*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5*

*УДК 517.9*

# ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПАЙЕРЛСА И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ПАЙЕРЛСА. II

**В. Р. Кирейтов**

**Аннотация:** Представлены доказательства основных результатов (§ 3), сформулированных в первой части одноименной статьи, и необходимых вспомогательных результатов (§ 2). Среди последних главными являются следующие. 1. Формулы (2.12) для матричных элементов матричного дифференциального оператора, действием которого на определенную заданную функцию определяется символ многомерного акустического интегродифференциального оператора Пайерлса. 2. Описание комплексных вещественно-положительных корней вспомогательного трансцендентного уравнения в комплексной плоскости, определяющего корни дисперсионного соотношения для скалярного уравнения Пайерлса (утверждение 1). 3. Асимптотическое разложение с экспоненциальным убыванием по асимптотическому параметру одного интеграла Лапласа специального вида, определяющего асимптотику на бесконечности скалярного акустического потенциала Пайерлса (утверждение 2). В § 3 на основе этих результатов проводятся доказательства основных результатов статьи. Библиогр. 8.

## § 2. Доказательства вспомогательных утверждений

В этом параграфе устанавливаются вспомогательные, необходимые для доказательства основных теорем статьи [1], результаты. Содержание пп. 5–7 относится в основном к доказательству теоремы 1, пп. 8–10 — к доказательству теоремы 2, в п. 11 дана асимптотика интеграла, составляющая основу доказательства теоремы 3.

**5.** По определению символ $\mathfrak{K}(\eta, \xi)$ оператора $\hat{\mathbf{k}}$ сверточного уравнения (1.4) является преобразованием Фурье по переменным $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ распределения $\mathbf{k}(t, x)$ с двойственными переменными $\eta \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^3$ соответственно. Согласно обозначениям и определениям п. 1 матрицу $\mathbf{k}(t, x)$ можно записать в виде

$$\mathbf{k}(t, x) = \frac{1}{t^4} k(t, x)\mathbb{E}(t, x), \tag{2.1}$$

где

$$k(t, x) = \frac{1}{\nu\sqrt{\alpha}} K_\nu(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^3 e^{-\nu t} \frac{e^{-\alpha \frac{x^2}{t^2}}}{t^3}, & t > 0,\ x \neq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00814).

— скалярная вещественная функция, а $\mathbb{E} = (E_{jk}(t,x))$ — матричная функция с матричным элементом $E_{jk}(t,x) = t^4 e_j\big(\frac{x}{t}\big)e_k\big(\frac{x}{t}\big)$, $j,k = 0,1,\dots,4$. Функция $\frac{1}{t^4}k(t,x)$ на пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ изменения переменных $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^3$ бесконечное дифференцируема всюду вне точки $t=0$, $x=0$, быстро убывает на бесконечности (это вытекает непосредственно из доказательства утверждения 1 в [2]) и имеет в точке $t=0$, $x=0$ неинтегрируемую степенную особенность. Таким образом, рассматриваемая функция допускает регуляризацию в пространстве распределений медленного роста на пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Нетрудно убедиться в том, что среди всех указанных регуляризаций найдутся такие распределения, произведение которых с функцией $t^4$ даст в точности функцию $k(t,x)$. Выберем какую-нибудь регуляризацию функции $\frac{1}{t^4}k(t,x)$ из этого класса, и соответствующее распределение обозначим через $z(t,x)$. Заметим, что функция $k(t,x)$ согласно [2] локально интегрируема и определяет регулярное распределение (которое обозначаем таким же образом, как и саму функцию), обратное преобразование Фурье которого допускает представления [2, формула (26)]

$$\Phi^{-1}(k(t,x);\eta,\xi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}e^{-(t^2/4\alpha)\xi^2}\,dt = \sqrt{\pi}\frac{1}{|\xi|}e^{\frac{\gamma^2}{\xi^2}}\operatorname{erfc}\frac{\gamma}{|\xi|}, \tag{2.3}$$
$$\gamma = \sqrt{\alpha}(\nu+i\eta),\ \eta\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^3.$$

Очевидно, распределение $z(t,x)$ вместе с регулярным матричным распределением $\mathbb{E}(t,x)$ принадлежит классу медленно растущих распределений на пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ (для $\mathbb{E}(t,x)$ это означает принадлежность указанному пространству всех ее матричных элементов), и каждый элемент матрицы $\mathbb{E}(t,x)$ является мультипликатором для распределения $z(t,x)$. Таким образом, можно записать $\mathbf{k}(t,x) = z(t,x)\mathbb{E}(t,x)$ и ко всем распределениям этого выражения применять преобразование Фурье по любой совокупности переменных $t$, $x^1$, $x^2$, $x^3$, оставаясь в классе медленно растущих распределений. Для дальнейшего необходимо установить ряд свойств преобразования Фурье распределений $z(t,x)$ и $\mathbb{E}(t,x)$.

**6.** Из определения распределения $z(t,x)$ и свойств преобразования Фурье вытекает, что распределение $\mathscr{Z}(\eta,\xi) = \Phi^{-1}(z;\eta,\xi)$ является регулярным и бесконечно дифференцируемым по совокупности переменных $(\eta,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ на всем пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ распределением и имеют место соотношения

$$\frac{\partial\mathscr{Z}(\eta,\xi)}{\partial\xi^j} = \frac{\xi^j}{2\alpha}\frac{\partial^2\mathscr{Z}(\eta,\xi)}{\partial\eta^2},\quad j=1,2,3.$$

Положим $\mathscr{K}^{(j)}(\eta,\xi) = \frac{\partial^{4+j}\mathscr{Z}(\eta,\xi)}{\partial\eta^{4+j}}$, где $j=-4,-3,\dots,3,4$. Функцию $\mathscr{K}^{(0)}(\eta,\xi)$ можно, очевидно, отождествить с функцией в правой части формулы (2.3). Таким образом, $\mathscr{K}^{(0)}(\eta,\xi) = \sqrt{\pi}\frac{1}{|\xi|}e^{\gamma^2/\xi^2}\operatorname{erfc}\frac{\gamma}{|\xi|}$, $\gamma=\sqrt{\alpha}(\nu+i\eta)$. Из представления (2.3) заменой переменной $t=\frac{\sqrt{\alpha}}{|\xi|}s$ получаем представление

$$\mathscr{K}^{(0)}(\eta,\xi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\alpha}\xi^2}e^{-\beta t}\,dt = \frac{1}{|\xi|}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4}}e^{-\frac{\gamma}{|\xi|}s}\,ds,\quad \beta=\nu+i\eta,\ \xi\neq 0. \tag{2.4}$$

Из определения функций $\mathscr{K}^{(j)}(\eta,\xi)$ и последнего представления выводим следующие представления:

$$\mathscr{K}^{(j)}(\eta,\xi)=\frac{\partial^j\mathscr{K}^{(0)}}{\partial\eta^j}=\left(\frac{-i\sqrt{\alpha}}{|\xi|}\right)^j\frac{1}{|\xi|}\int\limits_0^\infty s^j e^{-\frac{s^2}{4}}e^{-\frac{\gamma}{|\xi|}s}\,ds, \tag{2.5}$$

$$\eta\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^3,\ \xi\neq 0,\ j=1,2,3,4.$$

Вводя в рассмотрение функции

$$\varphi_j(v)=v\int\limits_0^\infty s^j e^{-\frac{s^2}{4}}e^{-vs}\,ds,\quad v\in\mathbb{C},\ j=0,1,\ldots,4, \tag{2.6}$$

можно записать

$$\mathscr{K}^{(j)}(\eta,\xi)=\left(\frac{-i\sqrt{\alpha}}{|\xi|}\right)^j\frac{1}{\gamma}\varphi_j\left(\frac{\gamma}{|\xi|}\right),\quad \eta\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^3,\ \xi\neq 0,\ j=0,1,\ldots,4. \tag{2.7}$$

Приведем простейшие свойства функций $\varphi_j(v)$, которые будут использоваться в дальнейшем.

Применяя формулу 7.4.2 из [3], нетрудно убедиться в том, что $\varphi_j(v)=\frac{\sqrt{\pi}}{i^{k+1}}z\frac{d^jw}{dz^j}(z)$ при $z=iv$, где $w(z)$ — функция 7.1.3 из [3]. Отсюда, в частности, вытекает, что $\varphi_j(v)$ — голоморфные функции переменной $v\in\mathbb{C}$ при всех $j=0,1,\ldots$. Кроме того, пользуясь соотношениями 7.1.20 из [3], получаем для этих функций соотношения

$$\begin{gathered}\varphi_{j+2}(v)+2v\varphi_{j+1}(v)-2(j+1)\varphi_j=0,\ j=0,1,\ldots,\\ \varphi_1(v)=2v(1-\varphi_0(v)).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Эти соотношения позволяют представить функцию $\varphi_j(v)$ при произвольном $j=1,2,\ldots$, в виде $\varphi_j(v)=A_j(v)\varphi_0(v)+B_j(v)$, где $A_j(v)$, $B_j(v)$ — полиномы переменной $v\in\mathbb{C}$ степени не выше $j$. В частности,

$$\begin{gathered}\varphi_1(v)=-2v\varphi_0(v)+2v,\quad \varphi_2(v)=2(1+2v^2)\varphi_0(v)-4v^2,\\ \varphi_3(v)=-4v(3+2v^2)\varphi_0(v)+8v(1+v^2),\\ \varphi_4=4(3+12v^2+4v^4)\varphi_0(v)-8v^2(5+2v^2).\end{gathered} \tag{2.9}$$

Кроме того, имеют место очевидные соотношения $\varphi_{j+1}(v)=-v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}\varphi_j(v)\right)$, $j=0,1,\ldots$.

**7.** Элемент $E_{jk}(t,x)=t^4e_j\left(\frac{x}{t}\right)e_k\left(\frac{x}{t}\right)$ матрицы $\mathbb{E}(t,x)$ является, очевидно, однородным полной степени 4 многочленом от переменных $t$, $x^1$, $x^2$, $x^3$. Преобразование Фурье $\Phi^{-1}(\mathbb{E}(t,x);\eta,\xi)$ матрицы $\mathbb{E}(t,x)$ представляется матричным дифференциальным оператором $\mathbb{P}=(2\pi)^4(P_{jk})_{0\leq j,k\leq 4}$ с матричным элементом $P_{jk}$, являющимся однородным порядка 4 дифференциальным оператором по переменным $\eta$, $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$ с постоянными коэффициентами. Не составляет особого труда убедиться в том, что этот матричный дифференциальный оператор представляется матрицей $(2\pi)^4(P_jP_k)_{0\leq j,k\leq 4}$ операторов $P_jP_k$, где скалярные дифференциальные однородные порядка 2 операторы $P_0,P_1,\ldots,P_4$ и их действие на функцию $\mathscr{Z}(\eta,\xi)$ описываются ниже. Именно, дифференциальные операторы $P_j$ определяются формулами

$$P_0=-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2};\quad P_j=-\sqrt{2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi j},\ j=1,2,3;\quad P_4=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(3\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-2\alpha\Delta_\xi\right), \tag{2.10}$$

где $\Delta_\xi = \sum\limits_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial\xi^j)^2}$ — оператор Лапласа по переменным $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$. Действие этих операторов на функцию $\mathscr{Z}(\eta,\xi)$ описывается формулами

$$P_0\mathscr{Z} = -\mathscr{K}^{(-2)}; \quad P_j\mathscr{Z} = -\frac{\xi^j}{\sqrt{2\alpha}}\mathscr{K}^{(-1)},\ j=1,2,3;$$
$$P_4\mathscr{Z} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{(\xi)^2}{2\alpha}\mathscr{K}^{(0)}, \tag{2.11}$$

а действие операторов вида $P_jP_k$ на ту же функцию $\mathscr{Z}(\eta,\xi)$ — формулами

$$P_0^2\mathscr{Z} = \mathscr{K}^{(0)}; \quad P_0P_j\mathscr{Z} = P_jP_0\mathscr{Z} = \frac{\xi^j}{\sqrt{2\alpha}}\mathscr{K}^{(1)},\ j=1,2,3,$$
$$P_0P_4\mathscr{Z} = P_4P_0\mathscr{Z} = \frac{(\xi)^2}{\sqrt{24}\alpha}\mathscr{K}^{(2)};$$
$$P_jP_k\mathscr{Z} = P_kP_j\mathscr{Z} = \delta^{jk}\mathscr{K}^{(0)} + \frac{\xi^j\xi^k}{2\alpha}\mathscr{K}^{(2)},\ j=1,2,3; \tag{2.12}$$
$$P_jP_4\mathscr{Z} = P_4P_j\mathscr{Z} = \frac{\xi^j}{\sqrt{12}\sqrt{\alpha}}\left(2\mathscr{K}^{(1)} + \frac{(\xi)^2}{2\alpha}\mathscr{K}^{(3)}\right), \quad j=1,2,3;$$
$$P_4^2\mathscr{Z} = \mathscr{K}^{(0)} + \frac{(\xi)^2}{3\alpha}\mathscr{K}^{(2)} + \frac{(\xi)^4}{24\alpha^2}\mathscr{K}^{(4)}, \quad (\xi)^2 = \sum_{j=1}^{3}(\xi^j)^2,\ (\xi)^4 = (\xi^2)^2,$$

$\delta^{jk}$ — символ Кронекера.

**8.** В пп. 8–10 рассматривается трансцендентное уравнение

$$\gamma - b\varphi_0\left(\frac{1}{u}\right) = \gamma - \sigma\sqrt{\alpha}\sqrt{\pi}\frac{1}{u}e^{1/u^2}\operatorname{erfc}\frac{1}{u} = 0 \tag{2.13}$$

в области комплексных переменных $\gamma, u \in \mathbb{C}$, где $\sigma$, $\alpha$ — некоторые фиксированные положительные постоянные, $b = \sigma\sqrt{\alpha}$. Уравнение (2.13) получается из дисперсионного соотношения (1.12) заменой переменных $u = \frac{|\xi|}{\gamma}$. Для последующих рассмотрений указанная замена переменной предпочтительнее замены $v = \frac{\gamma}{|\xi|}$, также представляющей определенные удобства, поскольку в терминах именно этой переменной $u$ записаны и доказаны основные интегральные представления (33)–(35) из [2] для скалярного потенциала Пайерлса. С целью дальнейшего упрощения формул перейдем от двухсимвольной записи часто встречающейся ниже функции $\varphi_0(v)$ и связанной с ней функции $\varphi_0(\frac{1}{u})$ к односимвольной записи. Именно, введем в рассмотрение функции $\mathscr{H}(v) = \varphi_0(v)$, $v \in \mathbb{C}$, и $H(u) = \mathscr{H}(\frac{1}{u})$, $u \in \mathbb{C}, u \neq 0$; $H(0) = \sqrt{\pi}$. Для изучаемых в настоящей статье вопросов без умаления общности можно рассматривать вместо (2.13) приведенное относительно коэффициента $b$ уравнение вида

$$\gamma - H(u) = \gamma - \sqrt{\pi}\frac{1}{u}e^{1/u^2}\operatorname{erfc}\frac{1}{u} = 0. \tag{2.14}$$

Всюду далее мы пользуемся обозначениями и результатами статьи [2] (в основном из Приложения). Отметим, что введенная функция $\mathscr{H}$ связана с функцией $\mathscr{G}$ из [2] соотношением $\mathscr{H} = \sqrt{\pi}\mathscr{G}$.

Основные вопросы к уравнению (2.14) связаны с его разрешимостью относительно переменной $u$ при заданных значениях переменной $\gamma$ из определенных областей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (иначе говоря, с вопросами обращения функции $H(u)$ на тех или иных областях комплексной плоскости), а также с некоторыми свойствами неявной функции $u(\gamma)$, определяемой уравнением (2.14), и некоторыми функционалами от $u(\gamma)$.

Отметим вначале некоторые свойства уравнения (2.14), вытекающие из общих соображений одномерного комплексного анализа. Поскольку, очевидно, $\mathscr{H}(v)$ — голоморфная на всей плоскости трансцендентная функция, бесконечно удаленная точка $v = \infty$ является для нее существенно особой точкой. Отсюда следует, что функция $H(u) = \mathscr{H}\left(\frac{1}{u}\right)$ голоморфна всюду на $\mathbb{C}$ вне точки $u = 0$ и что точка $u = 0$ — существенно особая точка для $H(u)$. Согласно известной общей теореме Пикара [4] функция $H(u)$ в любой окрестности точки $u = 0$ должна принимать в качестве своего значения каждое комплексное число, за исключением, возможно, одного числа $\gamma_{\text{sing}}$, и притом бесконечное количество раз. Это значит, что уравнение (2.14) для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $\gamma \in \mathbb{C}$, отличного от числа $\gamma_{\text{sing}}$, имеет, и притом бесконечное, множество различных решений $u(\gamma)$ с модулем, не превосходящим величины $\varepsilon$. С другой стороны, напомним, что в [2, утверждение 1 Приложения] установлены существование и единственность решения $u(\gamma)$ уравнения (2.14) в расширенной полуплоскости $\operatorname{Re} u \geq 0$ для любого $\gamma$ из замкнутой области $\overline{S}_i$, где $S_i$ — открытая область плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная объединением кривой $C$ с параметрическим уравнением $z(s) = x(s) + iy(s)$, $x(s) = 2se^{-s^2} \int\limits_0^s e^{t^2}\, dt$, $y(s) = \sqrt{\pi} s e^{-s^2}$, $s \in R$, и точки $z = 1$. Из представленного в [2] доказательства указанного утверждения непосредственно вытекает, что решение $u(\gamma)$ как функция переменной $\gamma$ является однолистной голоморфной функцией на области $S_i$ и непрерывной функцией на замкнутой области $\overline{S}_i$ с областью значений в расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}^*$; при этом $u(0) = \infty, u(1) = 0$. В соответствии с неотрицательностью величины $\operatorname{Re} u(\gamma)$ будем называть функцию $u(\gamma)$ с областью определения $\overline{S}_i$ и областью значений в $\mathbb{C}^*$ вещественно-положительным решением уравнения (2.14). Обозначим через $\widetilde{S}_i$ область $S_i$ с присоединенной к ней граничной кривой $C$; иначе говоря, $\widetilde{S}_i$ — часть замкнутой области $\overline{S}_i$, дополнительная к точке $z = 1$ (или область $\overline{S_i}$ с выколотой точкой $z = 1$). Будем говорить, что функция $f(z)$, заданная на некотором подмножестве $A \subseteq \mathbb{C}$ комплексной плоскости, допускает голоморфное (мероморфное) продолжение с этого множества, если существует голоморфная (мероморфная) функция на некоторой открытой его окрестности, совпадающая с $f(z)$ на $A$. Ясно, что мероморфное продолжение вещественно-положительного решения $u(\gamma)$ с множества $\widetilde{S}_i$ на какую-либо открытую область $U \supset \widetilde{S}_i$ является решением уравнения (2.14) на области $U$ изменения переменной $\gamma$. Основные результаты настоящей статьи относительно уравнения (2.14) заключены в следующем утверждении.

**Утверждение 1.** (A) *Вещественно-положительное решение $u(\gamma)$, уравнения* (2.14) *допускает мероморфное однолистное продолжение $\tilde{u}(\gamma)$ на некоторую открытую область $U \supset \widetilde{S}_i$ в $\mathbb{C}$ с единственным, и притом простым, полюсом в точке $\gamma = 0$.*

(B) *Имеет место предельное соотношение* $\lim\limits_{\gamma \in S_i, \gamma \to 1} \frac{du}{d\gamma} = \infty$. *Функция $u(\gamma)$ не может быть продолжена голоморфно или мероморфно с множества $\widetilde{S}_i$ в точку $\gamma = 1$ (или, что то же самое, в какую либо открытую окрестность множества $\overline{S}_i$). В частности, $u(\gamma)$ не допускает однолистного голоморфного продолжения* *с области $S_i$ на всю полуплоскость $\operatorname{Re}\gamma > 0$.*

(C) *Для функции $\tau(\gamma) = \gamma u(\gamma)$ на множестве $\widetilde{S}_i$ имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{\gamma\in S_i,\,\gamma\to 0} \tau(\gamma) = \sqrt{\pi}$, и функция $\tau(\gamma)$, доопределенная значением $\tau(0) = \sqrt{\pi}$, является непрерывной функцией на замкнутой области $\overline{S}_i$ (для этой продолженной функции используем прежнее обозначение $\tau(\gamma)$). При этом $\tau(1) = 0$ и $\bar{\tau}(\gamma) = \tau(\bar{\gamma})$ для любого $\gamma \in \overline{S}_i$, где черта сверху над символами $\gamma$, $\tau$ — знак комплексного сопряжения.*

*Функция $\tau(\gamma)$, $\gamma \in S_i$, допускает однолистное голоморфное продолжение с множества $\widetilde{S}_i$ в $\mathbb{C}$ и не допускает однолистного голоморфного или мероморфного продолжения в точку $\gamma = 1$. В частности, $\tau(\gamma)$ не может быть продолжена с области $S_i$ как однолистная голоморфная функция на всю полуплоскость $\operatorname{Re}\gamma > 0$.*

(D) *$\operatorname{Re}\tau(\gamma) > 0$ при всех $\gamma \in S_i$; $\operatorname{Re}\tau(\gamma) = 0$ при $\gamma \in \overline{S}_i$ тогда и только тогда, когда $\gamma = 1$. $\operatorname{Im}\tau(\gamma) = 0$ при $\gamma \in S_i$ тогда и только тогда, когда $\gamma$ вещественно (и, следовательно, $\gamma \in [0, 1]$).*

(E) *$|\operatorname{Im}\tau(\gamma)| \le 2\theta$ при всех $\gamma \in \overline{S}_i$, где $\theta$ — максимальное значение функции $F(x) = e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$ на полупрямой $x \ge 0$ (приближенно $\theta \approx 0,541\ldots$, и достигается этот максимум в точке $x \approx 0,924\ldots$ [5, § 2.3]). Максимальное по модулю значение $2\theta$ достигается функцией $\operatorname{Im}\tau(\gamma)$ в точках $\gamma_0$, $\bar{\gamma}_0$, которые являются точками пересечения прямой $\operatorname{Re}\gamma = 1$ с ветвями кривой $C$, расположенными в верхней ($\operatorname{Im}\gamma > 0$) и нижней ($\operatorname{Im}\gamma < 0$) полуплоскостях соответственно, при этом $\operatorname{Im}\tau(\gamma_0) = 2\theta$, $\operatorname{Im}\tau(\bar{\gamma}_0) = -2\theta$.*

(F) *Множество $\mathfrak{L}^\delta = \{\gamma \in \overline{S}_i \mid |\operatorname{Im}\tau(\gamma)| \ge \delta\}$, $0 < \delta \le 2\theta$, замкнуто в $\mathbb{C}$ и инвариантно относительно операции комплексного сопряжения. Оно представляется в виде несвязного объединения своих подмножеств $\mathfrak{L}^\delta_+$, $\mathfrak{L}^\delta_-$, лежащих в полуплоскостях $\operatorname{Im}\gamma > 0$, $\operatorname{Im}\gamma < 0$ соответственно. При $\delta < 2\theta$ часть множества $\mathfrak{L}^\delta$, лежащая на границе $dS_i$ области $S_i$, представляется в виде несвязного объединения двух комплексно сопряженных друг другу (как подмножеств плоскости $\mathbb{C}$) отрезков $I^\delta_+$, $I^\delta_-$ кривой $C$, содержащих точки $\gamma_0$, $\bar{\gamma}_0$ соответственно в качестве своих внутренних точек.*

**9.** Прежде чем приступить к доказательству этого утверждения, приведем ряд вспомогательных формул и утверждений.

Используя формулу 7.1.23 из [3], имеем следующее асимптотическое разложение при $v \to \infty$ для функции $\mathscr{H}(v)$ в секторе $|\arg v| \le \frac{3}{4}\pi$:

$$\mathscr{H}(v) \sim 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{(2v^2)^m}. \tag{2.15}$$

Рассмотрим функции $\mathscr{D}(v) = \mathscr{H}(v)/v = \sqrt{\pi}e^{v^2}\operatorname{erfc} v$ и $D(u) = \mathscr{D}\left(\frac{1}{u}\right) = uH(u) = \sqrt{\pi}e^{1/u^2}\operatorname{erfc}\frac{1}{u}$, $u, v \in \mathbb{C}$. Очевидно, $\mathscr{D}(v)$ — голоморфная трансцендентная функция на всей плоскости $\mathbb{C}$, $\lim\limits_{v\to 0}\mathscr{D}(v) = \sqrt{\pi}$, $\lim\limits_{v\to\infty,\,|\arg v|<\frac{3}{4}\pi}\mathscr{D}(v) = 0$ (последнее предельное соотношение вытекает из представления (2.15)); точка $v = \infty$ — существенно особая точка для $\mathscr{D}(v)$. Из формулы 7.4.2 в [3] при значениях параметров $a = 1$, $b = v$, $c = 0$ имеем интегральное представление для функции

$\mathscr{D}(v)$ при всех значениях $v \in \mathbb{C}$:

$$\mathscr{D}(v) = 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2} e^{-2vt}\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-s^2/4} e^{-vs}\,ds, \quad v \in \mathbb{C}, \tag{2.16}$$

где последний интеграл этой формулы получен из предыдущего заменой переменной $s = 2t$. Очевидно, что эти интегралы абсолютно сходятся при всех значениях $v \in \mathbb{C}$. Следующее интегральное представление функции $\mathscr{D}(v)$ имеет силу при $\operatorname{Re} v > 0$. Замечая, что $\mathscr{D}(v) = \sqrt{\pi} w(iv)$, где $w(z)$ — функция 7.1.3 из [3], и пользуясь формулой 7.1.4 из [3], приходим к представлению:

$$\mathscr{D}(v) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{-t^2}}{iv - t}\,dt, \quad \operatorname{Re} v > 0. \tag{2.17}$$

Переходя к мнимым и вещественным частям функции $\mathscr{D}(v)$, получим их интегральные представления

$$\operatorname{Re}\mathscr{D}(v) = \frac{\operatorname{Re} v}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{-t^2}}{(\operatorname{Im} v - t)^2 + (\operatorname{Re} v)^2}\,dt, \tag{2.18}$$

$$\operatorname{Im}\mathscr{D}(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{-t^2}(\operatorname{Im} v - t)}{(\operatorname{Im} v - t)^2 + (\operatorname{Re} v)^2}\,dt, \quad \operatorname{Re} v > 0. \tag{2.19}$$

Функция $D(u)$, очевидно, голоморфна всюду на плоскости $\mathbb{C}$ вне точки $u = 0$, которая является существенно особой точкой для $D(u)$. На полупространстве $\operatorname{Re} u \geq 0$ функция $D(u)$ непрерывна и ограничена; при этом

$$\lim_{u\to 0, |\arg u| < (3/4)\pi} D(u) = 0, \quad \lim_{u\to\infty} D(u) = \sqrt{\pi}.$$

Из интегральных представлений (2.17)–(2.19) для функции $\mathscr{D}(v)$ заменой переменной $v = \frac{1}{u}$ получаются соответствующие представления для функции $D(u)$.

Вернемся к рассмотрению функции $\mathscr{H}(v)$. Интегрированием по частям нетрудно установить соотношение

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty s e^{-s^2/4} e^{-vs}\,ds = 1 - v\int\limits_0^\infty e^{-s^2/4} e^{-vs}\,ds, \quad v \in \mathbb{C}. \tag{2.20}$$

Отсюда, используя соотношение $\mathscr{H}(v) = v\mathscr{D}(v)$ и формулу (2.16), выводим интегральное представление

$$\mathscr{H}(v) = 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty s e^{-s^2/4} e^{-vs}\,ds, \quad v \in \mathbb{C}. \tag{2.21}$$

Интеграл в формуле (2.21) абсолютно сходится вместе с любой своей производной по параметру $v$ при всех значениях $v \in \mathbb{C}$, и, следовательно, для него допустимо дифференцирование любого порядка по параметру $v$ под знаком интеграла. Производя указанные дифференцирования, получаем представления

$$\frac{d^k(\mathscr{H}(v))}{dv^k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\int\limits_0^\infty s^{k+1} e^{-s^2/4} e^{-vs}\,ds, \quad v \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.22}$$

Введенные в (2.6) функции $\varphi_j(v)$ следующим образом выражаются через функции $\mathscr{H}(v)$, $\mathscr{D}(v)$:

$$\begin{aligned}&\varphi_0(v)=\mathscr{H}(v)=v\mathscr{D}(v),\quad \varphi_1(v)=2v(1-\mathscr{H}(v))=-v\frac{d(\mathscr{D}(v)}{dv},\\&\varphi_j(v)=(-1)^{j-1}2v\frac{d^{j-1}\mathscr{H}(v)}{dv^{j-1}}=(-1)^j v\frac{d^j\mathscr{D}(v)}{dv^j},\quad j=2,3,\dots.\end{aligned}\tag{2.23}$$

**10. Доказательство утверждения 1.** Рассмотрим предложение (A). В ходе доказательства утверждения 1 Приложения статьи [2] установлено, что отображение $v\to\mathscr{H}(v)$ является конформным отображением полуплоскости $\operatorname{Re}v>0$ на область $S_i$. Поэтому согласно известному критерию локальной однолистности голоморфной функции [4, гл. IV, § 10, п. 34, теорема 2] производная $\frac{d\mathscr{H}(v)}{dv}$ не обращается в нуль нигде в полупространстве $\operatorname{Re}v>0$. Далее, рассматривая значения этой производной

$$\frac{d\mathscr{H}}{dv}(v)=\sqrt{\pi}(1+2v^2)e^{v^2}\operatorname{erfc}v-2v$$

на мнимой оси при значениях $v=is$, $s\in\mathbb{R}$, видим, что соответствующее выражение

$$\frac{d\mathscr{H}}{dv}(is)=\sqrt{\pi}(1-2s^2)e^{-s^2}\operatorname{erfc}(is)-2is,\quad s\in\mathbb{R},$$

имеет своей вещественной частью выражение $\sqrt{\pi}e^{-s^2}(1-2s^2)$, которое обращается в нуль в точках $s=\pm\frac{1}{\sqrt2}$, и только в них, в то время как мнимая часть $\operatorname{Im}\frac{d\mathscr{H}}{dv}(is)$ при $s=\pm\frac{1}{\sqrt2}$ равна $\mp i\sqrt2$. Отсюда следует, что производная $\frac{d\mathscr{H}}{dv}$ отлична от нуля на всей мнимой оси; в частности, точка $v=0$ является простым нулем функции $\mathscr{H}(v)$. Все это позволяет заключить, что отображение $v\to\mathscr{H}(v)$ осуществляет голоморфное локально однолистное отображение некоторой открытой окрестности полупространства $\operatorname{Re}v\ge0$ на некоторую открытую окрестность множества $\widetilde{S}_i$, причем замкнутое полупространство $\operatorname{Re}v\ge0$ отображается на множество $\widetilde{S}_i$ взаимно-однозначно и непрерывно. Используя асимптотическое разложение (2.15), нетрудно убедиться, что производная $\frac{d\mathscr{H}}{dv}(v)$ при $v\to\infty$, $\operatorname{Re}v>0$, стремится к нулю. Перечисленных свойств отображения $v\to\mathscr{H}(v)$ достаточно, чтобы стандартной процедурой аналитического продолжения начиная с некоторого ростка, полученного разрешением уравнения (2.14) в окрестности точки $v=0$ и удовлетворяющего условию $v(0)=0$, получить голоморфное продолжение $\tilde v(\gamma)$ функции $v(\gamma)$ с множества $S_i$ на некоторую открытую окрестность $U$ множества $\widetilde{S}_i$ в $\mathbb{C}$. Тогда очевидно, что функция $\tilde u(\gamma)=\frac{1}{\tilde v(\gamma)}$ реализует требуемое аналитическое продолжение функции $u(\gamma)$ с множества $S_i$ на открытую окрестность $U\supseteq\widetilde{S}_i$, причем $\tilde u(\gamma)$ имеет единственный, и притом простой, полюс в точке $\gamma=0$.

Рассмотрим предложение (B). Указанное в нем предельное соотношение вытекает из соотношения $\frac{du}{d\gamma}(\gamma)=1/\frac{d\gamma}{du}(u(\gamma))$, имеющего место при $\gamma\in S_i$, и представления

$$\frac{d\gamma}{du}(u)=\frac{d(H(u))}{du}=-\frac{1}{2u^2}\int_0^\infty e^{-s^2/4}e^{-s/u}\,ds=-\frac12\int_0^\infty\psi(s)e^{-s/u}\,ds,\tag{2.24}$$

где $\psi(s) = \frac{1}{2}\int\limits_0^s (s-t)^2 t^2 e^{-t^2/4}\,dt$. Указанное представление вытекает из представления (2.21) заменой переменной $v = \frac{1}{u}$ с последующим двукратным интегрированием по частям. Поскольку при $\gamma \in S_i$, $\gamma \to 1$, согласно установленному выше необходимо $u(\gamma) \to 0$, а функция $\psi(s)$, очевидно, растет при $s \to \infty$ не быстрее $s^2$, то последний интеграл в (2.24), а с ним и функция $\frac{d\gamma}{du}(u)$ при $u \to 0$, $\operatorname{Re} u > 0$ стремятся к нулю. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\gamma \in S_i, \gamma \to 1} \frac{du}{d\gamma} = \infty$.

Тот факт, что не может существовать голоморфной или мероморфной функции на области, содержащей множество $\overline{S}_i$ и совпадающей с $u(\gamma)$ на $S_i$, вытекает непосредственно из вышеприведенного предельного соотношения. Действительно, его выполнение означает, что точка $\gamma = 1$ должна быть полюсом этой функции, значения которой согласно установленным свойствам стремятся к нулю при стремлении $\gamma$ внутри области $S_i$ к единице. Известно, что выполнение обоих таких свойств невозможно для голоморфных или мероморфных функций.

Рассмотрим предложение (C). Предельное соотношение для функции $\tau(\gamma)$ и непрерывность ее с указанным доопределением значения в точке $\gamma = 0$ на замкнутой области $\overline{S}_i$ легко выводятся из свойств функции $u(\gamma)$, установленных в предложениях (A), (B). Соотношение $\bar{\tau}(\gamma) = \tau(\bar{\gamma})$ при $\gamma \in \widetilde{S}_i$ вытекает из соотношения $u(\bar{\gamma}) = \bar{u}(\gamma)$ при тех же $\gamma$. Последнее соотношение просто выводится из условий однозначной разрешимости уравнения (2.14), комплексно-сопряженного к нему уравнения $\bar{\gamma} - \sqrt{\pi}\frac{1}{\bar{u}}e^{1/\bar{u}^2}\operatorname{erfc} 1/\bar{u} = 0$ и инвариантности относительно операции комплексного сопряжения множества $\widetilde{S}_i$.

Для доказательства следующих ниже утверждений о свойствах функции $\tau(\gamma)$ при $\gamma \in \overline{S}_i$ воспользуемся функциональными соотношениями, связывающими функции $\tau(\gamma)$ и $D(u) = uH(u)$, $\gamma \in \widetilde{S}_i$, $\operatorname{Re} u \geq 0$: $\tau(\gamma) = D(u(\gamma))$, $\tau(\gamma(u)) = uH(u) = D(u)$. Это позволит решение рассматриваемых вопросов о свойствах функции $\tau(\gamma)$ на области $\overline{S}_i$ редуцировать к решению вопросов о свойствах функции $D(u)$ на полупространстве $\operatorname{Re} u \geq 0$.

Докажем утверждение (D). Из представления (2.18) заменой переменной $v = \frac{1}{u}$ получаем представление для функции $\operatorname{Re} D(u)$:

$$\operatorname{Re} D(u) = \frac{\operatorname{Re} u}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/|u|^4}}{(\operatorname{Im} u - t)^2 + (\operatorname{Re} u)^2}\,dt, \quad \operatorname{Re} u > 0. \tag{2.25}$$

Очевидно, интеграл в правой части (2.25) абсолютно сходится при всех $u \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} u \neq 0$ и при тех же $u$ имеет положительное значение. Следовательно, знак $\operatorname{Re} D(u)$ определяется знаком $\operatorname{Re} u$, и при $\operatorname{Re} u > 0$ имеем $\operatorname{Re} D(u) > 0$. Если $\operatorname{Re} u = 0$, то, полагая $u = is$, $s \in \mathbb{R}$, выводим для функции $D(is)$ следующее представление:

$$D(is) = \sqrt{\pi}e^{-1/s^2}\operatorname{erfc}\left(-\frac{i}{s}\right) = \sqrt{\pi}e^{-1/s^2}(1 + iE(s)), \quad E(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{1/s} e^{t^2}\,dt. \tag{2.26}$$

Из него легко усматривается, что $\operatorname{Re} D(is) = \sqrt{\pi}e^{-1/s^2} > 0$ при всех $s \neq 0$ и $\operatorname{Re} D(0) = 0$. Окончательно для функции $D(u)$ получаем следующее свойство: $\operatorname{Re} D(u) \geq 0$ при всех $u \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} u \geq 0$; $\operatorname{Re} D(u) = 0$ для $u \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} u \geq 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Далее, рассмотрим открытую область $\Delta \subseteq \mathbb{C}$, ограниченную кривой $z(s) = D(is)$, $s \in \mathbb{R}$, с присоединенной (предельной, но не принадлежащей ей) точкой $z = \sqrt{\pi}$, к которой точка $z(s)$ указанной кривой стремится при $|s| \to \infty$. Нетрудно установить, что $\Delta$ — компактная односвязная область, инвариантная относительно операции комплексного сопряжения, лежащая в прямоугольнике $\Upsilon = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 \le x \le \pi,\ |y| \le h\}$, где $h$ — максимальное значение функции $y(s) = \operatorname{Im} z(s) = 2e^{-1/s^2} \int\limits_0^{1/s} e^{t^2}\,dt$ на полупрямой $s \ge 0$ (указанное $h$ достигается функцией $y(s)$ в точке $s_0$, которая является единственным положительным корнем уравнения $y(s) - s = 0$; приближенно $s_0 = y(s_0) \approx 1{,}08\ldots$). Отображение $u \to D(u)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Re} u \ge 0$ на область $\Delta$ так, что граница этой полуплоскости с присоединенной бесконечно удаленной точкой взаимно-однозначно и непрерывно (а значит, и гомеоморфно) отображается на границу $\partial\Delta$ области $\Delta$. При этом $D(0) = 0$, а бесконечно удаленная точка отображается в точку $z = \sqrt{\pi}$. Согласно общим теоремам комплексного анализа отсюда следует, что $D$ — конформное отображение области $\operatorname{Re} u \ge 0$ на область $\Delta$. В частности, $D$ осуществляет гомеоморфизм замкнутых областей $\operatorname{Re} u \ge 0$ и $\overline{\Delta}$ ($\overline{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta$ — замыкание $\Delta$), и $\frac{dD}{du} \ne 0$ при $\operatorname{Re} u > 0$. Поскольку, очевидно, $\overline{D(u)} = D(\bar{u})$ (вытекает из представления (2.16)), то отсюда ясно, что при отображении $u \to D(u)$ вещественная полупрямая $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \subseteq \mathbb{C}$ гомеоморфно отображается на полуинтервал $[0, \sqrt{\pi})$ и вещественность точки $D(u)$ с $\operatorname{Re} u \ge 0$ влечет вещественность самой точки $u$. Отсюда и из установленных свойств функции $u(\gamma)$, $\gamma \in \overline{S}_i$, легко выводятся все утверждения предложения (D) для функции $\tau(\gamma) = \gamma u(\gamma)$, $\gamma \in \overline{S}_i$.

Обращаясь к доказательству предложения (E), заметим, что, максимальное по модулю значение, которое функция $\operatorname{Im} \tau(\gamma) = \operatorname{Im}(D(u(\gamma)))$ принимает на области $\overline{S}_i$, совпадает, очевидно, с максимальным значением функции $\operatorname{Im} D(u)$ на полупространстве $\operatorname{Re} u \ge 0$ с присоединенной бесконечно удаленной точкой (см. замечание, предшествующее доказательству предложения (D)), а последнее, в свою очередь, совпадает с максимальным значением функции $\psi(v) = \operatorname{Im} \mathscr{D}(v)$ на расширенной полуплоскости $\operatorname{Re} v \ge 0$. Для оценки максимума модуля функции $\psi(v)$ на полупространстве $\operatorname{Re} v \ge 0$ будем исходить из представления

$$\psi(v) = \operatorname{Im} \mathscr{D}(v) = \int\limits_0^\infty e^{-s^2/4} e^{-v_1 s} \sin v_2 s\,ds, \quad v = v_1 + iv_2, \tag{2.27}$$

которое получается переходом к мнимым частям выражений в представлении (2.16). Поскольку функция $\psi(v)$ непрерывна на полупространстве $\operatorname{Re} v \ge 0$, гармонична при $\operatorname{Re} v > 0$ и $\lim\limits_{v \to \infty, \operatorname{Re} v > 0} \psi(v) = 0$, то максимальное по модулю значение функции $\psi(v)$ на полупространстве $\operatorname{Re} v \ge 0$ совпадает с максимальным значением $\mathscr{M}$ модуля функции $\psi(v)$ на границе полупространства $\operatorname{Re} v \ge 0$, т. е. на мнимой прямой $\operatorname{Re} v = 0$. Величину $\mathscr{M}$ можно определить на основании следующих соображений. Используя представление (2.27), можно записать

$$\psi(it) = \int\limits_0^\infty e^{-s^2/4} \sin ts\,ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

Последний интеграл можно в соответствии с формулой 7.4.7 из [3] представить в виде

$$\int_0^\infty e^{-s^2/4}\sin ts\,ds = 2e^{-t^2}\int_0^t e^{x^2}\,dx = 2F(t), \tag{2.29}$$

где $F(t) = e^{-t^2}\int_0^t e^{x^2}\,dx$ — известная функция, связанная с интегралом ошибок [5, § 2.3]. Таким образом, $\psi(it) = 2F(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Поведение неотрицательной вещественно-аналитической функции $F(t)$ на вещественной полупрямой $t \geq 0$ достаточно хорошо изучено. В частности, известно [5], что $F(t)$ имеет при $t > 0$ единственную критическую точку $t_0 \approx 0,924\ldots$, в которой принимает (глобальное) максимальное значение $\theta$ ($\theta \approx 0,541\ldots$), монотонно возрастает от 0 до $\theta$ на отрезке $[0, t_0]$ и монотонно убывает от значения $\theta$ до 0 вправо от точки $t_0$ до бесконечности. Отсюда и из свойств отображения $v \to \mathscr{H}(v)$ непосредственно вытекают все утверждения предложения (E).

Перейдем к рассмотрению предложения (F). Утверждение об инвариантности множества $\mathfrak{L}^\delta$ относительно операции комплексного сопряжения с очевидностью следует из свойств функции $\tau(\gamma)$, установленных в предложении (C). Далее, поскольку $\operatorname{Im}\tau(\gamma) = 0$ при вещественных $\gamma$, принадлежащих отрезку $[0,1] \subseteq \overline{S}_i$, ясно, что множество $\mathfrak{L}^\delta$ не имеет общих точек с отрезком $[0,1]$ и, значит, представляется в виде несвязного объединения своих подмножеств $\mathfrak{L}^\delta_+$, $\mathfrak{L}^\delta_-$, состоящих из точек с положительными и отрицательными мнимыми частями соответственно; очевидно также, что операция комплексного сопряжения преобразует подмножества $\mathfrak{L}^\delta_+$, $\mathfrak{L}^\delta_-$ друг в друга. Рассмотрим общую часть $\mathscr{A}$ подмножества $\mathfrak{L}^\delta_+$ и кривой $C$. Ясно, что $\mathscr{A}$ замкнуто и содержит точку $\gamma_0$, указанную в предложении (E). Кроме того, при отображении $u \to H(u)$ в подмножество $\mathscr{A}$ переводятся те и только те точки вида $u = is$ отрицательной мнимой полуоси, в которых абсолютное значение функции $\operatorname{Im}\tau(is)$ превосходит $\delta$. Из формул (2.28), (2.29) и свойств функции $F(t)$, указанных выше, следует, что совокупность всех таких точек заполняет некоторый отрезок $[a,b]$ на отрицательной мнимой полуоси, который содержит точку $-it_0$ в качестве своей внутренней точки. Поскольку при отображении $u \to H(u)$ отрицательная полуось взаимно-однозначно и непрерывно отображается на часть границы области $S_i$, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma > 0$, то, очевидно, множество $\mathscr{A}$ является отрезком верхней ветви кривой $C$ с точкой $\gamma_0$ в качестве своей внутренней точки. Предложение (F) утверждения, а вместе с этим и само утверждение полностью доказаны.

**11.** Следующее утверждение будет использовано для оценки главного фундаментального решения скалярного уравнения Пайерлса на бесконечности.

**Утверждение 2.** *При $\lambda \to \infty$, $\lambda > 0$ имеет место асимптотическое представление*

$$\int_0^\infty s^n e^{-1/s^2} e^{-\lambda\gamma s}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{\lambda\gamma}\right)^{(n+2)/3} e^{-\lambda^{2/3}\delta\gamma^{2/3}}(1 + O(\lambda^{-2/3})), \tag{2.30}$$

$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$ *где* $\delta = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1,89$, $\gamma \in \mathbb{C}$ *— произвольное заданное число с* $\operatorname{Re}\gamma > 0$ *и*

$$\gamma^{p/q} = |\gamma|e^{i(p/q)\arg\gamma} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg\gamma < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq p \leq q.$$

Доказательство. Очевидно, что подавляюще быстрое убывание функции $e^{-1/s^2}$ к 0 при $s \to 0$ в сравнении со степенным ростом функции $s^n$ с $n = -1, -2, \dots$ при $s \to 0$ позволяет функции $s^n e^{-1/s^2}$ оставаться в классе непрерывных функций на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ при всех целых значениях показателя $n$; степенной рост на бесконечности и $C^\infty$-дифференцируемость на полупрямой $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ указанной функции очевидны. Таким образом, интеграл в левой части формулы (2.30) вполне благополучный с точки зрения теории интегрирования и возможности применения для его (асимптотического) вычисления метода перевала. Однако в приведенной записи этого интеграла непосредственное применение метода перевала позволяет установить лишь быстрый (т. е. быстрее любой степени $1/\lambda$) характер его убывания при $\lambda \to \infty$. Произведем в нем замену переменной $t = \sqrt[3]{\lambda\gamma}s$, где для $\gamma^{1/3}$ выбрано указанное выше значение. В результате этой замены рассматриваемый интеграл примет вид

$$(\lambda\gamma)^{-(n+1)/3} \int\limits_{L\gamma} t^n e^{-\lambda^{2/3}\gamma^{2/3}\left(t+\frac{1}{t^2}\right)}\,dt = (\lambda\gamma)^{-(n+1)/3} \int\limits_{L\gamma} t^n e^{\lambda^{2/3} S(t)}\,dt, \qquad (2.31)$$

где $S(t) = -\gamma^{2/3}\left(t + \frac{1}{t^2}\right)$, $t \in \mathbb{C}$, $L_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \xi\gamma^{1/3},\ z \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ — луч, выходящий из точки $z = 0$ в направлении точки $\gamma^{1/3} \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\gamma^{1/3} > 0$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{L_\gamma} s^n e^{\mu S(t)}\,ds, \qquad (2.32)$$

где $\mu = \lambda^{2/3} > 0$. На луче $L_\gamma$ функция $\operatorname{Re} S(t)$ строго отрицательна и принимает максимальное значение в точке $t_0 = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\gamma/\operatorname{Re}\gamma}$, однако эта точка при $\operatorname{Im}\gamma \neq 0$ не совпадает с точкой $\tilde{t}_0 = \sqrt[3]{2}$ перевала функции $S(t)$. Напомним, что точка перевала $\tilde{t}_0$ функции $S(t)$ определяется условием $\frac{dS}{dt}(\tilde{t}_0) = 0$ и является в данном случае простой точкой перевала для $S(t)$. Деформируем (простым поворотом) контур (луч) интегрирования $L_\gamma$ в контур (луч) $L$, совпадающий с вещественной положительной полупрямой $\operatorname{Im} t = 0$, $\operatorname{Re} t > 0$ плоскости $\mathbb{C}$. В силу голоморфности функции $S(t)$ всюду в $\mathbb{C}$ вне точки $t = 0$ и ее поведения на бесконечности в секторе $-\frac{\pi}{3} < \arg t < \frac{\pi}{3}$ ($S(\xi t) \asymp -\xi$ при $\xi \to \infty$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}_+$, в этом секторе значений $t$) такая деформация не меняет значения интеграла (2.32), так что вместо него можно рассматривать равный ему интеграл

$$\int\limits_0^\infty s^n e^{\mu S(t)}\,dt, \qquad (2.33)$$

взятый по вещественной положительной полуоси $L = \overline{\mathbb{R}}_+$. Нетрудно убедиться, что теперь путь интегрирования в (2.33) является перевальным для функции $S(t)$ с простой точкой перевала $\tilde{t}_0 = \sqrt[3]{2}$ внутри контура интегрирования $L$ и выполнены все необходимые условия для асимптотической оценки интеграла (2.33) методом перевала [6, гл. 4, § 2, п. 3]. Используя значения

$$S(\tilde{t}_0) = -\delta\gamma^{2/3}, \quad S''(\tilde{t}_0) = -\sqrt{3\delta}\gamma^{2/3}, \quad \text{где } \delta = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \qquad (2.34)$$

на контуре $L$ и классические формулы метода перевала [6, гл. 4, § 1, п. 3], получаем требуемую асимптотику (2.30). Утверждение доказано.

Замечание. При $n = 0$ и действительных значениях $\gamma$ асимптотика (2.30) совпадает с асимптотикой примера 1.7 из [6, гл. 2, § 1, п. 6].

## § 3. Доказательства основных утверждений

**12. Доказательство теоремы 1.** В принятых обозначениях пп. 2, 5-7 можно дать следующее представление символа $\mathfrak{K}(\eta,\xi)$:

$$\mathfrak{K}(\eta,\xi)=\Phi^{-1}(\mathbf{k}(t,x);\eta,\xi)=\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t^4}k(t,x)\mathbb{E}(t,x);\eta,\xi\right)$$
$$=\Phi^{-1}\left(\frac{1}{t^4}k(t,x);\eta,\xi\right)\otimes\Phi^{-1}(\mathbb{E}(t,x);\eta,\xi)=\mathbb{P}^2(\mathscr{Z}I), \quad (3.1)$$

где $\mathscr{Z}(\eta,\xi)$, $\mathbb{P}$ — функция и матричный дифференциальный оператор пп. 6, 7 соответственно, а $\mathbb{P}^2(\mathscr{Z}I)=(Y_{jk})$— матричное распределение с матричным элементом $Y_{jk}=P_jP_k\mathscr{Z}(\eta,\xi)$, $j,k=0,1,\dots,4$. Используя формулы (2.12) п. 7, получаем искомое представление (1.6) этого символа. Из записи (1.6) очевидно, что комплекснозначная матрица $\mathfrak{K}(\eta,\xi)$, а с ней и матрица $\mathfrak{L}(\eta,\xi)=b\mathfrak{K}-(2\pi)^4I$ симметричны. Отметим, что полученное выражение (1.6) для символа матричного ядра $\mathbf{k}(t,x)$ не зависит от произведенного ранее выбора распределения $z(t,x)$ из описанного при этом выборе класса всевозможных регуляризаций функции $t^{-4}k(t,x)$ (см. п. 6). Это легко усматривается из того, что разность двух таких регуляризаций является распределением, сосредоточенным в точке $x=0$, а произведение этой разности на функцию $t^4$ должно равняться нулю. Это значит, что преобразование Фурье рассматриваемой разности является многочленом от переменных $\eta\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^3$ степени не выше 3 по переменной $\eta$. Поскольку функции $\mathscr{K}^{(j)}$, входящие в выражение символа (1.6) в составе функций $\varphi_j$, выражаются через производные от преобразования Фурье выбранной регуляризации порядков не ниже 4 (см. определение указанных функций в п. 6 сразу после формулы (2.4)), то ясно, что произвол в выборе регуляризации указанного типа не влияет на вид окончательного выражения символа (1.6).

Выражения (1.7)–(1.10) определителей матриц $\mathfrak{K}(\eta,\xi)$ и $\mathfrak{L}(\eta,\xi)$ (порядков $4\times4$ и $5\times5$) могут быть вычислены прямым образом или каким-либо из известных способов линейной алгебры, например, методом элементарных преобразований (соответствующие простые, но громоздкие выкладки здесь равно как и сопровождающие вывод формул (1.7$'$)–(1.10$'$), опускаются).

Голоморфное распространение матричной функции $\mathfrak{K}(\eta,\xi)$ в указанную в формулировке теоремы область $\mathbb{C}\times\Xi$ можно осуществить, например, следующим образом. Рассмотрим функцию

$$\mathscr{X}(Z)=\sqrt{Z^2}=\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}=\sqrt{\xi^2-\zeta^2+2i\langle\xi,\eta\rangle},$$

где $Z=(z_1,z_2,z_3)=\xi+i\zeta$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3$, $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\in\mathbb{R}^3$, $z_j=\xi_j+i\zeta_j$, $j=1,2,3$, $Z^2(Z)=z_1^2+z_2^2+z_3^2=\xi^2-\zeta^2+2i\langle\xi,\zeta\rangle$, и для функции $\sqrt{w}$, $w\in\mathbb{C}$, выбрана главная ветвь с $-\frac{\pi}{2}<\arg w\le\frac{\pi}{2}$. Функция $\mathscr{X}(Z)$ является, очевидно, голоморфной функцией переменной $Z\in\mathbb{C}^3$ в области $\Xi=\{Z\in\mathbb{C}^3|\,\mathrm{Re}\,Z^2=\xi^2-\zeta^2>0\}$ пространства $\mathbb{C}^3$ (как композиция голоморфной целой на пространстве $\mathbb{C}^3$ функции $Z^2$ и голоморфной в полуплоскости $\mathrm{Re}\,w>0$ функции $\sqrt{w}$). При естественном отождествлении комплексификации $\mathbb{R}^3+i\mathbb{R}^3$ пространства $\mathbb{R}^3$ с пространством $\mathbb{C}^3$ функция $\mathscr{X}(Z)$ есть голоморфное распространение функции $|\xi|$, $\xi\in\mathbb{R}^3$, с многообразия $\mathbb{R}^3$ вещественных векторов на область $\Xi$. Теперь, замечая, что произвольный матричный элемент $Y_{jk}(\eta,\xi)$ матрицы $\mathfrak{K}(\eta,\xi)$ является линейной комбинацией произведений функций вида $\xi^j$, $\frac{1}{|\xi|}$, $\varphi_k(\frac{\gamma}{|\xi|})$, $j=1,2,3$, $k=0,1,\dots,4$, $\gamma=\sqrt{\alpha}(\nu+i\eta)$, где функции $\varphi_k(v)$ голоморфны на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, искомое голоморфное продолжение символа получим, заменяя в каждом матричном элементе переменные $\eta$, $\xi_j$ на $\eta+i\theta$, $\xi_j+i\zeta_j$ соответственно, функцию $|\xi|$, $\xi\in\mathbb{R}^3$, указанным ее голоморфным продолжением $\mathscr{Z}(Z)$ в область $\Xi$ и позволяя переменной $\eta+i\theta$ принимать любые комплексные значения из $\mathbb{C}$, а переменной $\xi+i\zeta$ — только лишь из области $\Xi$.

**13. Доказательство теоремы 2.** Отметим вначале, что согласно п. (ii) утверждения 2 из [2] функция $b\mathscr{K}^0(\eta,\xi)| = \frac{b}{\nu\sqrt{\alpha}}|\mathscr{K}(\eta,\xi)| = \frac{\sigma}{\nu}|\mathscr{K}(\eta,\xi)|$ переменных $\eta\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^3$, где $\mathscr{K}(\eta,\xi)$ — функция (26) из [2], достигает своего максимального значения $\frac{\sigma}{\nu}$ в единственной точке $\eta=0,\xi=0$. Из этого сразу вытекает утверждение (i) настоящей теоремы. Кроме того, отсюда же ясно, что уравнение (1.14) может иметь корни вида $(\eta,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда $\nu=\sigma$, и если последнее выполнено, то (1.14) имеет единственный вещественный корень $\eta=0$, $\xi=0$. Этим доказывается частный случай утверждения (ii) теоремы, когда $\nu=\sigma$; в этом случае $\rho(\nu,\nu)=0$ и многообразие $S_{\nu,\nu}$ сводится к единственной точке $(0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Далее исключим из рассмотрения случай $\nu=\sigma$, полагая для него теорему доказанной, и будем считать, что переменная $\rho$ в уравнении (1.15) принимает только ненулевые значения. В силу сферической симметрии уравнения (1.14) по переменной $\xi\in\mathbb{R}^3$ его исследование редуцируется к исследованию уравнения

$$1-b\frac{\sqrt{\pi}}{\rho}e^{-\gamma^2/\rho^2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)=0,\quad \gamma=\sqrt{\alpha}(\nu+i\eta), \tag{3.2}$$

относительно переменных $\eta\in\mathbb{R}$, $\rho\in\mathbb{R}_+$ при заданных $\nu,\sigma>0$. Удобнее, однако, рассматривать уравнение (3.2) относительно переменных $\gamma\in\mathbb{C}$, $\rho\in\mathbb{R}_+$; формулировки, соответствующие уравнению (3.2) относительно переменных $\eta\in\mathbb{R}$, $\rho\in\mathbb{R}_+$, получаются в этом случае фиксацией значения $\operatorname{Re}\gamma=\nu\sqrt{\alpha}$. Производя в уравнении (3.2) замену переменных $\gamma'=\gamma/b$, $u=\rho/\gamma$ и умножая обе части полученного уравнения на $\gamma'$, получим уравнение

$$\gamma'-H(u)=0, \tag{3.3}$$

где $H(u)=\sqrt{\pi}\frac{1}{u}e^{-1/u^2}\operatorname{erfc}\frac{1}{u}$ (см. п. 8). Очевидны обратимость приведенной замены переменных ($\gamma=b\gamma',\rho=b\gamma'u$) и эквивалентность условий $\operatorname{Re}\gamma>0$, $\rho\in\mathbb{R}_+$ для переменных $\gamma$, $\rho$ условиям $\operatorname{Re}\gamma'>0$, $\operatorname{Re}u>0$, $\operatorname{Im}\gamma'u=0$ для переменных $\gamma'$, $u$. Таким образом, уравнение (3.2) при условиях $\operatorname{Re}\gamma>0$, $\rho\in\mathbb{R}_+$ эквивалентно уравнению (3.3) при условиях $\operatorname{Re}\gamma'>0$, $\operatorname{Re}u>0$, $\operatorname{Im}\gamma'u=0$. Предполагая выполненными эти последние, рассмотрим уравнение (3.3) в эквивалентной записи:

$$\gamma'u-D(u)=0, \tag{3.4}$$

где $D(u)=\sqrt{\pi}e^{-1/u^2}\operatorname{erfc}\frac{1}{u}=uH(u)$ (см. п. 9). Согласно п. (D) утверждения 1 $\operatorname{Im}(\gamma'u)=0$ для $u$ с $\operatorname{Re}u>0$ тогда и только тогда, когда $u$ и $D(u)$ вещественны. Следовательно, если $u$ — решение уравнения (3.4), то условие $\operatorname{Im}\gamma'u=0$ влечет условие $\operatorname{Im}u=0$ и поскольку $\gamma'=\frac{\gamma}{b}=\frac{\rho}{bu}$, влечет также условие $\operatorname{Im}\gamma'=0$. Значит, уравнение (3.4) с условиями $\operatorname{Re}\gamma'>0$, $\operatorname{Re}u>0$, $\operatorname{Im}\gamma'=0$ имеет решение только при вещественных положительных значениях переменных $\gamma'$, $u$. В этом случае согласно утверждению 1 Приложения статьи [2] уравнение (3.3) (напомним, что $H=\sqrt{\pi}G$) имеет при заданном $\gamma'\in\mathbb{R}_+$ решение тогда и только тогда, когда $\gamma'\in(0,1]$; при выполнении этого условия решение $u(\gamma')$ единственно и невырожденно (т. е. производная левой части уравнения (3.3) по переменной

$u$ при $u = u(\gamma')$ не обращается в нуль). Утверждение (ii) рассматриваемой теоремы получается простой переформулировкой этих результатов для уравнения (3.2) в терминах переменных $\eta \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$. Теорема доказана.

Доказательство следствия к теореме 2. Бóльшая часть утверждений этого следствия достаточно очевидны либо просто выводятся из установленных в [1] и настоящей статье свойств функции $\mathscr{K}(\eta,\xi) = \nu\sqrt{\alpha}\mathscr{K}^0(\eta,\xi)$. Трудность может вызвать лишь часть третьего утверждения о локальной интегрируемости функции $\mathscr{J}_0^{(0)}(\eta,\zeta)$. Его доказательство можно провести на основании следующих соображений. Обозначим для краткости функцию $1 - b\mathscr{K}^{(0)}(\eta,\xi)$ через $u(\eta,\xi)$. Несложными выкладками нетрудно убедиться в том, что поскольку $\frac{d\varphi_0(v)}{dv} \neq 0$ при $\operatorname{Re} v > 0$ (что является следствием конформности отображения $\varphi_0$ на указанной полуплоскости [1, Приложение]), то градиентные 4-векторы $\nabla u_1, \nabla u_2$, где $u_1$, $u_2$ соответственно вещественная и мнимая части функции $u(\eta,\xi)$, линейно независимы в каждой точке корневого многообразия $S_{\nu,\sigma}$ функции $u$. Это значит, что система (вещественных) уравнений $u_1(\eta,\xi) = 0$, $u_2(\eta,\xi) = 0$ определяет $S_{\nu,\sigma}$ как регулярное вещественное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^4$ (т. е. ранг матрицы Якоби указанной системы в каждой точке $S_{\nu,\sigma}$ максимален). В этом случае, как известно, в некоторой окрестности $U$ каждой точки из $S_{\nu,\sigma}$ можно выбрать такую невырожденную криволинейную систему координат $t_1, t_2, t_3, t_4$, что в ней функция $u_1$ совпадет с $t_1$, функция $u_2$ — с $t_2$, а функция $1/u$ — с функцией

$$\frac{t_1}{t_1^2 + t_2^2} - i\frac{t_2}{t_1^2 + t_2^2}.$$

Поскольку последняя функция, очевидно, интегрируема в окрестности $U$ и рассматриваемое координатное преобразование было невырожденным, функция $1/u$ интегрируема в $U$ в исходной системе координат $(\eta, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Таким образом, функция

$$\frac{1}{u(\eta,\xi)} = \frac{1}{1 - b\mathscr{K}(\eta,\xi)}$$

локально интегрируема на пространстве $\mathbb{R}^4$. Локальная интегрируемость функции $\mathscr{J}^{(0)}(\eta,\xi))$ при установленной ранее $C^\infty$-дифференцируемости функции $\mathscr{K}^{(0)}(\eta,\xi)$ на $\mathbb{R}^4$ [2] в этом случае очевидна.

**14. Доказательство теоремы 3.** Рассмотрим первое слагаемое в правой части формулы (1.16) из [1]. Его можно записать в следующем, более удобном для настоящих рассмотрений виде. Отметим, во-первых, что поскольку согласно предложению (C) утверждения 1 функция $\tau(\gamma) = \gamma u(\gamma)$ определена как непрерывная функция на замкнутой области $\overline{S}_i^\sigma$ [2], то величина $1/W(\gamma) = \pm i\tau(\gamma)$, где выбор знака определяется условием $\operatorname{Re} W \geq 0$ [2, теорема 1], также определена как непрерывная функция на $\overline{S}_i^\sigma$. Далее, согласно пп. (D), (E) утверждения 1 знак величины $\operatorname{Im}\tau(\gamma)$ при ненулевой частоте $\eta \in \mathbb{R}$ совпадает со знаком $\eta$, а при $\eta = 0$ в силу того же п. (D) $\operatorname{Im}(\tau(\gamma)) = 0$. Таким образом, если определить величину $\varkappa(\gamma)$, полагая $\varkappa(\gamma) = (\operatorname{sgn}\eta)\tau(\gamma)$ при $\eta \neq 0$, $\varkappa(\gamma) = \tau(\nu\sqrt{\alpha})$ при $\eta = 0$, то в полном соответствии с правилом выбора знака для выражения $W(\gamma)$ величину $1/W(\gamma)$ можно записать в виде $1/W(\gamma) = i\varkappa(\gamma)$, а вышеупомянутое первое слагаемое в (1.16) — в виде

$$A(\gamma)\frac{e^{i\varkappa(\gamma)|x|}}{4\pi|x|}, \quad \gamma \in \overline{S}_i^\sigma,\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Отметим, что функция $\varkappa(\gamma)$ переменной $\gamma = \sqrt{\alpha}(\nu + i\eta)$ зависит также от вещественного параметра $\sigma$, входящего (через коэффициент $b$) в исходное скалярное уравнение Пайерлса (1.3) из [1]. В соответствии с утверждением 1 имеем следующие свойства функции $\varkappa(\gamma)$: $0 \leq \operatorname{Im}\varkappa(\gamma) \leq 2\theta\sigma$, где $\theta \approx 0,541\dots$ — число из п. (E) утверждения 1, причем $\operatorname{Im}\varkappa(\gamma) = 0$ тогда и только тогда, когда $\eta = 0$, а максимальное значение $2\theta\sigma$ достигается функцией $|\operatorname{Im}\varkappa|(\gamma)$ тогда и только тогда, когда $\nu = \sigma$ и при значениях $\eta \neq 0$, для которых прямая $z(\eta) = \sqrt{\alpha}(\nu + i\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$, пересекает границу области $S_i^\sigma$. Таким образам, при $\eta = 0$, $\nu \neq \sigma$ (тогда $\varkappa(\gamma) = \varkappa(\nu\sqrt{\alpha})$ вещественно и из условия $\gamma \in S_i^\sigma$ вытекает, что $\nu \leq \sigma$) ядро $Q_m(\eta, x)$ совпадает с ядром $\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$ потенциала Гельмгольца с волновым числом $k = \varkappa(\gamma)$; при $\eta = 0$, $\nu = \sigma$ ядро $Q_m(\eta, x) = \frac{1}{4\pi|x|}$ совпадает с ядром кулоновского потенциала.

Все утверждения части (A) теоремы 3 достаточно очевидным образом вытекают из определения ядра $Q_m(\eta, x)$ и свойств функции $\tau(\gamma)$, установленных в утверждении 1. В частности, соотношения $Q \succ U$, $Q \succ\succ U$ при $|x| \to \infty$ для соответствующих троек $(\eta, \nu, \sigma)$ вытекают из свойств функции $\operatorname{Im}\tau(\gamma)$, установленных в п. (E) указанного утверждения 1.

Рассмотрим часть (B) теоремы. Несложный математический анализ функции $\zeta(\eta, s)$ показывает, что для регулярных троек $(\eta, \nu, \sigma)$ функция $\zeta(\eta, s)$ по переменной $s \in \mathbb{R}$ является $C^\infty$-дифференцируемой ограниченной функцией на полупрямой $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со следующими характеристиками поведения при $s \to \infty$ и $s \to 0$:

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(\eta, s) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\gamma, \tag{3.5}$$

$$\zeta(\eta, s) \sim 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{\gamma^3}{(\gamma - b)^2}e^{-1/s^2} \quad \text{при } s \to 0, \text{ когда } \eta^2 + (\nu - \sigma)^2 \neq 0, \tag{3.6}$$

$$\zeta(\eta, s) \sim 8\frac{\alpha\nu}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-1/s^2}}{s^4} \quad \text{при } s \to 0, \text{ когда } \eta = 0, \ \nu = \sigma. \tag{3.7}$$

Отсюда, используя абелевы теоремы для преобразования Лапласа в комплексной области [7, гл. 3, § 7, п. 1] и предельное соотношение (3.5), получаем асимптотику (1.18). Для получения асимптотических соотношений (1.19), (1.20) следует воспользоваться асимптотикой (2.30) утверждения 2 из § 2 в применении к интегралу (1.17) и асимптотическими соотношениями (3.6), (3.7).

Вещественная аналитичность ядра $Q_m(\eta, x)$ вне точки $x = 0$ с очевидностью вытекает из его представления, вещественная аналитичность ядра $Q_c(\eta, x)$ вне точки $x = 0$ — из его представления в виде композиции функций $q(z)$ и $z = |x|$, где

$$q(z) = \int_0^\infty \zeta(\eta, s)e^{-zs}\,ds$$

— преобразование Лапласа функции $\zeta(\eta, s)$. Из свойств последней видно, что абсцисса сходимости этого преобразования неположительна и, следовательно, $q(z)$ — голоморфная функция в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, а $Q(\eta, x) = q(|x|)$ вещественно-аналитична вне точки $x = 0$.

Утверждение (C) теоремы вытекает из теоремы 2 в [8], представления потенциального ядра $Q(\eta, x)$ в виде обобщенного потенциала Юкавы (реализованного формулами (1.16) настоящей статьи и (34), (35) из [2]) и предельного соотношения (3.5). Теорема полностью доказана.

Замечание. В контексте теоремы 2 из [8] можно сказать, что единственность решения обратной задачи монохроматического САПП обеспечена ему порядком 2 сингулярности его ядра.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Кирейтов В. Р.* Дисперсионные соотношения для многомерных акустических уравнений Пайерлса и некоторые свойства скалярного акустического потенциала Пайерлса. I // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 771–780.
2. *Кирейтов В. Р.* Многоскоростной потенциал Пайерлса в задаче уточнения классического фундаментального акустического потенциала вблизи источника звука в однородном максвелловском газе // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 834–860.
3. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
4. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.
5. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963.
6. *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
7. *Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986.
8. *Кирейтов В. Р.* Свойства хантовости и однозначной разрешимости обратной задачи теории потенциала для одного класса обобщенных потенциалов Юкавы // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 851–874.


*Статья поступила 17 февраля 2000 г.*

*Кирейтов Валерий Рашидович*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090*
vrkrv@math.nsc.ru