Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 517.95

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

К. Б. Сабитов, А. Н. Кучкарова

Аннотация: Найдены собственные значения и соответствующие собственные функции задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева — Бицадзе. Изучены спектральные свойства системы собственных функций, и показаны их применения для построения решения задачи Геллерстедта в виде суммы рядов. Библиогр. 18.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где λ — комплексный параметр, в области D, ограниченной простой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$, с концами в точках $A_1(-1,0)$ и $A_2(1,0)$ и характеристиками $A_1C_1(x+y=-1)$, $C_1O(x-y=0)$, $OC_2(x+y=0)$, $C_2A_2(x-y=1)$ уравнения (1) при $y<0$, где $C_1(-1/2;-1/2)$, $O(0;0)$, $C_2(1/2;-1/2)$.

Обозначим $D_0 = D\cap\{y>0\}$, $D_1 = D\cap\{x<0\wedge y<0\}$, $D_2 = D\cap\{x>0\wedge y<0\}$.

В области D для уравнения (1) поставим следующую спектральную задачу.

Спектральная задача Геллерстедта (Задача G_λ). Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\wedge C^1(D)\wedge C^2(D_0\cup D_1\cup D_2),$$
$$Lu(x,y)=0,\quad (x,y)\in D_0\cup D_1\cup D_2,$$
$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in C_1O\cup OC_2\cup\Gamma.$$

Задача Геллерстедта для уравнений смешанного типа изучалась в работах [1–12].

В данной работе рассмотрены спектральные свойства решений задачи G_λ и приведены применения этих свойств при построении решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева — Бицадзе.

В § 2 спектральная задача G_λ для оператора Лаврентьева — Бицадзе сведена к новой нелокальной спектральной задаче для оператора Лапласа. В случае, когда D_0 является полукругом с центром в начале координат, методом

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (грант № 22) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00934).

разделения переменных найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи G_λ. Исследован вопрос о полноте системы собственных функций в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области.

В § 3–5 на основании результатов § 2 построены решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева — Бицадзе в виде суммы рядов.

§ 2. Построение собственных функций задачи G_λ и исследование на полноту

Предварительно в областях D_1 и D_2 для уравнения (1) построим в явном виде решение задач Дарбу.

Первая задача Дарбу. 1. Найти в области D_1 решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,x)=0, \quad -\frac{1}{2}\le x\le 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\tau(x), \quad -1\le x\le 0. \tag{3}$$

2. Найти в области D_2 решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x,-x)=0, \quad 0\le x\le \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$u(x,0)=\tau(x), \quad 0\le x\le 1, \tag{5}$$

где $\tau(x)$ — заданная функция, $\tau(0)=0$.

Теорема 1. 1. *Если $\tau(x)\in C[-1,0]\wedge C^2(-1,0), \tau'(x)\in L_1[-1,0]$, то существует единственное решение задачи* (1)–(3) *и оно определяется формулой*

$$u(x,y)=\tau(x-y)+\lambda y\int\limits_{x-y}^{0}\tau(t)\overline{J}_1\big[\sqrt{\lambda(t-x+y)(t-x-y)}\big]dt. \tag{6}$$

2. *Если $\tau(x)\in C[0,1]\wedge C^2(0,1)$, $\tau'(x)\in L_1[0,1]$, то существует единственное решение задачи* (1), (4), (5) *и оно определяется формулой*

$$u(x,y)=\tau(x+y)+\lambda y\int\limits_{0}^{x+y}\tau(t)\overline{J}_1\big[\sqrt{\lambda(t-x+y)(t-x-y)}\big]dt, \tag{7}$$

где $\overline{J}_1(z)=\frac{J_1(z)}{z}$, $J_1(z)$ *— функция Бесселя,* $\sqrt{\lambda}>0$ *при* $\lambda>0$.

Вторая задача Дарбу. 1. Найти в области D_1 решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и

$$u_y(x,0)=\nu(x), \quad -1<x<0. \tag{8}$$

2. Найти в области D_2 решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4) и

$$u_y(x,0)=\nu(x), \quad 0<x<1, \tag{9}$$

где $\nu(x)$ — заданная функция.

Теорема 2. 1. *Если* $\nu(x) \in C^1(-1,0) \wedge L_1[-1,0]$, *то существует единственное решение задачи* (1), (2), (8) *и оно определяется формулой*

$$u(x,y) = \int\limits_{x-y}^{0} \nu(t) J_0\big[\sqrt{\lambda(t-x+y)(t-x-y)}\big]\,dt. \tag{10}$$

2. *Если* $\nu(x) \in C^1(0,1) \wedge L_1[0,1]$, *то существует единственное решение задачи* (1), (4), (9) *и оно определяется формулой*

$$u(x,y) = \int\limits_{0}^{x+y} \nu(t) J_0\big[\sqrt{\lambda(t-x+y)(t-x-y)}\big]\,dt. \tag{11}$$

где $J_0(z)$ — *функция Бесселя*, $\sqrt{\lambda} > 0$ *при* $\lambda > 0$.

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в работе [13].

Из формул (6) и (7) имеем

$$u_y(x,0) + u_x(x,0) = \lambda \int\limits_{x}^{0} \tau(t)\overline{J}_1[\sqrt{\lambda}(t-x)]\,dt, \quad -1 < x < 0, \tag{12}$$

$$u_y(x,0) - u_x(x,0) = \lambda \int\limits_{0}^{x} \tau(t)\overline{J}_1[\sqrt{\lambda}(x-t)]\,dt, \quad 0 < x < 1. \tag{13}$$

Полагая в формулах (10) и (11) $y = 0$, имеем

$$u(x,0) = \int\limits_{x}^{0} u_y(t,0) J_0[\sqrt{\lambda}(t-x)]\,dt, \quad -1 \le x \le 0, \tag{12_1}$$

$$u(x,0) = \int\limits_{0}^{x} u_y(t,0) J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]\,dt, \quad 0 \le x \le 1. \tag{13_1}$$

Отметим, что равенства (12) и (12_1), (13) и (13_1) являются формулами взаимного обращения относительно функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

Таким образом, задача G_λ сведена к новой нелокальной спектральной задаче для оператора Лапласа в области D_0: найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}_0) \wedge C^1(D_0 \cup A_1O \cup OA_2) \wedge C^2(D_0), \tag{14}$$

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in D_0, \tag{15}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{16}$$

и (12) и (13) или (12_1) и (13_1).

Исследование задачи (12)–(16) в случае произвольной кривой Γ представляет значительные трудности. Поэтому здесь рассмотрим случай, когда кривая Γ является полуокружностью $x^2+y^2 = 1$, $y \ge 0$. В области $D_0 = \{x^2+y^2 < 1, y > 0\}$ введем полярные координаты: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \pi$. В полярных координатах (r,φ), разделяя переменные $u(x,y)=v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$, из (12)–(16) получим

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\right)R(r)=0,\quad 0<r<1, \tag{17}$$

$$R(0)=0,\quad R(1)=0, \tag{18}$$

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\pi, \tag{19}$$

$$\Phi'(\pi)\frac{R(-x)}{x}+\Phi(\pi)R'(-x)=\lambda\Phi(\pi)\int\limits_x^0 R(-t)\overline{J}_1[\sqrt{\lambda}(t-x)]\,dt,\quad -1<x<0, \tag{20}$$

$$\Phi'(0)\frac{R(x)}{x}-\Phi(0)R'(x)=\lambda\Phi(0)\int\limits_0^x R(t)\overline{J}_1[\sqrt{\lambda}(x-t)]\,dt,\quad 0<x<1. \tag{21}$$

Известно, что решением уравнения (17), удовлетворяющим первому условию из (18), является функция Бесселя

$$R(r)=J_\mu(\sqrt{\lambda}r),\quad \operatorname{Re}\mu>0. \tag{22}$$

Подставляя функцию (22) в равенства (20), (21) и вычисляя полученный интеграл по формуле 2.12.33.6 из [14], находим граничные условия

$$\Phi'(\pi)+\mu\Phi(\pi)=0,\quad \Phi'(0)-\mu\Phi(0)=0 \tag{23}$$

для нахождения функции $\Phi(\varphi)$. Теперь, решая краевую задачу (19) и (23), будем иметь

$$\Phi_n(\varphi)=c_n(\cos\mu_n\varphi+\sin\mu_n\varphi), \tag{24}$$

где $\mu_n=n-1/2$, $c_n=\text{const}$, $n=1,2,\dots$.

Далее, учитывая найденные значения μ_n и требуя от функции (22) выполнения второго условия из (18), получим

$$J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})=0. \tag{25}$$

Как известно [15, с. 530], функция $J_\nu(z)$ при $\nu>-1$ имеет только вещественные нули. Тогда, обозначая через $\alpha_{n,m}$ m-й корень уравнения (25), находим собственные значения задачи G_λ:

$$\lambda_{n,m}=\alpha_{n,m}^2,\quad n,m=1,2,\dots. \tag{26}$$

На основании формул (22), (24), (26) найдем собственные функции задачи G_λ в области D_0:

$$u_{n,m}(x,y)=v_{n,m}(r,\varphi)=c_{n,m}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)(\cos\mu_n\varphi+\sin\mu_n\varphi), \tag{27}$$

где $c_{n,m}=\text{const}$.

Для построения собственных функций в области D_2 можно воспользоваться формулами (6) и (7) или (10) и (11). Из-за громоздкости вычислений здесь применим прием, предложенный в [16]. В области D_2 введем новые переменные

$$\sigma=\sqrt{x^2-y^2},\quad \theta=-\frac{y^2}{x^2-y^2}.$$

Разделяя переменные в уравнении (1), находим его частные решения

$$u(x,y)=\left[k_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2}+k_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}\right]J_\rho\big[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\big], \tag{28}$$

где $\operatorname{Re}\rho\ge 0$, k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Из формулы (27) вычислим

$$\tau_{n,m}(x)=u_{n,m}(x,0)=c_{n,m}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}x),\quad 0\le x\le 1, \tag{29}$$

$$\nu_{n,m}(x)=\frac{\partial u_{n,m}(x,0)}{\partial y}=\frac{\mu_n c_{n,m}}{x}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}x),\quad 0<x<1. \tag{30}$$

Если в формуле (28) положить $\rho=\mu_n=n-1/2$, $\lambda=\lambda_{n,m}$, $k_1=0$, $k_2=c_{n,m}$, то она определит решение задачи Коши для уравнения (1) в области D_2 с краевыми условиями (29) и (30).

Таким образом, система собственных функций задачи G_λ в области D_2 имеет вид

$$u_{n,m}(x,y)=c_{n,m}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}J_{\mu_n}\left[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\right].$$

Для получения системы собственных функций в области D_1 воспользуемся симметрией уравнения относительно оси $x=0$. Заменяя в формуле (28) (x,y) на $(-x,y)$, получим

$$u(x,y)=\left[k_3\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}+k_4\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2}\right]J_\rho\big[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\big], \tag{31}$$

где $\operatorname{Re}\rho\ge 0$, k_3 и k_4 — произвольные постоянные.

Из (27) имеем

$$\tau_{n,m}(x)=u_{n,m}(x,0)=(-1)^{n+1}c_{n,m}J_{\mu_n}[\sqrt{\lambda_{n,m}}(-x)],\quad -1\le x\le 0, \tag{32}$$

$$\nu_{n,m}(x)=\frac{\partial u_{n,m}(x,0)}{\partial y}=(-1)^n\frac{\mu_n c_{n,m}}{x}J_{\mu_n}[\sqrt{\lambda_{n,m}}(-x)],\quad -1<x<0. \tag{33}$$

Положив в формуле (31) $\rho=\mu_n=n-1/2$, $\lambda=\lambda_{n,m}$, $k_3=0$, $k_4=(-1)^{n+1}c_{n,m}$, получим решение задачи Коши для уравнения (1) в области D_1 с краевыми условиями (32) и (33).

Тем самым собственные функции задачи G_λ в области D_1 имеют вид

$$u_{n,m}(x,y)=(-1)^{n+1}c_{n,m}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}J_{\mu_n}\left[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\right].$$

Следовательно, собственные функции задачи G_λ таковы:

$$u_{n,m}(x,y)=\begin{cases} c_{n,m}J_{\mu_n}[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2+y^2)}](\cos\mu_n\varphi+\sin\mu_n\varphi), & (r,\varphi)\in D_0,\\ (-1)^{n+1}c_{n,m}\big(\frac{x-y}{x+y}\big)^{\mu_n/2}J_{\mu_n}[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}], & (x,y)\in D_1,\\ c_{n,m}\big(\frac{x+y}{x-y}\big)^{\mu_n/2}J_{\mu_n}[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}], & (x,y)\in D_2,\end{cases} \tag{34}$$

где $\mu_n=n-1/2$, $c_{n,m}=\mathrm{const}$, $n=1,2,\dots$.

Исследуем свойства системы функций (34).

Теорема 3. *Система собственных функций* (34) *задачи* G_λ *полна в пространстве* $L_2(D_0)$.

Доказательство. Допустим, что в $L_2(D_0)$ существует функция $F(x,y)$ такая, что

$$\iint\limits_{D_0} F(x,y)u_{n,m}(x,y)\,dxdy = 0 \tag{35}$$

для всех $n,m = 1,2,\dots$. Покажем, что $F = 0$ почти всюду в D_0.

В (35) перейдем в полярную систему координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда с учетом (34) получим

$$0 = \int\limits_0^1\int\limits_0^\pi f(r,\varphi)J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi)r\,d\varphi dr$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^1 F_n(r)J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)r\,dr, \tag{36}$$

где

$$F_n(r) = \int\limits_0^\pi f(r,\varphi)\sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)d\varphi, \quad f(r,\varphi) = F(x,y).$$

В силу (36) для функции $F_n(r)$ все коэффициенты ряда Фурье — Бесселя равны нулю, поэтому из теоремы Юнга [15] следует, что $F_n(r) \equiv 0$, $(n = 1,2,\dots)$, если интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{r}|F_n(r)|\,dr$ абсолютно сходится. В самом деле, из неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\int\limits_0^1 \sqrt{r}|F_n(r)|\,dr \le \left(\int\limits_0^1 r\,dr\int\limits_0^1 |F_n(r)|^2\,dr\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int\limits_0^1\left|\int\limits_0^\pi f(r,\varphi)\sin(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4})d\varphi\right|^2 dr\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int\limits_0^\pi \sin^2(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4})\,d\varphi\right]^{1/2}\left[\int\limits_0^1\int\limits_0^\pi |f(r,\varphi)|^2\,d\varphi dr\right]^{1/2} \le C\|F\|_{L_2(D_0)} < +\infty.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\pi f(r,\varphi)\sin(\mu_n\varphi + \pi/4)\,d\varphi = 0 \tag{37}$$

для всех $n = 1,2,\dots$ при любом $r \in [0,1]$.

Поскольку система функций $\{\sin((n-1/2)\varphi + \pi/4)\}_{n=1}^\infty$ образует базис в $L_2[0,\pi]$ [17], то она полна в $L_2[0,\pi]$. Поэтому из (37) получаем, что при каждом r множество тех φ, где $f(r,\varphi) \ne 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $f(r,\varphi) = 0$ почти всюду в D_0.

Теорема 4. *Подсистема собственных функций* (34) *задачи* G_λ *при* $n = 2, 3, \dots$ *полна в* $L_2(D_2)$.

Доказательство. Допустим, что в $L_2(D_2)$ существует функция $F(x, y)$ такая, что

$$\iint\limits_{D_2} F(x, y) u_{n,m}(x, y)\, dxdy = 0$$

для всех $n = 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, \dots$. Покажем, что $F(x, y) = 0$ почти всюду в D_2. В двойном интеграле произведем замену переменных $\xi = x + y$ и $\eta = x + y$. Тогда область D_2 перейдет в область $\Delta = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \eta < 1\}$, а интеграл запишется в виде

$$\iint\limits_{\Delta} f(\xi, \eta) v_{n,m}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = 0, \tag{38}$$

где $f(\xi, \eta) = F(x, y)$, $v_{n,m}(\xi, \eta) = u_{n,m}(x, y)$. Учитывая (34), преобразуем интеграл (38):

$$\int\limits_0^1 d\eta \int\limits_0^\eta f(\xi, \eta) \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}\xi\eta})\, d\xi = 0.$$

Полагая во внутреннем интеграле $\xi = \eta t$ и меняя порядок интегрирования, затем полагая $\eta\sqrt{t} = r$, $t = s^2$, получим

$$\int\limits_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r\, dr \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f(rs, r/s)\, ds = 0.$$

Из последнего равенства имеем, что для функции

$$F_n(r) = \int\limits_r^1 h(s, r) s^{\mu_n - 1}\, ds, \quad 0 \le r \le 1,\ n = 2, 3, \dots,$$

где $h(s, r) = f(rs, r/s)$, все коэффициенты ряда Фурье — Бесселя равны нулю, поэтому из теоремы Юнга следует, что

$$\int\limits_r^1 h(s, r) s^{\mu_n - 1}\, ds = 0$$

для всех $n = 2, 3, \dots$ и при каждом $r \in [0, 1]$.

Рассмотрим систему функций $\{s^{\mu_n - 1}\}$, $\mu_n = n - 1/2$, $n = 2, 3, \dots$. По теореме Мюнца система $\{s^{\mu_n - 1}\}$ полна в $L_2[0, 1]$. Тогда при каждом r множество тех s, где $h(s, r) \ne 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $h(s, r) = 0$ почти всюду в области D_2.

Теорема 5. *Подсистема собственных функций* (34) *задачи* G_λ *при* $n = 2, 3, \dots$ *полна в* $L_2(D_1)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.

Теорема 6. *Система собственных функций* (34) *задачи* G_λ *не полна в* $L_2(D)$.

Доказательство. В области D рассмотрим функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} F_0(x,y), & (x,y) \in D_0, \\ F_1(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ F_2(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

где $F_k(x,y) \in L_2(D_k)$, $k = 0,1,2$, и интегралы

$$J = \iint\limits_D F(x,y) u_{n,m}\, dxdy = \sum_{k=0}^{2} \iint\limits_{D_k} F_k(x,y) u_{n,m}\, dxdy = i_0 + i_1 + i_2. \tag{39}$$

Подсчитаем каждый из i_k, $k = 0,1,2$. Переходя к полярным координатам (r,φ) в интеграле i_0, получим

$$i_0 = \sqrt{2} c_{n,m} \int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r\, dr \int_0^\pi f_0(r,\varphi) \sin(\mu_n \varphi + \pi/4)\, d\varphi, \tag{40}$$

где $f_0(r,\varphi) = F_0(x,y)$.

Используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 4, интегралы i_1 и i_2 преобразуем к виду

$$i_1 = (-1)^{n+1} c_{n,m} \int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r\, dr \int_r^1 s^{\mu_n - 1} f_1(rs, r/s)\, ds, \tag{41}$$

$$i_2 = c_{n,m} \int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r\, dr \int_r^1 s^{\mu_n - 1} f_2(rs, r/s)\, ds, \tag{42}$$

где $f_1(\xi,\eta) = F_1(x,y)$, $f_2(\xi,\eta) = F_2(x,y)$.

Теперь, подставляя (40)–(42) в (39), получим

$$\begin{aligned} J = c_{n,m} \int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r \Bigg[\sqrt{2} \int_0^\pi f_0(r,\varphi) \sin(\mu_n \varphi + \pi/4)\, d\varphi \\ + \int_r^1 s^{\mu_n - 1} [f_2(rs, r/s) + (-1)^{n+1} f_1(rs, r/s)]\, ds \Bigg] dr. \end{aligned} \tag{43}$$

Следуя [16], рассмотрим функции

$$\begin{aligned} f_0(r,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+3)(k+4)} \\ - (-1)^k \left(\frac{r^{k+1}}{k+1} - \frac{r^{k+2}}{k+2} \right) - \left(\frac{r^{k+3}}{k+3} - \frac{r^{k+4}}{k+4} \right) \Bigg] h_k(\varphi), \end{aligned} \tag{44}$$

$$f_1(rs, r/s) = s^{3/2}(1-s), \quad f_2(rs, r/s) = -s^{7/2}(1-s), \tag{45}$$

где $h_k(\varphi)$ — биортогональная система относительно системы синусов $\sin(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4})$, $n = 1, 2, \ldots$, и она имеет вид

$$h_k(\varphi) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos\varphi/2)^{-1}}{(\operatorname{tg}\varphi/2)^{1/2}}\sum_{n=1}^{k}(\sin n\varphi)B_{k-n}, \tag{46}$$

$$B_l = \sum_{m=0}^{l} C_{1/2}^{l-m} C_{1/2}^{m}(-1)^{l-m}, \quad C_l^n = \frac{l(l-1)\ldots(l-n+1)}{n!}.$$

Поскольку $h_k(\varphi)$ равномерно ограничены по k [17], ряд (44) при любом $r \le 1$ сходится равномерно. Подставляя функции (44) и (45) в (43), получим, что существует функция $F(x,y) \in L_2(D)$, $F(x,y) \ne 0$ в D, такая, что интеграл J равен нулю. Теорема доказана.

§ 3. Построение решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева — Бицадзе

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \tag{47}$$

в области D, ограниченной частью окружности $\Gamma(x^2 + y^2 = 1, y > 0)$ и характеристиками A_1C_1, C_1O, OC_2, C_2A_2, уравнения (1) при $y < 0$.

Задача Геллерстедта (задача G). Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \tag{48}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \tag{49}$$

$$u(x,y)|_\Gamma = v(r,\varphi)|_{r=1} = f(\varphi), \quad \varphi \in [0,\pi], \tag{50}$$

$$u(x,y)|_{C_1O \cup OC_2} = 0,$$

где f — заданная достаточно гладкая функция.

Отметим, что единственность решения задачи G для уравнения (47) в области D (см. § 1) с произвольной кривой Γ доказана в работе [5].

Решая первую задачу Дарбу для уравнения (47) в области D_1 с граничными условиями (2) и (3) и в области D_2 с условиями (4) и (5), получим соотношения на отрезках A_1O и OA_2 оси $y = 0$:

$$u_x(x,0) + u_y(x,0) = 0, \quad -1 < x < 0, \tag{51}$$

$$u_x(x,0) - u_y(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{52}$$

Тем самым задача G сведена к смешанной задаче для уравнения Лапласа: найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (48)–(52).

Введя в области D_0 полярные координаты (r,φ) и разделяя переменные $u(x,y) = v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, из (48)–(52) получим

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\mu^2}{r^2}R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{53}$$

$$R(0) = 0, \quad |R(1)| < +\infty, \tag{54}$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \tag{55}$$

$$\Phi'(\pi)\frac{R(-x)}{x}+\Phi(\pi)R'(-x)=0, \quad -1<x<0, \tag{56}$$

$$\Phi'(0)\frac{R(x)}{x}-\Phi(0)R'(x)=0, \quad 0<x<1, \tag{57}$$

где $\mu=\mathrm{const}$.

Решением уравнения (53), удовлетворяющим условиям (54), является функция

$$R(r)=r^{\mu}, \quad \mu>0. \tag{58}$$

Подставляя функцию (58) в равенства (56) и (57), получим

$$\Phi'(\pi)+\mu\Phi(\pi)=0, \quad \Phi'(0)-\mu\Phi(0)=0. \tag{59}$$

Решая краевую задачу (55), (59), найдем

$$\Phi_n(\varphi)=c_n(\cos\mu_n\varphi+\sin\mu_n\varphi)=C_n\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right),$$

где $\mu_n=n-1/2$, $C_n=\mathrm{const}$, $n=1,2,\dots$. Следовательно, функции вида

$$v_n(r,\varphi)=C_n r^{\mu_n}\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right), \quad \mu_n=n-\frac{1}{2},\ n=1,2,\dots,$$

являются частными решениями уравнения Лапласа в области D_0, удовлетворяющими условиям (48), (51) и (52).

Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд по системе синусов $\{\sin[(n-1/2)\varphi+\pi/4]\}_{n=1}^{\infty}$, $0\le\varphi\le\pi$ [17]:

$$f(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}\right], \tag{60}$$

где

$$f_n=\int\limits_0^{\pi}f(\varphi)h_n(\varphi)\,d\varphi, \tag{61}$$

а функция $h_n(\varphi)$ определяется по формуле (46).

Из работы [17] следует, что если $f(\varphi)\in C^{\alpha}[0,\pi]$, $0<\alpha\le1$, $f(0)=f(\pi)=0$, то ряд (60) сходится равномерно на $[0,\pi]$ к функции $f(\varphi)$.

Решение задачи (48)–(52) в области D_0 будем искать в виде суммы ряда

$$v(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n r^{n-1/2}\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}\right], \tag{62}$$

где f_n определяется по формуле (61).

При любом $r<1$ ряд (62) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по r и φ сколько угодно раз, а при $r=1$ из (62) получаем ряд (60), который также сходится равномерно к функции $f(\varphi)$.

Таким образом, сумма ряда (62) непрерывна в $\overline{D}_0$ и на $D_0\cup A_1O\cup OA_2$ допускает почленное дифференцирование по r и φ любое число раз.

Из (62) при $\varphi=0$ получим функцию

$$v(r,\varphi)|_{\varphi=0}=u(x,0)=\tau(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}f_n x^{n-\frac{1}{2}}, \tag{63}$$

которая принадлежит классу $C[-1,1]\wedge C^{\infty}(-1,0)\wedge C^{\infty}(0,1)$.

В области D_2 решение задачи G определяется как решение задачи Дарбу для уравнения (47) с данными

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1,\quad u(x,-x)=0,\ 0\le x\le \frac{1}{2},$$

где $\tau(x)$ определена формулой (63). Это решение имеет вид

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x+y)^{n-\frac{1}{2}}. \tag{64}$$

Поскольку в $\overline{D}_2$ имеем $0\le x+y\le 1$, то ряд (64) в $\overline{D}_2$ сходится равномерно и на множестве $D_2\cup OA_2$ допускает почленное дифференцирование по x и y любое число раз.

Аналогично определяется решение задачи G в области D_1:

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} f_n(y-x)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 7. *Если $f(\varphi)\in C^{\alpha}[0,\pi]$, $0<\alpha\le 1$, $f(0)=f(\pi)=0$, то существует решение задачи G, которое имеет вид*

$$u(x,y)=\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n r^{n-\frac{1}{2}}\sin[(n-1/2)\varphi+\pi/4], & (r,\varphi)\in D_0,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} f_n(y-x)^{n-\frac{1}{2}}, & (x,y)\in D_1,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x+y)^{n-\frac{1}{2}}, & (x,y)\in D_2,\end{cases}$$

где f_n определяются по формуле (61), *при этом $u\in C^{\infty}(D_0\cup A_1O\cup OA_2)\wedge C^{\infty}(D_1\cup A_1O)\wedge C^{\infty}(D_2\cup OA_2)$.*

Отметим, что в работе [12] методом разделенных переменных решена задача G для уравнения (47), где $\operatorname{sgn} y$ стоит при производной u_{xx}.

§ 4. Решение задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева — Бицадзе с комплексным параметром

Для уравнения (1) в области D (см. § 3) построим решение следующей задачи.

Задача Геллерстедта. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\wedge C^1(D)\wedge C^2(D_0\cup D_1\cup D_2), \tag{65}$$

$$Lu(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in D_0\cup D_1\cup D_2, \tag{66}$$

$$u(x,y)|_{\Gamma}=v(r,\varphi)|_{r=1}=f(\varphi),\quad \varphi\in[0,\pi], \tag{67}$$

$$u(x,y)|_{C_1O\cup OC_2}=0, \tag{68}$$

где f — заданная функция из $C^{\alpha}[0,\pi]$, $0<\alpha\le 1$.

Используя собственные функции задачи G_λ, решение задачи (65)–(68) в области D_0 при $\lambda\ne\lambda_{n,m}$ будем искать в виде суммы ряда

$$v(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\frac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}r]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]}\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}\right], \tag{69}$$

где $\lambda_{n,m}$ — собственные значения спектральной задачи Геллерстедта, коэффициенты f_n определяются по формулам (61).

На основании асимптотической формулы [18, с. 217]

$$J_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{при } n \to \infty$$

ряд (69) при любом $r < 1$ сходится равномерно, так как для достаточно больших n справедлива оценка

$$\left| f_n \frac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}r]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]} \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{\pi}{4}\right]\right| \le Mr^{n-\frac{1}{2}}, \quad M = \text{const} > 0.$$

Нетрудно заметить, что ряд (69) при $r < 1$ допускает почленное дифференцирование по r и φ любое число раз.

Если $r = 1$, то

$$v(1,\varphi) = f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{\pi}{4}\right].$$

Равномерная сходимость ряда отмечена в § 3.

Построим решение задачи G в областях D_2 и D_1. Для этого воспользуемся формулами (28) и (31).

Из формулы (69) следует, что

$$\tau(x) = u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}x)}{J_{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda})}, \quad x \in [0,1], \tag{70}$$

$$\nu(x) = u_y(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n-\frac{1}{2}\right) f_n \frac{J_{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}x)}{J_{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda})}, \quad x \in (0,1). \tag{71}$$

Если в формуле (28) положить $\rho = n - 1/2$, $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{f_n}{\sqrt{2}J_{n-1/2}(\sqrt{\lambda})}$, то она определит решение задачи Коши для уравнения (1) в области D_2 с краевыми условиями (70) и (71):

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \frac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]}.$$

Аналогично решение задачи G в области D_1 имеет вид

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \frac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]}.$$

Теорема 8. *Если $f(\varphi) \in C^\alpha[0,\pi]$, $0 < \alpha \le 1$, $f(0) = f(\pi) = 0$, то существует решение задачи (65)–(68) для любого $\lambda \ne \lambda_{n,m}$ и оно имеет вид*

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}r]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]} \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{\pi}{4}\right], & (r,\varphi) \in D_0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \frac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]}, & (x,y) \in D_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \frac{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}]}{J_{n-\frac{1}{2}}[\sqrt{\lambda}]}, & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

где f_n определяются по формуле (61), и при этом $u(x,y) \in C^\infty(D_0 \cup A_1O \cup OA_2) \wedge C^\infty(D_1 \cup A_1O) \wedge C^\infty(D_2 \cup OA_2)$.

§ 5. Пространственная задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа

Рассмотрим уравнение

$$LV \equiv V_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot V_{yy} + V_{zz} = 0 \tag{72}$$

в области $T = D \times (0, \pi)$, где D — область плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$, описанная в § 3. Обозначим $S = \{x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0,\ z \in [0, \pi]\}$, $T_0 = T \cap \{y > 0\}$, $T_1 = T \cap \{x < 0 \wedge y < 0\}$, $T_2 = T \cap \{x > 0 \wedge y < 0\}$.

Задача G. Найти функцию $V(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям

$$V(x, y, z) \in C(\overline{T}) \cap C^1(T) \cap C^2(T_0 \cup T_1 \cup T_2), \tag{73}$$

$$LV(x, y, z) \equiv 0, \quad (x, y, z) \in T_0 \cup T_1 \cup T_2, \tag{74}$$

$$V(x, y, z)|_S = W(r, \varphi, z)|_{r=1} = f(\varphi, z), \quad \varphi \in [0, \pi],\ z \in [0, \pi],$$

$$V(x, y, z)|_{y=x} = 0, \quad x \in [-1/2, 0],\ z \in [0, \pi], \tag{75}$$

$$V(x, y, z)|_{y=-x} = 0, \quad x \in [0, 1/2],\ z \in [0, \pi], \tag{76}$$

$$V(x, y, z)|_{z=0} = V(x, y, z)|_{z=\pi} = 0, \tag{77}$$

где f — заданная достаточно гладкая функция.

В области T, разделяя переменные $V(x, y, z) = u(x, y)Z(z)$, из (73)–(77) получим

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \tag{78}$$

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - \mu^2 u = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{79}$$

$$u(x, y)|_{y=x} = 0,\ x \in [-1/2, 0], \quad u(x, y)|_{y=-x} = 0,\ x \in [0, 1/2], \tag{80}$$

$$Z''(z) + \mu^2 Z(z) = 0, \quad 0 < z < \pi, \quad Z(0) = Z(\pi) = 0, \tag{81}$$

где $\mu = \mathrm{const}$.

Задача (78)–(80) есть задача (65), (66), (68), где $\lambda = -\mu^2$. Полагая в формулах (10) и (11) $\lambda = -\mu^2$ и учитывая, что $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$, приходим к соотношениям

$$u(x, 0) = \int\limits_x^0 u_y(t, 0) I_0[\mu(t - x)]\, dt, \quad -1 \leq x \leq 0,$$

$$u(x, 0) = \int\limits_0^x u_y(t, 0) I_0[\mu(x - t)]\, dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $I_0(t)$ — модифицированная функция Бесселя, позволяющим свести полученную задачу к нелокальной эллиптической задаче в области D_0 (см. § 2).

В области D_0, разделяя переменные $u(x, y) = v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) - \left(\mu^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{82}$$

$$|R(1)| < +\infty, \quad R(0) = 0, \tag{83}$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \tag{84}$$

$$\Phi(\pi) R(-x) = \Phi'(\pi) \int\limits_x^0 \frac{R(-t)}{t} I_0[\mu(t - x)]\, dt, \quad -1 \leq x \leq 0, \tag{85}$$

$$\Phi(0)R(x) = \Phi'(0)\int\limits_0^x \frac{R(t)}{t} I_0[\mu(x-t)]\,dt, \quad 0 \le x \le 1. \tag{86}$$

Решением уравнения (82), удовлетворяющим условиям (83), является модифицированная функция Бесселя

$$R(r) = I_\nu(\mu r), \quad \operatorname{Re}\nu > 0.$$

Подставив найденную функцию в условия (85) и (86), получим граничные условия

$$\Phi'(\pi) + \nu\Phi(\pi) = 0, \quad \Phi'(0) - \nu\Phi(0) = 0$$

для определения функций $\Phi(\varphi)$.

Решениями уравнения (84), удовлетворяющими полученным граничным условиям, являются функции

$$\Phi_k(\varphi) = C_k \sin\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{\pi}{4}\right], \quad C_k = \mathrm{const},\ k = 1, 2, \dots.$$

Решением краевой задачи (81) будут функции вида

$$Z_n(z) = B_n \sin nz, \quad B_n = \mathrm{const},\ n = 1, 2, \dots.$$

Решение задачи G в области T_0 будем искать в виде

$$W(r,\varphi,z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \sin\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{\pi}{4}\right] \frac{I_{k-\frac{1}{2}}(nr)}{I_{k-\frac{1}{2}}(n)}. \tag{87}$$

Полагая в (87) $r = 1$, получим

$$f(\varphi, z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \sin\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{\pi}{4}\right],$$

где коэффициенты f_{nk} находятся из разложения функции $P_n(\varphi)$ в ряд по системе синусов:

$$P_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk} \sin\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi + \frac{\pi}{4}\right], \quad \varphi \in [0, \pi], \tag{88}$$

а функция $P_n(\varphi)$ определяется по формуле

$$P_n(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(\varphi, z)\sin nz\,dz.$$

Если функция $P_n(\varphi)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $[0, \pi]$ с показателем $\lambda > 0$ и $P_n(0) = P_n(\pi) = 0$, то аналогично [12] можно доказать, что ряд (88) сходится равномерно на $[0, \pi]$.

Решение задачи G в областях T_1 и T_2 имеет вид

$$V(x,y,z) = \begin{cases} \sum\limits_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2}} f_{nk} \sin nz \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \frac{I_{k-\frac{1}{2}}[n\sqrt{(x^2-y^2)}]}{I_{k-\frac{1}{2}}[n]}, & (x,y,z) \in T_1, \\ \sum\limits_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} f_{nk} \sin nz \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \frac{I_{k-\frac{1}{2}}[n\sqrt{(x^2-y^2)}]}{I_{k-\frac{1}{2}}[n]}, & (x,y,z) \in T_2. \end{cases} \tag{89}$$

Итак, справедлива

Теорема 9. *Если функция $f(\varphi, z)$ по переменной φ удовлетворяет на отрезке $[0, \pi]$ условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$, а по переменной z на отрезке $[0, \pi]$ условию Гёльдера с показателем $\beta \in (0, 1]$, $f(\varphi, 0) = f(\varphi, \pi) = 0$, $f(0, z) = f(\pi, z) = 0$, то существует решение задачи G в области T и оно задается формулами* (87), (89).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte: Thes. doct. Uppsala, 1935.
2. *Gellerstedt S.* Quelgues problemes mixtes pour l'equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Ark. Mat. Astr. Fys. 1938. V. 26A, N 3. P. 78–93.
3. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.
4. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
5. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа: Дис. … д-ра физ.мат. наук. М., 1951.
6. *Волкодавов В. Ф., Лернер М. Е.* К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта // Дифференц. уравнения / Тр. пед. институтов РСФСР, Рязань. 1975. Вып. 6. С. 55–56.
7. *Хе Кан Чер.* О задаче Геллерстедта // Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск, 1976. № 2. С. 139–145.
8. *Хе Кан Чер.* О задаче Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа // Динамика сплошной среды. Новосибирск. 1976. Т. 26. С. 134–141.
9. *Хе Кан Чер.* О единственности решения задачи Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 6. С. 1426–1429.
10. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1985.
11. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа на плоскости и в пространстве: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1978.
12. *Моисеев Е. И.* Применение метода разделения переменных для решения уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 7. С. 1160–1172.
13. *Сабитов К. Б.* Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1023–1032.
14. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
15. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. Т. 1.
16. *Сабитов К. Б., Тихомиров В. В.* О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля // Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 10. С. 100–109.
17. *Моисеев Е. И.* О базисности одной системы синусов // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 177–179.
18. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.

Статья поступила 25 апреля 2000 г., окончательный вариант — 28 мая 2001 г.

Сабитов Камиль Басирович
Стерлитамакский гос. педагогический институт,
Стерлитамакский филиал Академии наук республики Башкортостан,
просп. Ленина, 37, Стерлитамак 453103, респ. Башкортостан
sspi@soros.bashedu.ru

Кучкарова Айгуль Наилевна
Стерлитамакский гос. педагогический институт,
Стерлитамакский филиал Академии наук республики Башкортостан,
просп. Ленина, 37, Стерлитамак 453103, респ. Башкортостан