Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 517.927

РЕДУКЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА К КОНЕЧНОМУ

А. И. Задорин

Аннотация: Рассматривается краевая задача для нелинейной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старших производных на полубесконечном интервале. Наложены ограничения на якобиан, при выполнении которых решение задачи существует и единственно. Для переноса краевых условий из бесконечности используется известный подход, основанный на выделении многообразия решений, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Для решения вспомогательной задачи Коши применяются разложения решения по параметру. Библиогр. 9.

При математическом моделировании различных физических процессов таких, как перенос примесей от источников, химические реакции и др., возникают краевые задачи для неограниченной области. При решении таких задач конечно-разностным методом необходимо предварительно свести задачу к ограниченной области. В данной работе этот вопрос рассматривается в случае нелинейной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Для переноса краевого условия из бесконечности используется известный подход, основанный на выделении многообразия решений исходного уравнения, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. Для решения вспомогательной задачи Ляпунова, возникающей при выделении этого многообразия, предлагается использовать асимптотические разложения решения по малому параметру.

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу:

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + au' + g(u) = 0, \tag{1}$$

$$u(0) = A, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = B, \tag{2}$$

где a — постоянная диагональная квадратная матрица порядка N с диагональными элементами a_i, A, B — векторы из N компонент, ε — положительный числовой параметр, $\varepsilon \ll 1$, $g(u)$ — известная вектор-функция, $u(x)$ — вектор-функция решения. Предполагается, что функции g^i имеют непрерывные частные производные до второго порядка по всем своим аргументам.

Пусть

$$G(v) = \left\{ \frac{\partial g^i(v)}{\partial v_j} \right\}, \quad v \in \mathbb{R}^N,$$

© 2001 Задорин А. И.

— матрица Якоби вектор-функции $g(v)$. Предполагаем, что

$$m_0 \geq a_i \geq m > 0,\ i = 1, 2, \dots, N, \quad g(B) = 0, \quad G_{i,j}(v) \leq 0,\ i \neq j,\ v \in \mathbb{R}^N,$$

$$\sum_{j=1}^{N} G_{i,j}(v) \geq -\beta,\ \beta > 0, \quad m^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0, \quad \sum_{j=1}^{N} G_{i,j}(B) \geq \sigma_i \geq \sigma_0 > 0. \quad (3)$$

При выполнении условий (3) $G(B)$ является M-матрицей [1, с. 270] и все ее собственные числа имеют положительные вещественные части.

Задача (1), (2) может рассматриваться как модельная, например, при анализе химических реакций с учетом диффузии.

В работе будет показано, что при сделанных ограничениях решение задачи (1), (2) единственно, предельное краевое условие на бесконечности (2) является допустимым [2], т. е. выделяет одномерное многообразие решений уравнения (1), удовлетворяющих этому условию. Выделенное многообразие позволит свести задачу к конечному интервалу. Всюду ниже под C и C_i будем понимать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε. Определим используемые нормы: $\|q\| = \max\limits_i |q_i|$ для вектора q; $\|q\| = \max\limits_x |q(x)|$ для ограниченной функции $q(x)$; $\|q\|_L = \max\limits_i \max\limits_{x \geq L} |q_i(x)|$ для ограниченной вектор-функции $q(x)$. Предполагаем, что норма матрицы согласована с нормой вектора. Под неравенством векторов будем подразумевать покомпонентное неравенство.

§ 1. Анализ решения дифференциальной задачи

Рассмотрим линейный оператор

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a u' + M u,$$

где для матрицы M предполагаются справедливыми ограничения:

$$M_{ij} \leq 0 \quad \text{при всех} \quad i \neq j. \quad (4)$$

Лемма 1. *Пусть найдется вектор-функция $\phi(x)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами такая, что*

$$\phi(x) > 0,\ x \geq 0, \quad L_\varepsilon \phi(x) > 0,\ x > 0. \quad (5)$$

Тогда если для некоторой вектор-функции $\Psi(x)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \lim_{x \to \infty} \Psi(x) \geq 0, \quad L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, \quad x > 0, \quad (6)$$

то $\Psi(x) \geq 0$ при всех $x \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что какие-то компоненты вектор-функции $\Psi(x)$ оказались меньше нуля. Определим y: $y_i = \Psi_i/\phi_i$. Тогда при некоторых i, x_0 будет $y_i(x_0) < 0$. Учитывая краевые условия в (6), заключаем, что функция $y_i(x)$ в некоторой точке имеет локальный отрицательный минимум. Без ограничения общности можно считать, что $y_i(x_0) = \min\limits_j \min\limits_x y_j(x)$. Нетрудно убедиться, что

$$L_\varepsilon^{(i)} \Psi = -\varepsilon \phi_i y_i'' + [-2\varepsilon \phi_i' + a_i \phi_i] y_i' + y_i L_\varepsilon^{(i)} \phi + \sum_{k=1}^{N} M_{ik} \phi_k (y_k - y_i).$$

Из этого соотношения следует $L_\varepsilon^{(i)}\Psi(x_0) < 0$, что противоречит (6). Лемма доказана.

Определим условия, при выполнении которых для оператора L_ε будет справедлив принцип максимума. Пусть в дополнение к (4) при всех i

$$\sum_{j=1}^{N} M_{i,j} \geq -\beta, \quad \beta > 0, \quad m^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0. \tag{7}$$

Определим вектор-функцию $\phi(x)$ с компонентами: $\phi_i(x) = \exp\{2\beta m^{-1}x\}$. Для этой функции выполнены условия (5). В соответствии с леммой 1 при выполнении условий (4), (7) для оператора L_ε справедлив принцип максимума.

Учитывая условия (3) и лемму 1, можно заключить, что решение задачи (1), (2) единственно. Кроме того, если выполнены соотношения (3), то при определенных условиях решение задачи (1), (2) неотрицательно. Точнее это можно сформулировать следующим образом.

Пусть

$$A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad g(0) \leq 0. \tag{8}$$

Тогда $u(x) \geq 0$ при всех x. Действительно, учитывая, что $g(u) - g(0) = G(\theta(u))u$, запишем уравнение (1) в виде

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + au' + G(\theta(u))u = -g(0). \tag{9}$$

Если выполнены условия (8), то в силу принципа максимума $u(x) \geq 0$ при всех x. Свойство неотрицательности решения существенно, например, при моделировании химических реакций, когда u является вектором концентраций.

Лемма 2. *При всех i и $x < \infty$*

$$|u_i(x)| \leq \exp(2\beta m^{-1}x)[m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|g(0)\| + \|A\|]. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть уравнение (1) представлено в виде (9). Рассмотрим уравнение (9) на конечном интервале $[0, L]$. Определим покомпонентно вектор-функцию:

$$\Psi_i(x) = \exp[2\beta m^{-1}x][m^2\beta^{-1}\sigma^{-1}\|g(0)\| + \|A\|] + \exp[m(2\varepsilon)^{-1}(x - L)]|u_i(L)| \pm u_i(x).$$

При таком задании $\Psi(x)$ будет

$$L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0, \quad 0 < x < L, \quad \Psi(0) \geq 0, \quad \Psi(L) \geq 0.$$

Используя принцип максимума, получим $\Psi(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq L$. Устремляя $L \to \infty$, придем к утверждению леммы.

Согласно лемме 2 при выполнении условий (3) решение задачи (1), (2) может иметь экспоненциальный рост.

Исследуем поведение решения при больших значениях аргумента. В соответствии с условиями (2) и (3) для каждого i найдется L_i такое, что

$$\sum_{j=1}^{N} G_{i,j}(u(x)) \geq \frac{\sigma_i}{2} \quad \text{при} \quad x \geq L_i.$$

Лемма 3. *Пусть $L = \max\limits_i L_i$. Тогда при всех $x \geq L$*

$$|u_i(x) - B_i| \leq |u_i(L) - B_i| \exp\{r_i(x - L)\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{11}$$

где $r_i = -\sigma_i\{a_i + \sqrt{a_i^2 + 2\sigma_i\varepsilon}\}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $z(x) = u(x) - B$, $g(z + B) - g(B) = G(\theta(z))z$. Тогда z является решением краевой задачи

$$Sz = -\varepsilon z'' + az' + Gz = 0, \quad z(0) = A - B, \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0.$$

Определим покомпонентно вектор-функцию:

$$\Psi_i(x) = |u_i(L) - B_i| \exp\{r_i(x - L)\} \pm z_i(x).$$

Тогда для каждого i

$$S_i\Psi \geq \left[-\varepsilon r_i^2 + a_i r_i + 0.5\sigma_i\right] |u(L_i) - B_i| \exp\{r_i(x - L)\} = 0,$$

причем $\Psi(L) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \Psi(x) \geq 0$. В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$, $x \geq L$. Это доказывает лемму.

Согласно лемме 3 при достаточно больших значениях x решение $u(x)$ по каждой компоненте ограничено и экспоненциально приближается к предельному значению на бесконечности.

Из лемм 2, 3 следует, что $\|u\|_0 \leq C$ для некоторой постоянной C. Из уравнения (1) следует, что

$$u'(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\infty \exp\{\varepsilon^{-1}(x - s)a\} g(u(s))\, ds.$$

Учитывая, что $\|\exp\{\varepsilon^{-1}(x - s)a\}\| \leq \exp\{\varepsilon^{-1}(x - s)m\}$, для некоторой постоянной C получим

$$\|u'(x)\|_0 \leq C. \tag{12}$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) ограничено равномерно по параметру ε вместе со своей производной.

§ 2. Перенос краевого условия из бесконечности

Для переноса краевого условия из бесконечности используем подход, разрабатываемый в [2–4] и других работах этих авторов. В соответствии с этим подходом для уравнения второго порядка (1) уравнением первого порядка выделяется многообразие решений, удовлетворяющих предельному условию на бесконечности. При фиксированном значении аргумента это уравнение может рассматриваться в качестве краевого условия для конечного интервала. Для выделения этого многообразия необходимо решить вспомогательную начальную задачу. Ниже предлагается способ решения этой задачи на основе асимптотических разложений. В случае одного уравнения такой подход применялся нами в [5, 6]. Отметим работу [7], где рассмотрена сингулярная задача Коши с сингулярно входящим большим параметром, нелинейность задана в виде многочлена по зависимым переменным, для нахождения решения используются разложения по степеням параметра.

Итак, исследуем вопрос переноса краевого условия из бесконечности. Предварительно рассмотрим матричное квадратное уравнение

$$-\varepsilon\gamma^2 + a\gamma + G(B) = 0. \tag{13}$$

Можно показать, что одно из решений матричного уравнения (13) по норме ограничено равномерно по параметру ε, когда $\gamma \approx -a^{-1}G(B)$.

В случае скалярной матрицы a, когда она перестановочна с другими матрицами, это решение можно выписать в явном виде:

$$\gamma = -2G(B)\big[a + \sqrt{a^2 + 4G(B)\varepsilon}\big]^{-1}.$$

Пусть γ — решение (13) и $\|\gamma\| \le C$, скалярность матрицы a в общем случае не предполагаем. Определим

$$\gamma_0 = -a^{-1}G(B). \tag{14}$$

Покажем,что тогда

$$\|\gamma - \gamma_0\| \le C_1\varepsilon. \tag{15}$$

Это следует из ограниченности $\|\gamma\|$ и того, что $\gamma - \gamma_0 = \varepsilon a^{-1}\gamma^2$. Матрица $(-\gamma_0)$ является M-матрицей, поэтому все собственные значения матрицы γ_0 лежат в левой полуплоскости [1, с. 270].

Покажем, что при достаточно малых значениях ε все собственные значения матрицы γ лежат в левой полуплоскости. В соответствии с теоремой Гершгорина [1, с. 113] произвольное собственное значение λ^0 матрицы γ_0 для некоторого i лежит в круге

$$\big|\operatorname{Re}\lambda^0 - \gamma_{ii}^0\big| \le \sum_{j\ne i}\big|\gamma_{ij}^0\big|.$$

Используя (3), можно показать, что $\operatorname{Re}\lambda^0 \le -m_0^{-1}\sigma_0$. Учитывая, что для монотонной матрицы собственные значения непрерывным образом зависят от элементов матрицы [1, с. 115], для некоторой постоянной C получим

$$\big|\lambda_i - \lambda_i^0\big| \le C\|\gamma - \gamma_0\| \le C_2\varepsilon.$$

Следовательно, при достаточно малых значениях ε ($\varepsilon < \sigma_0/(C_2 m_0)$) все собственные значения матрицы γ лежат в левой полуплоскости.

Определим асимптотический метод нахождения матрицы γ:

$$\tilde\gamma_M = \sum_{k=0}^{M}\gamma^{(k)}\varepsilon^k, \quad \gamma^{(0)} = -a^{-1}G(B). \tag{16}$$

Учитывая эти соотношения в (13), получим рекуррентную формулу

$$\gamma^{(k+1)} = a^{-1}\sum_{p+q=k}\gamma^{(p)}\gamma^{(q)}, \quad p,q \ge 0\ .$$

Таким образом, матрица γ может быть найдена с заданной точностью.

В соответствии с подходом [3] следующим уравнением зададим многообразие решений уравнения (1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности:

$$u'(x) = \gamma(u(x) - B) + F(u(x)), \tag{17}$$

где γ является решением уравнения (13), о котором говорилось выше, вектор-функция $F(v)$ — решение задачи Ляпунова:

$$\varepsilon F'(v)[\gamma(v-B) + F(v)] - (a - \varepsilon\gamma)F(v) = g(v) - G(B)(v-B), \quad F(B) = 0. \tag{18}$$

В соответствии с [4, 8] в малой окрестности B, когда $\|v - B\|$ достаточно мало́, задача (18) обладает решением, удовлетворяющим дополнительному ограничению $F'(B) = 0$. Для такого решения справедлива оценка $\|F(v)\| = o(\|v - B\|)$ и в силу теоремы Перрона [9, с. 343] из (17) следует, что $u(x) \to B$, $x \to \infty$. Учитывая (18), можно показать, что решение уравнения (17) удовлетворяет уравнению (1). Таким образом, действительно при достаточно больших x ($x \geq X$) (17) выделяет часть решений уравнения (1), удовлетворяющих предельному условию на бесконечности.

Прежде чем оценить $\|F(u(x))\|$, рассмотрим линейный оператор

$$Sz = \varepsilon z' - Mz. \tag{19}$$

Предполагаем, что матрица M имеет строгое диагональное преобладание:

$$M_{ii}(1-\eta) \geq \sum_{j \neq i} |M_{ij}|, \quad 0 < \eta < 1, \quad M_{ii} \geq \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{20}$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (20). *Тогда для произвольной непрерывно дифференцируемой вектор-функции $z(x)$, имеющей предел на бесконечности, и произвольного $P \geq 0$ справедлива оценка*

$$\|z\|_P \leq \eta^{-1}\{\alpha^{-1}\|Sz\|_P + \max_i \lim_{x\to\infty} |z_i(x)|\}. \tag{21}$$

Доказательство. Для произвольного i имеем

$$T_i z = \varepsilon z_i' - M_{ii} z_i = S_i z + \sum_{j \neq i} M_{ij} z_j.$$

Рассуждениями от противного можно убедиться, что для оператора T_i справедлив принцип максимума, в соответствии с которым для произвольной непрерывно дифференцируемой функции $\Psi(x)$ из условий

$$T_i \Psi(x) \leq 0, \quad P \leq x < \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \Psi(x) \geq 0 \tag{22}$$

следует $\Psi(x) \geq 0$, $P \leq x < \infty$. Для заданного i определим

$$\Psi(x) = \frac{\|Sz\|_P}{\alpha} + \frac{\|z\|_P}{M_{ii}} \sum_{j \neq i} |M_{ij}| + \lim_{x\to\infty} |z(x)| \pm z_i(x).$$

Можно показать, что для функции $\Psi(x)$ выполнены условия (22). В силу принципа максимума имеем $\Psi(x) \geq 0$ при всех $P \leq x < \infty$. Учитывая условия (20), получим утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть $u(x)$ — решение задачи* (1), (2). *Для некоторой постоянной C и заданного $P > 0$*

$$\|F(u(x))\|_P \leq C\|u(x) - B\|_P^2. \tag{23}$$

Доказательство. Определим $R(x) = F(u(x))$. Учитывая (2), (17), (18), поставим задачу:

$$SR(x) = \varepsilon R'(x) - (a - \varepsilon\gamma)R(x) = g(u(x)) - G(B)(u(x) - B), \quad \lim_{x\to\infty} R(x) = 0. \tag{24}$$

Так как матрица a диагональна, при достаточно малых значениях ε для матрицы $M = a - \varepsilon\gamma$ будут выполнены условия (20) при $\eta = 0.5$. Нетрудно получить, что

$$\|g(u(x)) - G(B)(u(x) - B)\|_P \leq C\|u(x) - B\|_P^2.$$

Используя лемму 4, приходим к утверждению леммы.

Из леммы 3 следует, что для $P \geq L$

$$\|u(x) - B\|_P \leq C \exp\{\max_i r_i(P - L)\}, \quad r_i < 0.$$

С помощью этой оценки и (23) для $P \geq L$ имеем

$$\|F(u(x))\|_P \leq C \exp\{2 \max_i r_i(P - L)\}. \tag{25}$$

Прежде чем перейти от (1), (2) к задаче на конечном интервале, рассмотрим линейный оператор

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + az' + Gz \tag{26}$$

с краевыми условиями

$$z(0), \quad D_\varepsilon z = z'(L_0) + Sz(L_0), \tag{27}$$

где G и S — матрицы порядка N.

Лемма 6. *Пусть $G_{ij} \leq 0$, $S_{ij} \leq 0$ при всех $i \neq j$. Пусть существует вектор-функция $\phi(x)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами такая, что*

$$L_\varepsilon \phi(x) > 0, \quad 0 < x < L_0, \quad \phi(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq L_0, \quad D_\varepsilon \phi > 0. \tag{28}$$

Тогда если $\Psi(x)$ — вектор-функция с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами, то из условий

$$L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, \quad 0 < x < L_0, \quad \Psi(0) \geq 0, \quad D_\varepsilon \Psi \geq 0 \tag{29}$$

следует, что $\Psi(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq L_0$.

Доказательство. Определим покомпонентно вектор-функцию y: $y_i(x) = \Psi_i(x)/\phi_i(x)$. Допустим, что для некоторой компоненты i и точки x_0 оказалось $\Psi_i(x_0) < 0$. Тогда $y_i(x_0) < 0$. Без ограничения общности можно считать, что $y_i(x_0) = \min_j \min_x y_j(x)$. Если $x_0 < L_0$, то получить противоречие можно по аналогии с леммой 1. Рассмотрим случай $x_0 = L_0$. Условие $D_\varepsilon^i \Psi \geq 0$ из (29) можно записать в виде

$$y_i(x_0) D_\varepsilon^i \phi + \phi_i(x_0) y_i'(x_0) + \sum_{j=1}^N S_{ij} \phi_j(x_0)(y_j(x_0) - y_i(x_0)) \geq 0.$$

Из этого неравенства следует $y_i'(x_0) > 0$. Это противоречит тому, что минимум функции $y_i(x)$ достигается в точке x_0. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть в* (26), (27)

$$\begin{aligned} &G_{ij} \leq 0, \quad S_{ij} \leq 0, \quad \text{при всех} \quad i \neq j, \quad \sum_{j=1}^N G_{ij} \geq -\beta, \quad \beta > 0, \\ &m^2 - 4\beta\varepsilon \geq \sigma > 0, \quad \sum_{j=1}^N S_{ij} \geq -\beta_0, \quad \beta_0 > 0, \quad m - 2\beta_0\varepsilon \geq \sigma_0 > 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Тогда для оператора L_ε из (26) *с краевыми условиями* (27) *справедлив принцип максимума.*

Доказательство. Определим вектор-функцию $\phi(x)$ с компонентами

$$\phi_i(x) = \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\}.$$

Принимая во внимание условия (30), можно показать, что для $\phi(x)$ выполнены условия (28). Теперь доказательство следует из леммы 6.

Учитывая, что соотношение (17) является точным для решения задачи (1), (2), перейдем от (1), (2) к задаче на конечном интервале:

$$T_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + au' + g(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(L_0) = \gamma[u(L_0) - B] + F(u(L_0)). \tag{31}$$

Задача (31) поставлена на конечном интервале, и для ее решения можно использовать, например, конечно-разностную схему. Матрица γ и вектор-функция $F(u)$ из (13) и (18) могут быть найдены приближенно. Оценим влияние погрешности в γ и F на решение задачи (31).

Перейдем от (31) к краевой задаче с возмущенными γ и F:

$$T_\varepsilon \tilde{u} = -\varepsilon \tilde{u}'' + a\tilde{u}' + g(\tilde{u}) = 0, \quad \tilde{u}(0) = A, \quad \tilde{u}'(L_0) = \tilde{\gamma}[\tilde{u}(L_0) - B] + \widetilde{F}(\tilde{u}(L_0)). \tag{32}$$

Теорема 1. *Пусть существует $\widetilde{F}'(v)$, непрерывная при всех $v \in \mathbb{R}^N$, и*

$$\begin{gathered} \widetilde{S}(v) = -[\tilde{\gamma} + \widetilde{F}'(v)], \quad \widetilde{S}_{ij}(v) \le 0, \quad \textit{при всех} \quad i \ne j, \\ \sum_{j=1}^{N} \widetilde{S}_{ij} \ge -\beta_0, \ \beta_0 > 0, \quad m - 2\beta_0\varepsilon \ge \theta > 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Пусть

$$\|F(u(L_0)) - \widetilde{F}(u(L_0))\| \le \Delta, \quad \|\gamma - \tilde{\gamma}\| \le \Delta_1,$$

где $u(x)$ — решение задачи (1), (2). *Тогда при всех i и $x \in [0, L_0]$*

$$|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| \le 2\varepsilon\theta^{-1}[\Delta + \Delta_1 |u_i(L_0) - B_i|] \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\}.$$

Доказательство. Пусть $z = u - \tilde{u}$. Тогда для некоторых θ_1 и θ_2

$$L_\varepsilon z = -\varepsilon z'' + az' + G(\theta_1)z = 0, \quad z(0) = 0,$$

$$z'(L_0) + \widetilde{S}z(L_0) = F(u(L_0)) - \widetilde{F}(u(L_0)) + (\gamma - \tilde{\gamma})[u(L_0) - B], \quad \widetilde{S} = -[\tilde{\gamma} + \widetilde{F}'(\theta_2)].$$

Учитывая условия (33) и лемму 7, заключаем, что для оператора L_ε с заданными краевыми условиями справедлив принцип максимума. Определим вектор-функцию $\Psi(x)$ с компонентами

$$\Psi_i(x) = 2\varepsilon\theta^{-1}[\Delta + \Delta_1 |u_i(L_0) - B_i|\,] \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\} \pm z_i(x).$$

При таком задании $\Psi(x)$ выполнятся условия (29) и в силу принципа максимума $\Psi(x) \ge 0$ при всех x. Это доказывает теорему.

Рассмотрим различные подходы к заданию краевого условия в конечной точке L_0 при переходе от (1), (2) к задаче на конечном интервале $[0, L_0]$.

Зададим в L_0 краевое условие Неймана:

$$-\varepsilon \tilde{u}'' + a\tilde{u}' + g(\tilde{u}) = 0, \quad \tilde{u}(0) = A, \quad \tilde{u}'(L_0) = 0. \tag{34}$$

В этом случае в (32) задается $\tilde{\gamma} = \widetilde{F}(v) = 0$, условия (33) теоремы 1 выполнены. Учитывая оценки (11), (25), для $L_0 \ge L$ (L определено в лемме 3) и всех i получим

$$|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| \le C\varepsilon \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + r_i(L_0 - L)\}, \quad r_i < 0.$$

В соответствии с этой оценкой точность переноса краевого условия из бесконечности увеличивается с уменьшением малого параметра и с увеличением длины интервала. Кроме того, видно, что погрешность экспоненциально уменьшается при удалении от конца интервала.

В случае, если не выполнено условие $L_0 > L$, справедлива оценка

$$|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| \leq C\varepsilon \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\}.$$

Рассмотрим случай краевых условий Дирихле:

$$-\varepsilon\tilde{u}'' + a\tilde{u}' + g(\tilde{u}) = 0, \quad \tilde{u}(0) = A, \quad \tilde{u}(L_0) = B.$$

Используя принцип максимума, нетрудно показать, что в этом случае

$$|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| \leq |u_i(L_0) - B| \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\}.$$

В случае $L_0 > L$ эта оценка в соответствии с (11) уточняется:

$$|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| \leq C \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + r_i(L_0 - L)\}, \quad r_i < 0.$$

Принимая в (32) γ_0 из (14) и $\widetilde{F}(v) = 0$, перейдем от (31) к задаче

$$-\varepsilon\tilde{u}'' + a\tilde{u}' + g(\tilde{u}) = 0, \quad \tilde{u}(0) = A, \quad a\tilde{u}'(L_0) + G(B)(u(L_0) - B) = 0. \tag{35}$$

На основании теоремы 1 можно показать, что при $L_0 > L$ для всех i

$$|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| \leq C\varepsilon[\exp\{r_i(L_0 - L)\} + \varepsilon] \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0) + r_i(L_0 - L)\}.$$

Для повышения точности переноса краевого условия из бесконечности можно найти приближенное решение задачи (18) на основе асимптотических разложений по параметру ε. Пусть

$$\widetilde{F}^m(v) = \sum_{k=0}^{m} F_k(v)\varepsilon^k. \tag{36}$$

Подставляя это разложение в (18) и собирая члены при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную формулу

$$\begin{gathered} F_{k+1}(v) = a^{-1}\Big[F'_k(v)\gamma(v - B) + \gamma F_k(v) + \sum_{p+q=k} F'_p(v)F_q(v)\Big], \quad p, q \geq 0, \\ F_0(v) = -a^{-1}[g(v) - G(B)(v - B)]. \end{gathered} \tag{37}$$

Лемма 8. *Пусть $u(x)$ — решение задачи* (1), (2). *Пусть вектор-функция $g(v)$ является достаточно гладкой и вектор-функции $F(u(x))$, $\widetilde{F}^m(u(x))$ определены при $x \geq X$. Тогда*

$$\|F(u(x)) - \widetilde{F}^m(u(x))\|_X \leq C\varepsilon^{m+1}. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $z(x) = F(u(x)) - \widetilde{F}^m(u(x))$. В силу того, что $\widetilde{F}^m(v)$ строится на основе асимптотических разложений для задачи (18), $\widetilde{F}^m(v)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} \varepsilon\widetilde{F}'(v)[\gamma(v - B) + \widetilde{F}(v)] - (a - \varepsilon\gamma)\widetilde{F}(v) = g(v) - G(B)(v - B) + H(v), \\ \widetilde{F}(B) = 0, \quad \|H(v)\| \leq C_0\varepsilon^{m+1}. \end{gathered} \tag{39}$$

Учитывая (18), (36), (39), нетрудно убедиться, что вектор-функция $z(x)$ есть решение задачи Коши с предельным условием на бесконечности:

$$Sz(x) = \varepsilon z'(x) - Mz(x) = H(u(x)), \quad \lim_{x\to\infty} z(x) = 0, \tag{40}$$

где $M = a - \varepsilon\gamma - \varepsilon \widetilde{F}'(u)$. При достаточно малых значениях ε матрица M близка к диагональной и условия (20) будут выполнены при $\eta = 0.5$. Теперь утверждение леммы следует из оценки (21).

Если задать

$$\tilde{\gamma} = \gamma_0 = -a^{-1}G(B), \quad \widetilde{F}(u) = F_0(u) = -a^{-1}[g(u) - G(B)(u - B)],$$

то редуцированная задача (32) принимает вид

$$-\varepsilon\tilde{u}'' + a\tilde{u}' + g(\tilde{u}) = 0, \quad \tilde{u}(0) = A, \quad a\tilde{u}'(L_0) + g(\tilde{u}(L_0)) = 0.$$

Тогда $\widetilde{S}(v) = a^{-1}G(v)$, с учетом (3) условия (33) будут выполнены и согласно лемме 8 и теореме 1 при всех i

$$|u_i(x) - \tilde{u}_i(x)| \le C\varepsilon^2 \exp\{m(2\varepsilon)^{-1}(x - L_0)\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
2. *Конюхова Н. Б., Пак Т. В.* К переносу допустимых граничных условий из бесконечности для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 6. С. 847–866.
3. *Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б.* Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. математике М.: ВЦ АН СССР, 1981.
4. *Конюхова Н. Б.* Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи // Сообщ. по вычисл. математике М.: ВЦ АН СССР, 1996.
5. *Задорин А. И.* Численное решение уравнения с малым параметром на бесконечном интервале // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 10. С. 1671–1682.
6. *Задорин А. И.* Перенос краевого условия из бесконечности при численном решении уравнений второго порядка с малым параметром // Сиб. журн. вычисл. математики. 1999. Т. 2, № 1. С. 21–35.
7. *Конюхова Н. Б., Пак Т. В.* Сингулярные задачи Коши с большим параметром для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 4. С. 501–519.
8. *Конюхова Н. Б.* О стационарной задаче Ляпунова для системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 8. С. 1384–1395.
9. *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

Статья поступила 28 июня 2000 г.

Задорин Александр Иванович
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
zadorin@iitam.omsk.net.ru