Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТОМОГРАФИИ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

М. М. Лаврентьев

Аннотация: Рассматривается новый класс математических задач, связанных с интерпретацией томографических данных. Основное предположение — искомое распределение коэффициентов поглощения является функцией, равной единице в области, подлежащей определению. Эти задачи связаны с тремя известными направлениями математической физики — задачами Дирихле для гиперболических уравнений, задачами малых колебаний вращающейся жидкости и задачами сверхзвуковых течений идеального газа. Ил. 10, библиогр. 10.

1. Под обратными задачами томографии мы понимаем математические задачи, связанные с интерпретацией томографических данных. Первая качественная томограмма головного мозга человека была получена в 1972 г. Впоследствии томография нашла весьма широкое применение в медицине. Получили развитие также промышленная томография, томография в газовой динамике и в физике плазмы, сейсмическая томография (см. [1–3]).

В медицине и в промышленности больше распространена рентгеновская томография. Интерпретация томографических данных в медицинской рентгеновской томографии связана с преобразованием Радона. Сформулируем соответствующую математическую задачу.

Пусть $u(x,y)$ — непрерывная финитная функция с носителем в ограниченной области D (можно считать, что D — единичный круг $D = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$). *Преобразованием Радона* функции $u(x,y)$ называется функция

$$f(x,y,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+s\cos\alpha, y+s\sin\alpha)\,ds. \tag{1}$$

Равенство (1) рассматривается как линейное операторное уравнение относительно функции $u(x,y)$. Требуется определить функцию $u(x,y)$ по заданной функции $f(x,y,\alpha)$.

В математической модели рентгеновской томографии функция $u(x,y)$ связана с коэффициентом поглощения рентгеновских лучей. В медицинской томографии целесообразно рассматривать искомую функцию как произвольную непрерывную или кусочно-непрерывную функцию, так как у различных людей распределения коэффициентов поглощения могут быть весьма различными. Более того, у одного человека распределения коэффициента поглощения существенно различаются в зависимости от того, стоит человек или лежит.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00540).

В промышленной томографии интерес представляет и другая ситуация. Распределение коэффициента поглощения имеет в основном стандартный вид. Цель томографического исследования — выявить отклонения от стандарта, дефекты изделия. Если промышленное изделие получено литьем, внутри могут быть полости, трещины. Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: в уравнении (1) функция $u(x, y)$ в некоторой области $D_0 \subset D$ равна единице, а вне D_0 — нулю:

$$u(x, y) = 1,\ (x, y) \in D_0 \subset D, \quad u(x, y) = 0,\ (x, y) \overline{\in} D_0.$$

Граница области D_0 при этом является кусочно-гладкой кривой. Так как в данной постановке функция $u(x, y)$ определяется двумя функциями одной переменной, естественно предположить, что решение уравнения (1) может быть получено по значительно менее полной информации относительно правой части $f(x, y, \alpha)$, чем в общем случае. В настоящей работе мы рассмотрим вопросы, связанные с решением (1) в случае, когда значения $f(x, y, \alpha)$ известны для двух значений параметра α, т. е. предполагаются заданными функции (рис. 1)

$$f_1(x, y) = f(x, y, \alpha_1), \quad f_2(x, y) = f(x, y, \alpha_2).$$

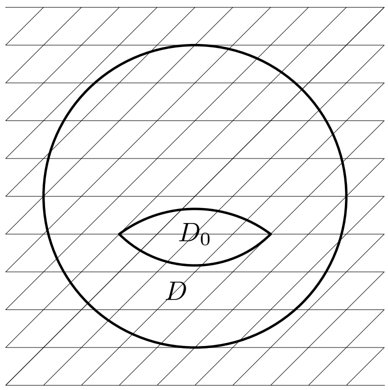

Рис. 1

2. Отметим три научных направления, связанные с задачами, рассматриваемыми в настоящей работе.

Первое направление — исследования задачи Дирихле для уравнения Даламбера. Насколько известно автору, результаты по этому направлению наиболее полно отражены в работе [4], в которой отмечено, что данные исследования не связаны с какой-либо физической задачей.

Второе направление — исследование краевых задач для системы уравнений, описывающих малые колебания вращающейся жидкости. Постановки задач и первые результаты принадлежат С. Л. Соболеву. Однако так как первоначально эти задачи были связаны с оборонной тематикой, первая публикация по этому направлению принадлежит Р. А. Александряну [5, 3], ученику С. Л. Соболева. Впоследствии опубликован ряд работ как самого С. Л. Соболева, так и его учеников.

Значительная часть результатов этих работ изложена в монографии ученика С. Л. Соболева Т. И. Зеленяка [6]. Некоторые вопросы, связанные с данным направлением, приводят к задаче Дирихле для уравнения Даламбера.

Третье направление связано с газовой динамикой. Здесь постановки задач принадлежат М. А. Лаврентьеву, первые публикации — Б. В. Шабату и М. М. Лаврентьеву [7, 8]. В дальнейшем это направление получило развитие в работах М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [9, 10].

Как известно, двумерное стационарное дозвуковое течение идеального газа описывается системой эллиптических уравнений, а сверхзвуковое — системой гиперболических уравнений.

Простейшая система эллиптических уравнений — система Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Решения системы Коши — Римана осуществляют конформные отображения плоских областей.

Простейшая система гиперболических уравнение — система Даламбера:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

В работе [10] отображения плоских областей, осуществляемые решениями этой системы, названы *h-конформными отображениями.* Мы будем называть эти отображения просто *h-отображениями. Гиперболическими отображениями* названы отображения, осуществляемые решениями систем гиперболических уравнений.

3. При изучении отображений одним из центральных вопросов является вопрос о возможности отображения областей определенного класса на некоторые канонические области. Для конформных отображений односвязных областей классическим результатом в этом направлении является теорема Римана. Приведем два результата из работы [10] по теории h-отображений на канонические области (отображения областей типа полуплоскости).

Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $0 < a < f'(x) < b$, $f(0) = 0$, где a, b — некоторые постоянные. Рассмотрим область $D = \{(x, y) : y > f(x)\}$.

Теорема 1. *Существует h-отображение области D на полуплоскость $D_0 = \{(u, v) : v > u\}$, удовлетворяющее условию $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$, т. е. оставляющее неподвижным начало координат* (*рис.* 2).

Для того чтобы отображение, осуществляемое функциями (u, v), было h-отображением, необходимо и достаточно, чтобы эти функции были представимы в виде $u = \varphi(x)$, $v = \psi(y)$, где φ, ψ — непрерывно дифференцируемые и монотонные функции.

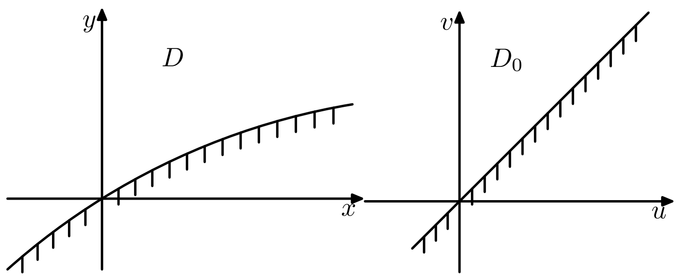

Рис. 2

Мы будем рассматривать несколько более общий класс отображений: φ, ψ произвольные непрерывные и монотонные.

2°. **Отображения областей типа полосы.** Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$0 < a < f_k'(x) < b, \quad k = 1, 2, \quad f_2(x) > f_1(x) + c,$$

где a, b, c — некоторые постоянные, $c > 0$. Рассмотрим область $D = \{(x, y) : f_1(x) < y < f_2(x)\}$.

Теорема 2. *Существует h-отображение области D на полосу $D_0 = \{(u, v) : u < v < u + 1\}$, удовлетворяющее условию $u(0,0) = v(0,0) = 0$ (рис.* 3).

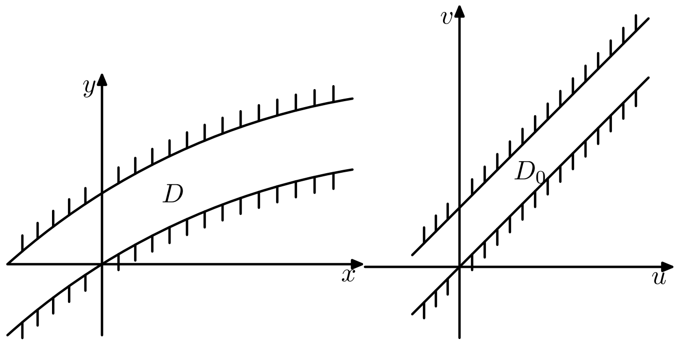

Рис. 3

4. Отображения ограниченных областей. В работе [4] рассматриваются h-отображения областей, ограниченных жордановыми кривыми, выпуклыми относительно осей (x), (y), т. е. кривыми, которые любая прямая, параллельная осям (x) или (y), пересекает не более чем в двух точках. Приведем некоторые определения и результаты из этой работы.

Пусть C — жорданова кривая, выпуклая относительно осей (x), (y). Точка кривой C, для которой прямая, параллельная оси (x) или (y), не пересекает C ни в какой другой точке, называется *вершиной кривой* C. Кривая C может иметь две, три или четыре вершины.

Пусть P — точка на кривой C с координатами (x, y): $P(x, y) \in C$. Обозначим через AP точку на кривой C с координатами (x, y_1), через BP — точку на C с координатами (x_1, y) и через T — преобразование кривой C на себя, $TP = BAP$.

Вершины C являются неподвижными точками преобразований A и B. Последовательность точек P, AP, $T^nP, \dots T^kP$ и отрезков, их соединяющих, назовем λ-многоугольником, определяемым точкой P. Если существует $n > 0$, для которого $T^nP = P$, то наименьшее такое n назовем *периодом точки* P, а саму точку P — *периодической точкой кривой* C. Преобразование T назовем *четным*, если оно сохраняет положительное направление на C.

Для рассматриваемых нами кривых C по отношению к преобразованию T возможны следующие четыре случая.

1. Все точки C периодические (кривую C назовем *периодической*).

2. C содержит периодические и непериодические точки (назовем C *полупериодической*).

3. Ни одна из точек C не является периодической. Не существует такой точки P, что множество точек $P, TP, \dots, T^kP$ является всюду плотным на C (назовем C *интранзитивной*).

4. Ни одна из точек C не является периодической, для некоторой точки P множество точек $P, TP, \dots, T^kP$ является всюду плотным на C (назовем C *транзитивной*).

В случае 1 все точки имеют один и тот же период n. Если P — произвольная точка, то точки $P, TP, \dots, T^{n-1}P$ делят C на n неперекрывающихся дуг.

В случае 2 все периодические точки имеют одинаковый период n. Множество периодических точек F замкнуто. Дополнительное множество $C - F$ состоит из счетного числа дуг с концами в F, каждая из которых неизменна при действии оператора T^n.

Рассмотрим случай 3. Пусть Q — произвольная точка C, и пусть σ — множество предельных точек множества $Q, TQ, \dots, T^kQ$. Множество σ является совершенным нигде не плотным множеством и не зависит от точки Q.

В случае 4 преобразование T топологически эквивалентно вращению окружности, т. е. существуют действительное ξ и непрерывное отображение $t = f(P)$ точек P кривой C на точки $e^{2\pi it}$ единичной окружности на комплексной плоскости такие, что $f(TP) = t + \xi$. Постоянная ξ иррациональна и однозначно определяется кривой C. Эта постоянная называется *модулем* кривой C.

Теорема 3. *Пусть C_1, C_2 — транзитивные кривые с одинаковым модулем ξ, D_1, D_2 — области, ограниченные этими кривыми. Тогда существует h-отображение области D_1 на область D_2.*

Следствие. *Пусть C — транзитивная кривая с модулем ξ и D — область, ограниченная C. Тогда существует h-отображение области D на прямоугольник со сторонами $y = -x + 1$, $x \in [0, 1]$; $y = x - 1$, $x \in [1, \eta]$; $y = x + 1$, $x \in [0, \eta - 1]$; $y = -x - 1 + 2\eta$, $\eta = 1/(1 - \xi)$, $x \in [\eta - 1, \eta]$ (рис. 4).*

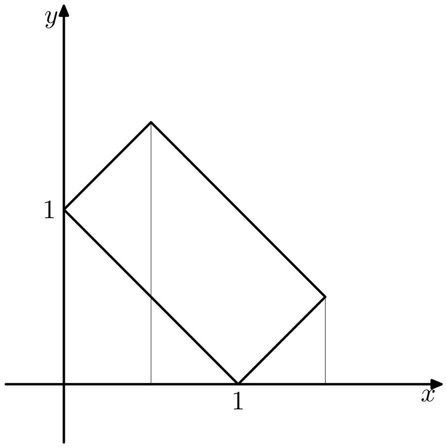

Рис. 4

5. Отображения областей с двумя вершинами. Легко видеть, что область с двумя вершинами можно h-отображением преобразовать в область

$$D = \{(x, y) : f_1(x) < y < f_2(x),\ x \in (0, 1)\},$$

где функции $f_k(x)$, $k = 1, 2$, удовлетворяют следующим условиям:

1) $f_k(0) = 0$, $f_k(1) = 1$,

2) функции $f_k(x)$ непрерывны и монотонно возрастают,

3) $f_1(x) < f_2(x)$, $0 < x < 1$.
Области такого типа мы будем называть *областями типа щели* (рис. 5).

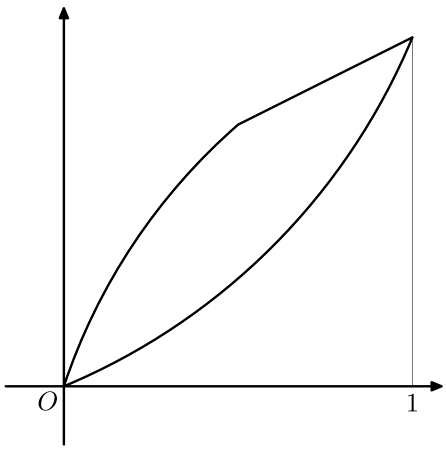

Рис. 5

Теорема 4. *Для любой области D типа щели существует h-отображение этой области на область $D_0 = \{(x, y) : x^2 < y < x,\ x \in (0, 1)\}$ (рис. 6).*

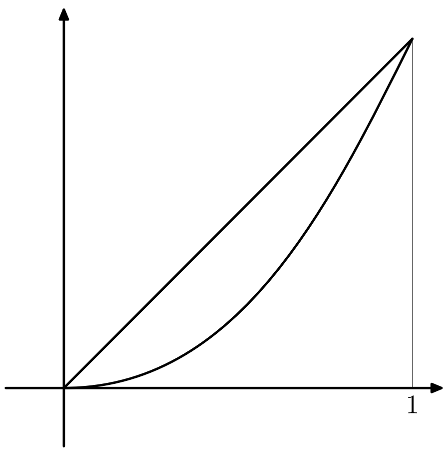

Рис. 6

Доказательство. Рассмотрим h-отображение, осуществляемое функциями $x_1 = \varphi_1(x) = f_2(x)$, $y_1 = y$. Оно переводит область D в область

$$D_1 = \{(x_1, y_1) : f_3(x_1) < y_1 < x_1\}, \quad f_3(x_1) = f_1[\tilde{f}_2(x_1)], \quad \tilde{f}_2[f_2(x)] = x.$$

Теперь рассмотрим h-отображение области D_1, осуществляемое функциями

$$x_2 = \varphi_2(x_1), \quad y_2 = \varphi_2(y_1),$$

где функция $\varphi_2(x_1)$ определяется соотношением

$$\varphi_2\{f_3[\tilde{f}_2(x_2)]\} = x_2^2, \quad \tilde{\varphi}_2[\varphi_2(x_1)] = x_1.$$

Очевидно, что h-отображение, состоящие из указанных двух последовательно примененных h-отображений, переводит исходную область D в область D_0, определенную в формулировке теоремы. Сходный результат может быть получен и в отношении областей, содержащих три крайние точки.

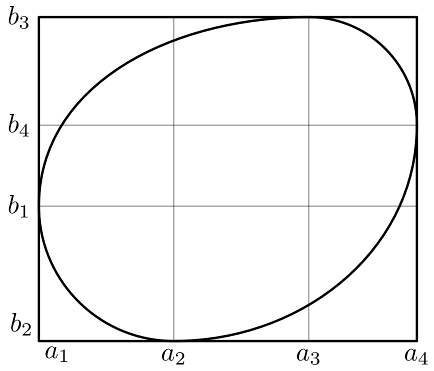

Рис. 7

6. Отображения правильных областей. Пусть D — область, выпуклая относительно осей (x), (y), имеет четыре вершины. Обозначим координаты этих вершин через (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), и пусть

$$a_1 < a_2 \le a_3 < a_4, \quad b_2 < b_1 \le b_4 < b_3$$

(рис. 7). Назовем область *правильной*, если $a_2 = a_3$, $b_1 = b_4$. Легко видеть, что в этом случае существует h-отображение области D на область, у которой

$$a_1 = -1, \quad a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = 1, \quad b_2 = -1, \quad b_1 = b_4 = 0, \quad b_3 = 1$$

(рис. 8).

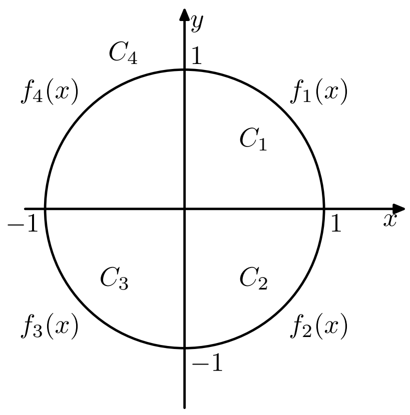

Рис. 8

Итак, пусть D — область, ограниченная кривой C, состоящей из четырех частей: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$,

$$C_1 = \{(x, y) : y = f_1(x),\ x \in [0, 1],\ f_1(0) = 1,\ f_1(1) = 0\},$$
$$C_2 = \{(x, y) : y = f_2(x),\ x \in [0, 1],\ f_2(0) = -1,\ f_2(1) = 0\},$$
$$C_3 = \{(x, y) : y = f_3(x),\ x \in [-1, 0],\ f_3(-1) = 0,\ f_3(0) = -1\},$$
$$C_4 = \{(x, y) : y = f_4(x),\ x \in [-1, 0],\ f_4(-1) = 0,\ f_4(0) = 1\}.$$

Все функции $f_k(x)$ монотонны и непрерывны. Рассмотрим h-отображение области D,

$$x_1 = \varphi^1(x), \quad y_1 = \psi^1(y),$$

где функции φ^1, ψ^1 определяются следующим образом:

1°) $\varphi^1(x) = \varphi^1_1(x) = x$, $x \in [0,1]$, $\psi^1(y) = \psi^1_1(y)$, $y \in [0,1]$, $\psi^1_1[f_1(x)] = -x+1$;

2°) $\psi^1(y) = \psi^1_2(y)$, $y \in [-1,0]$, $\psi^1_2[f_2(x)] = x-1$, $x \in [0,1]$;

3°) $\varphi^1(x) = \varphi^1_3(x)$, $x \in [-1,0]$, $\psi^1_2(y) = f_3(x)$, $y = \tilde{f}_3(x)$, $\psi^1_2[\tilde{f}_3(x)] = f_3(x)$, $-\varphi^1_3(x) - 1 = \tilde{f}_3(x)$;

4°) $\psi^1(y) = \psi^1_4(y) = \psi^1_1(y)$, $y \in [0,1]$, $\psi^1_4(y) = f_4\bigl[\psi^1_4(x)\bigr]$, $y = f(x)$, $\psi^1_4[f(x)] = f_4\bigl[\varphi^1_4(x)\bigr]$.

Определенное таким образом отображение переводит область D в область D_0 плоскости (x_1, y_1), ограниченную тремя сторонами квадрата и кривой $y_1 = f(x_1)$ (рис. 9).

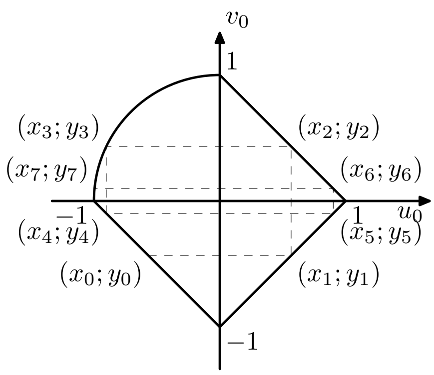

Рис. 9

Рассмотрим теперь h-отображения, переводящие область D_0 в область D_1 плоскости (u, v) такого же типа, как D_0, т. е. в область, ограниченную тремя сторонами квадрата и некоторой кривой:

$$v = F(u),\ u \in [-1,0], \quad F(-1) = 0, \quad F(0) = -1, \quad F'(u) > 0,\ u \in (-1,0).$$

Пусть это отображение определяется функциями $u = \varphi(x_1)$, $v = \psi(y_1)$. Из того, что отображение переводит область D_0 в D_1, следует, что эти функции связаны следующими соотношениями:

$$\psi(1-x) = -\varphi(x) + 1,\ x \in [0,1], \quad \psi(x-1) = \varphi(x) - 1,$$
$$\varphi(x) = -\psi(-x-1) - 1,\ x \in [-1,0].$$

Таким образом, значения функций $\varphi(x)$, $\psi(y)$ на отрезке $[-1,1]$ определяются значениями функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0,1]$. Предположим теперь, что функции $f(x)$ и $F(u)$, определяющие части границ областей D_0, D_1, удовлетворяют неравенствам

$$f(x) > x-1,\ x \in (-1,0), \quad F(u) > u-1,\ u \in (-1,0). \tag{2}$$

Функции $f(x)$, $F(u)$, $\varphi(x)$ связаны следующим функциональным соотношением:

$$f[\varphi(1-x) - 1] = F[\varphi(1-x) - 1].$$

Будем считать теперь функции $f(x)$, $F(u)$ заданными и рассмотрим данное соотношение как функциональное уравнение относительно функции $\varphi(x)$. Нетрудно показать, что при выполнении условий 1°, 2° у этого уравнения существует единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(x) < 0, \quad x \in (0, 1).$$

В качестве функции $F(u)$ можно взять, например, функцию $F(u) = \sqrt{1-u}$, $u \in [-1, 0]$. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Для любой правильной области D плоскости (x, y), для которой функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству* (2), *существует h-отображение D на область D_1 плоскости (u, v), ограниченной тремя сторонами квадрата и частью параболы $v = \sqrt{1-u}$.*

Итак, установлены теоремы о возможности h-отображений на канонические области для двух классов неограниченных областей и трех классов ограниченных областей, выпуклых по отношению к осям (x), (y). По мнению автора настоящей работы, представляет интерес исследование возможности h-отображений произвольной выпуклой области на канонические области.

7. Рассмотрим вопрос об аналогах h-отображений в трехмерном пространстве. Как известно, конформные отображения в трехмерном пространстве приводят к системе пяти уравнений относительно трех функций. Множество этих отображений ограничивается движениями, преобразованием подобия и инверсией (теорема Лиувилля). В ряде работ М. А. Лаврентьева были рассмотрены отображения, названные им гармоническими. Эти отображения связаны с системой четырех уравнений и описывают стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости в трехмерном пространстве. По мнению автора, естественным аналогом h-отображений в трехмерном пространстве являются отображения, осуществляемые решениями системы трех уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = C,$$

где C — некоторая постоянная.

Общее решение этой системы представимо в виде

$$u = u(y, z), \quad v = v(x, z), \quad w = w(x, y) + cz.$$

Назовем эти отображения H-отображениями.

Пусть D_0 — выпуклая область плоскости (x, y) с непрерывно дифференцируемой границей C и $f(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная в области D_0, удовлетворяющая следующим условиям:

1°) $f(x, y) = 0$, $(x, y) \in C$, $f(x, y) > 0$, $(x, y) \in D_0$;

2°) $f''_{xx}(x, y)\xi^2 + 2f''_{xy}(x, y)\xi\eta + f''_{yy}(x, y)\eta^2 \le -\rho(\xi^2 + \eta^2)$, $\rho > 0$.

Обозначим через D область $\{(x, y, z) : f(x, y) > z,\ z > 0\}$ в трехмерном пространстве и через D_z — область $\{(x, y) : f(x, y) > z\}$ в плоскости (x, y). Если для каждого $z > 0$ область D_z допускает h-отображение на некоторую каноническую область, то для области D трехмерного пространства существует H-отображение на каноническую область, осуществляемое функциями

$$u = u(y, z), \quad v = v(x, z), \quad w = cz.$$

8. Обратная задача для области типа щели. Перейдем к рассмотрению обратных задач томографии, о которых говорилось в начале работы.

Пусть D — область из теоремы 4: $D = \{(x, y) : f_1(x) < y < f_2(x),\ x \in (0, 1)\}$, где функции $f_k(x)$ удовлетворяют условиям 1–3, указанным при формулировке теоремы 4.

Очевидно, что если функции $\varphi_k(y)$, $k = 1, 2$, являются обратными по отношению к функциям $f_k(x)$, т. е. $\varphi_k[f_k(x)] = x$, то

$$D = \{(x, y) : \varphi_2(y) < x < \varphi_1(y),\ y \in (0, 1)\}.$$

Обозначим $u(x) = f_2(x) - f_1(x)$, $v(y) = \varphi_1(y) - \varphi_2(y)$.

Обратная задача. *Требуется определить функцию $f_k(x)$ или $\varphi_k(y)$ по заданным функциям $u(x)$, $v(y)$.*

Теорема 6. *Решение сформулированной обратной задачи единственно.*

Доказательство. Пусть x_0 — некоторая точка на интервале $(0, 1)$. Обозначим $f_1(x_0) = y_0$, $x_1 = y_0 - v(y_0)$. Тогда $f_2(x_1) = y_0$, $f_1(x_1) = y_0 - u(x_1)$.

Рассмотрим последовательности

$$x_{k+1} = x_k - v(y_k), \quad y_{k+1} = y_k - u(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Очевидно,

$$x_{k+1} < x_k, \quad y_{k+1} < y_k, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Соотношения (3) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно величины $f_1(x_0) = y_0$.

Легко видеть, что решение этого функционального уравнения единственно, откуда и следует справедливость утверждения теоремы.

9. Обратная задача для правильных областей. Мы ограничимся рассмотрением обратных задач для областей, удовлетворяющих условиям теоремы 5. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ — непрерывно дифференцируемые функции, определенные на отрезках $[a_1, a_3]$, $[b_1, b_3]$ и удовлетворяющие условиям

1°) $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$, $x \in (a_1, a_3)$, $\psi_1(y) < \psi_2(y)$, $y \in (b_1, b_3)$;

2°) $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1)$, $\varphi_1(a_3) = \varphi_2(a_3)$, $\psi_1(b_1) = \psi_2(b_1)$, $\psi_1(b_3) = \psi_2(b_3)$;

3°) $\varphi_1'(x) < 0$, $x \in (a_1, a_2)$; $\varphi_1'(x) > 0$, $x \in (a_2, a_3)$; $\varphi_2'(x) > 0$, $x \in (a_1, a_2)$; $\varphi_2'(x) < 0$, $x \in (a_2, a_3)$; $\psi_1'(y) > 0$, $y \in (b_1, b_2)$, $\psi_1'(y) < 0$, $y \in (b_2, b_3)$; $\psi_2'(y) < 0$, $y \in (b_1, b_2)$; $\psi_2'(y) > 0$, $y \in (b_2, b_3)$;

4°) $\varphi_1[\psi_1(y)] = y$, $\varphi_2[\psi_2(y)] = y$.

Обозначим через D область $\{(x, y) : \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} = \{(x, y) : \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$ (рис. 10).

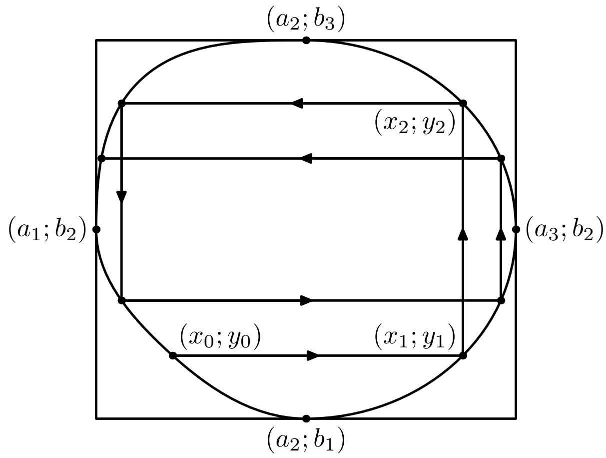

Рис. 10

Предположим, кроме того, что область D удовлетворяет условиям теоремы 5, и обозначим через $u(x)$, $v(y)$ функции

$$u(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x), \quad v(y) = \psi_2(y) - \psi_1(y). \tag{4}$$

Обратная задача. *Требуется по заданным функциям $u(x)$, $v(y)$ определить функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$. Точки (a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_2, b_1) — вершины области D.*

Из (4) следует, что $b_3 = b_1 + u(a_2)$, $a_3 = a_1 + v(b_2)$. Легко видеть, что числа a_k, b_k, $k = 1, 2, 3$, однозначно определяются по функциям $u(x)$, $v(y)$. Действительно,

$$u(x) = 0,\ x < a_1,\ x > a_3; \quad u(x) > 0,\ x \in (a_1, a_3); \quad u(a_2) = \max u(x);$$
$$v(y) = 0,\ y < b_1,\ y > b_3; \quad v(y) > 0,\ y \in (b_1, b_3); \quad v(b_2) = \max v(y).$$

Пусть (x_0, y_0) — некоторая точка на границе области D. Например, допустим, что $y_0 = \varphi_1(x_0)$, $a_1 < x_0 < a_3$. Тогда точки (x_k, y_k), определяемые равенствами

$$\begin{aligned} x_{4k+1} &= x_{4k} + v(y_{4k}), \quad y_{4k+1} = y_{4k}, \\ x_{4k+2} &= x_{4k+1}, \quad y_{4k+2} = y_{4k+1} + u(x_{4k+1}), \\ x_{4k+3} &= x_{4k+2} - v(y_{4k+2}), \quad y_{4k+3} = y_{4k+2}, \\ x_{4(k+1)} &= x_{4k+3}, \quad y_{4(k+1)} = y_{4k+3} - u(x_{4k+3}) \end{aligned} \tag{5}$$

(см. рис. 10), также лежат на границе области D. Из предположения, что область D удовлетворяет условиям теоремы 5, следуют равенства

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = a_2, \quad \lim_{k\to\infty} y_{2k} = b_1, \quad \lim_{k\to\infty} y_{2k+1} = b_3. \tag{6}$$

Равенства (5), (6) можно рассматривать как уравнение для определения $\varphi_1(x_0)$. Легко видеть, что в силу свойств функции $\varphi_k(x)$ решение этого уравнения единственно. Таким образом, доказана

Теорема 7. *Решение сформулированной обратной задачи единственно.*

10. Обратная задача для областей с транзитивной границей. Пусть D — ограниченная выпуклая относительно осей (x), (y) область с непрерывно дифференцируемой границей. Обозначим вершины области D через (a_1, b_1),

(a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4) (см. рис. 7), $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, $b_2 < b_1 < b_4 < b_3$. Тогда существуют функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$, непрерывно дифференцируемые на интервалах $x \in (a_1, a_4)$, $y \in (b_2, b_3)$, такие, что $D = \{(x, y) : f_1(x) < y < f_2(x),\ x \in (a_1, a_4)\} = \{(x, y) : g_1(y) < x < g_2(y),\ y \in (b_2, b_3)\}$;

1) $f_1(a_1) = f_2(a_1)$, $f_1(a_4) = f_2(a_4)$, $g_1(b_2) = g_2(b_2)$, $g_1(b_3) = g_2(b_3)$;

2) $f_1'(x) < 0$, $x \in (a_1, a_2)$, $f_1'(x) > 0$, $x \in (a_2, a_4)$, $f_2'(x) > 0$, $x \in (a_1, a_3)$, $f_2'(x) < 0$, $x \in (a_3, a_4)$;

3) $g_1[f_1(x)] = x$, $x \in (a_1, a_2)$, $g_1[f_2(x)] = x$, $x \in (a_1, a_3)$, $g_2[f_1(x)] = x$, $x \in (a_2, a_4)$, $g_2[f_2(x)] = x$, $x \in (a_3, a_4)$.

Обозначим через $u(x)$, $v(y)$ функции

$$u(x) = f_2(x) - f_1(x), \quad v(y) = g_2(y) - g_1(y). \tag{7}$$

Обратная задача. *Требуется по функциям $u(x)$, $v(y)$ определить функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$.*

Предположим дополнительно, что C — кривая, ограничивающая область D, транзитивна и вершины области D или кривой C известны.

Теорема 8. *Решение сформулированной обратной задачи единственно.*

Доказательство. Рассмотрим левую вершину кривой C: (a_1, b_1). Тогда в силу (7) точка (x_1, b_1) принадлежит C, где $x_1 = a_1 + v(b_1)$. Далее, $(x_1, y_1) \in C$, где $y_1 = b_1 + u(x_1)$. Рассмотрим последовательность точек (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_k), $k = 1, 2, \dots$, определенную следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k \pm v(y_k), \quad y_{k+1} = y_k \pm u(x_{k+1}). \tag{8}$$

Знаки перед $v(y_k)$, $u(x_k)$ в (8) определяются в зависимости от взаимного расположения точек (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_k) и вершин кривой C.

Так как по нашему предположению кривая C транзитивна, точки (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_k) образуют на кривой C всюду плотное множество, откуда и следует справедливость утверждения теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.* Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987.

2. *Наттерер Ф.* Математические основы компьютерной томографии. М: Мир, 1990.

3. *Николаев А. В.* Сейсмология: научно-техническая революция и задачи XXI столетия // Математическое моделирование в геофизике. Новосибирск: Наука, 1968.

4. *John F.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Amer. J. Math. 1941. V. 63, N 1. P. 141–154.

5. *Александрян Р. А.* Об одной задаче Соболева для специальных уравнений с частными производными четвертого порядка // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 4. С. 631–634.

6. *Зеленяк Т. И.* Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. Новосибирск: НГУ, 1970.

7. *Лаврентьев М. М.* Об одной краевой задаче для гиперболической системы // Мат. сб. 1956. Т. 38, № 4. С. 451–464.

8. *Шабат Б. В.* Об аналоге теоремы Римана для линейных гиперболических систем дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 5. С. 101–105.

9. *Шабат Б. В.* О гиперболических квазиконформных отображениях // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970.

10. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М: Наука, 1977.

Статья поступила 18 апреля 2001 г.

Лаврентьев Михаил Михайлович,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
gelios@math.nsc.ru