} \equiv \epsilon_{p+3} (\mod 2) \\ \beta_{p+2} \equiv \epsilon_{4+p} (\mod 2) \\ \beta_{p+3} \equiv \epsilon_{p+5} (\mod 2), \end{gathered} \tag{8}$$

где для некоторого i, $q \leq i \leq 4+p$, выполнено $\epsilon_i = \epsilon_{i+1} = 1$ и $\epsilon_j = 0$ для остальных значений j. Легко проверить, что если из матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

размерности $(p+6-q) \times (p+4-q)$ вычеркнуть две смежные строки, то получим обратимую матрицу над кольцом $\mathbf{Z}_2$. Поэтому если из системы (8) вычеркнуть сравнения с правыми частями 1, то полученная система имеет лишь нулевое решение. Предложение доказано.

Как следует, например, из теоремы 1, коммутант свободной метабелевой группы ранга ≥ 2 выделяется универсальной формулой

$$Y_1(x) \rightleftharpoons \forall y([x^y, x] = 1).$$

Однако на классе всех неабелевых конечно порожденных групп из $\mathrm{uncl}(S)$ универсальной формулы с таким свойством не существует, как показывает

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{F}$ — класс конечно порожденных $\forall$-свободных метабелевых групп. Не существует универсальной формулы $Y_2(x)$ групповой сигнатуры такой, что для всех $G_\alpha \in \mathscr{F}$ формула $Y_2(x)$ истинна на G_α тогда и только тогда, когда элемент x лежит в коммутанте G'_α.*

Доказательство. Предположим, что такая формула существует. Группа G, рассмотренная в предложении 2, лежит в классе $\mathscr{F}$. На ней верна $\exists$-формула

$$(\exists x)(\neg Y_2(x)) \wedge (\exists y_1 \dots y_{2n})(x^2 = [y_1, y_2] \dots [y_{2n-1}, y_{2n}]), \tag{9}$$

где n — ширина коммутанта группы G. Эта же формула должна быть верной и на свободной метабелевой группе ранга 2. Но на ней формула (9) неверна, так как ее абелизация не имеет кручения. Следствие доказано.

Теорема 2. *Пусть A, B — абелевы группы из класса* $\mathrm{uncl}(S)$. *Тогда их метабелево произведение* $A \underset{\mathbf{A}^2}{*} B$ *лежит в классе* $\mathrm{uncl}(S)$. *Вместе с тем существуют неабелевы группы G_1 и G_2 из класса* $\mathrm{uncl}(S)$ *такие, что группа* $G_1 \underset{\mathbf{A}^2}{*} G_2$ *не лежит в этом классе, т. е. универсальная эквивалентность, вообще говоря, не сохраняется при метабелевом произведении групп.*

Доказательство. Пусть A, B — абелевы группы без кручения, $F = A * B$ — их свободное произведение, $G = A \underset{\mathbf{A}^2}{*} B$. По определению $G = F/F''$. Обозначим через R коммутант F'. Так как $R \cap A = R \cap B = 1$, то для группы $G = F/R'$ имеет место вложение Шмелькина в группу матриц над кольцом $\mathbf{Z}(F/R)$.

Как отмечено ранее, достаточно доказать, что G является ρ-группой. Первое условие на ρ-группу выполняется, так как A, B — группы без кручения и из вложения Шмелькина легко следует, что G также группа без кручения. Далее, по теореме 1 $\mathrm{Fit}(G) = G'$. Группа $G/\mathrm{Fit}(G)$ изоморфна группе $A \times B$ и, следовательно, $\mathrm{Fit}(G)$ — изолированная подгруппа из G.

Осталось проверить, что $\mathbf{Z}(G/G')$-модуль G' не имеет кручения. Пусть $1 \neq c$ — элемент из G'. При вложении Шмелькина элемент c отображается в матрицу

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{Z}(G/G')$. Пусть γ — ненулевой элемент из кольца $\mathbf{Z}(G/G')$. Тогда

$$c^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1\alpha_1\gamma + t_2\alpha_2\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как группа G/G' без кручения, кольцо $\mathbf{Z}(G/G')$ не имеет делителей нуля. Поэтому $c^\gamma \neq 1$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\langle a_i \rangle$, $\langle b_i \rangle$ — бесконечные циклические группы, $G_i = \langle a_i \rangle \wr \langle b_i \rangle$, $(i = 1, 2)$ — дискретные сплетения. Известно, что группы G_1 и G_2 являются $\forall$-свободными метабелевыми. Обозначим $H = G_1 \underset{\mathbf{A}^2}{*} G_2$. Покажем, что универсальная теория $\mathrm{Th}_\forall H$ не совпадает с универсальной теорией свободной метабелевой группы ранга ≥ 2.

Рассмотрим $\exists$-формулу

$$Y_3 \rightleftharpoons (\exists x_1 y_1 y_2)\big([x_1, y_1] \neq 1 \wedge \big[x_1^{y_1}, x_1\big] = 1 \wedge \big[x_1^{y_2}, x_1\big] \neq 1\big).$$

Покажем, что она верна на группе H. Положим $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$. В проверке нуждается лишь условие $\big[a_1^{b_2}, a_1\big] \neq 1$. Обозначим $\overline{G}_i = G_i/G_i'$, $i = 1, 2$. Рассмотрим естественный гомоморфизм группы H на группу $\overline{H} = \overline{G}_1 \underset{\mathbf{A}^2}{*} \overline{G}_2$. Чертой обозначаем образ элемента из H при этом гомоморфизме. Убедимся в том, что $\big[\bar{a}_1^{\bar{b}_2}, \bar{a}_1\big] \neq 1$. Но

$$\big[\bar{a}_1^{\bar{b}_2}, {}_1\big] = \big[\bar{b}_2^{-1}\bar{a}_1\bar{b}_2\bar{a}_1^{-1}\bar{a}_1, \bar{a}_1\big] = \big[\big[\bar{b}_2, \bar{a}_1^{-1}\big], \bar{a}_1\big]^{\bar{a}_1} = \big[\bar{b}_2, \bar{a}_1^{-1}\big]^{(1-\bar{a}_1)\bar{a}_1}.$$

Как следует из первой части теоремы, группа $\overline{H}$ универсально эквивалентна свободной метабелевой группе S неединичного ранга. Поэтому ее коммутант $\overline{H'}$ является $\mathbf{Z}(\overline{G}_1 \times \overline{G}_2)$-модулем без кручения. Так как $1 - \bar{a}_1 \neq 0$, достаточно проверить, что $[\bar{b}_2, \bar{a}_1^{-1}]$ — неединичный элемент. Но это легко следует из вложения Шмелькина и формул (1). Теорема доказана.

Поскольку универсальная теория свободной метабелевой группы разрешима [1, 2], из теоремы 2 получаем

Следствие 3. *Пусть A, B — абелевы группы без кручения. Тогда универсальная теория группы $A \underset{\mathbf{A}^2}{*} B$ разрешима.*

Автор благодарен профессору В. Н. Ремесленникову, который привлек внимание к данной проблематике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chapuis O.* Universal theory of certain solvable groups and bounded Ore rings // J. Algebra. 1995. V. 176, N 2. P. 368–391.
2. *Chapuis O.* ∀-free metabelian groups // J. Symbolic Logic. 1997. V. 62, N 1. P. 159–174.
3. *Тимошенко Е. И.* Об универсально эквивалентных разрешимых группах // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 227–240.
4. *Тимошенко Е. И.* О сохранении элементарной и универсальной эквивалентности при сплетении // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 4. С. 114–119.
5. *Шмелькин А. Л.* О некоторых фактор-группах свободного произведения // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1979. № 5. С. 209–216.
6. *Романовский Н. С.* К теореме о свободе для произведений групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 354–367.
7. *Романовский Н. С.* О вложении Шмелькина для абстрактных и проконечных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 5. С. 598–612.
8. *Gupta C. K., Romanovski N.* Finitely generated subgroups and the centre of some factor groups of free products // Bull. Austral. Math. Soc. 1999. V. 60. P. 239–244.
9. *Красников А. Ф.* О нильпотентных подгруппах относительно свободных групп // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 4. С. 389–401.

Статья поступила 5 декабря 2000 г.,

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. архитектурно-строительный университет,
ул. Ленинградская, 113, Новосибирск 630008
etim@ngasu.nsk.ru