Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 517.518.23+517.548.2

О РАВНОМЕРНЫХ И NTA–ОБЛАСТЯХ НА ГРУППАХ КАРНО

А. В. Грешнов

Аннотация: На группах Карно построены примеры неограниченных равномерных областей. На группах Гейзенберга доказано, что некоторые евклидовы кубы являются NTA-областями и что существуют ограниченные NTA-области, не удовлетворяющие условию внутреннего однородного конуса. Библиогр. 17.

§ 1. Введение

Работа посвящена вопросам существования равномерных и NTA-областей на группах Карно, снабженных метрикой Карно — Каратеодори. *m-Ступенчатой группой Карно* [1, 2] называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой разлагается в прямую сумму векторных пространств $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ таких, что $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \le k \le m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. В работе мы будем использовать следующее описание группы Карно, называемое *группалгеброй* [3]. Элементы алгебры Ли V отождествим с элементами группы $\mathbb{G}$ посредством экспоненциального отображения, которое в конструкции группалгебры является тождественным. Введем следующие обозначения: $e_i = \{e_{i1}, \dots, e_{im_i}\}$ — базис подпространства V_i в единице группы $(i = 1, \dots, m)$, $e = e_1 \cup \dots \cup e_m$ — базис алгебры Ли V в единице группы. Пусть элементы e связаны между собой таблицей коммутаторов:

$$[e_{ki}, e_{lj}] = \sum_{r=1}^{m_{k+l}} C_{ij}^r e_{k+l,r},$$

где C_{ij}^r — структурные константы. Любая точка $x \in \mathbb{G}$ записывается как

$$x = (x_1, \dots, x_m) = (x_{11}, \dots, x_{1m_1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mm_m}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} e_{ij}.$$

Действие *группы растяжений* δ_t определяется как $\delta_t x = (t^i x_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m_i}$. Определив умножение базисных векторов в единице группы, мы тем самым однозначно задаем (при помощи формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа) операцию умножения (левого сдвига на x) $x \cdot y = L_x y$ для любых двух элементов $x, y \in \mathbb{G}$. Таким образом, группу Карно можно представлять себе как пространство $\mathbb{R}^N$, $N = \dim V_1 + \dots + \dim V_m$, со специальной операцией умножения. Единицей группы Карно является начало координат пространства $\mathbb{R}^N$, элемент, обратный к x, определяется как $-x$. Далее, используя линейную часть формулы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и INTAS–97–1070.

Кэмпбелла — Хаусдорфа, определим в каждой точке y группы Карно базис левоинвариантных векторных полей

$$X_{nk} = e_{nk} + \sum_{i=n+1}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} f_{ij}(y) e_{ij},$$

где $f_{ij}(y)$ — некоторые полиномы степени не выше $i - n$.

Абсолютно непрерывная кривая

$$\sigma(s) = (\sigma_{11}(s), \dots, \sigma_{1m_1}(s), \dots, \sigma_{m1}(s), \dots, \sigma_{mm_m}(s))$$

называется *горизонтальной*, если ее производная $\dot\sigma(s)$ почти в каждой точке принадлежит пространству V_1, т. е. найдутся такие коэффициенты $\alpha_{1k}(s)$, что почти всюду $\dot\sigma(s) = \sum\limits_{k=1}^{m_1} \alpha_{1k}(s) X_{1k}(\sigma(s))$. Так как $X_{1k} = e_{1k} + \dots$, находим, что $\alpha_{1k}(s) = \dot\sigma_{1k}(s)$. Длина горизонтальной кривой σ считается при помощи риманова тензора группы Карно, и она равна

$$l(\sigma) = \int_0^a \bigl(\dot\sigma_{11}^2 + \dots + \dot\sigma_{1m_1}^2\bigr)^{1/2}\, ds.$$

Известно (см., например, [4]), что любые два элемента x, y группы Карно соединяются абсолютно непрерывной горизонтальной *кратчайшей*, т. е. кривой γ, имеющей наименьшую длину среди длин всех горизонтальных кривых, соединяющих x и y. *Метрика Карно — Каратеодори* d определяется соотношением $d(x, y) = l(\gamma)$.

Нам будет полезна эквивалентная d *однородная метрика* ρ, которую мы определим как

$$\rho(g_1, g_2) = \rho(g_1^{-1} g_2, 0) = \bigl(|x_1|^\nu + |x_2|^{\nu/2} + \dots + |x_m|^{\nu/m}\bigr)^{1/\nu},$$

где $g_1^{-1} g_2 = (x_1, \dots, x_m)$, $x_i \in V_i(0)$, $|x_i| = \bigl(x_{i1}^2 + \dots + x_{im_i}^2\bigr)^{1/2}$, $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i \dim V_i$ — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$. Отметим (см. [1, 2]), что однородная метрика и метрика Карно — Каратеодори инвариантны относительно действия группы растяжений и левых сдвигов:

$$d(\delta_t x, \delta_t y) = t d(x, y), \quad d(L_z x, L_z y) = d(x, y),$$
$$\rho(\delta_t x, \delta_t y) = t\rho(x, y), \quad \rho(L_z x, L_z y) = \rho(x, y), \quad x, y, z \in \mathbb{G}.$$

Биинвариантная мера Хаара μ на $\mathbb{G}$ совпадает с мерой Лебега. Отметим следующее свойство μ, называемое *условием удвоения*: $\mu(B(x, r)) \le D\mu(B(x, r/2))$, где константа D не зависит от $x \in \mathbb{G}$ и r.

Важным примером групп Карно являются *группы Гейзенберга* [5] $\mathbb{H}^n$ размерности n: $\dim V_1 = 2n$, $\dim V_2 = 1$, а умножение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, t)&(x_1', y_1', \dots, x_n', y_n', t') \\ &= \Bigl(x_1 + x_1', y_1 + y_1', \dots, x_1 + x_n', y_n + y_n', t + t' + 2\sum_{i=1}^{n} \bigl(y_i x_i' - x_i y_i'\bigr)\Bigr).\end{aligned}$$

Базис левоинвариантных векторных полей группы $\mathbb{H}^n$ имеет вид

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Одномерное пространство $Z\mathbb{H}^n = V_2(0)$ называется *центром* группы $\mathbb{H}^n$.

Определение 1 [6, 7]. Область $\mathscr{D} \subset \mathbb{G}$ называется *равномерной*, если существуют постоянные a и b такие, что всякая пара точек $x_1, x_2 \in \mathscr{D}$ может быть соединена горизонтальной кривой $\gamma \subset \mathscr{D}$, для которой выполняются следующие *условия равномерности*:

$$l(\gamma) \le ad(x_1, x_2), \quad \min_{j=1,2} l(\gamma(x_j, x)) \le bd(x, \partial\mathscr{D}),\ x \in \gamma,$$

где $\gamma(x_j, x)$ — часть кривой γ от точки x_j до точки x.

Определение 2 [8, 9]. Область $\mathscr{D} \subset \mathbb{G}$ называется *локально равномерной*, если существует константа ε такая, что для любых точек $x, y \in \mathscr{D}$ таких, что $d(x, y) \le \varepsilon$, существует кривая $\gamma \subset \mathscr{D}$, соединяющая x и y, для которой выполняются условия равномерности с константами равномерности, не зависящими от выбора x и y.

Простым упражнением является тот факт, что любая ограниченная локально равномерная область на группе Карно является равномерной областью, возможно, с другими константами (см. [9]).

Определение 3 [10, 11]. Ограниченная равномерная область $\mathscr{D} \subset \mathbb{G}$ называется *NTA-областью*, если существует константа r_0 такая, что выполняется *условие внешней спирали*: для любой точки $x \in \partial\mathscr{D}$ и шара $B(x, r)$, $r < r_0$, найдется шар $B(y, C_1 r)$, содержащийся в множестве $B(x, r) \cap (\mathbb{X} \setminus \overline{\mathscr{D}})$, где константа C_1 не зависит от выбора $B(x, r)$.

Равномерные, локально равномерные, NTA-области естественным образом возникают в различных вопросах анализа (см. [6–13]). В пространстве $\mathbb{R}^n$ с римановой метрикой классы этих областей достаточно велики. Вопрос о существовании равномерных и NTA-областей в случае групп Карно с метрикой Карно — Каратеодори ставился в ряде работ (см., например, [14]), однако первые нетривиальные примеры таких областей появились сравнительно недавно (см. [7, 15, 16]). Отметим, что вопрос о существовании ограниченных равномерных и NTA-областей на общих группах Карно все еще остается открытым. В настоящей работе предложен метод нахождения равномерных и NTA-областей на группах Карно, основанный на построении специальных слоений Γ горизонтальных кривых и поверхностей $\mathscr{P}$, трансверсальных в определенном смысле к Γ. Для того чтобы объяснить суть метода, введем следующее понятие.

Определение 4. Пусть $\mathscr{D}$ — некоторая область, $x_0 \in \partial\mathscr{D}$. Будем говорить, что точка x_0 удовлетворяет *условию гибкого конуса* относительно точки x_1, если найдется кривая $\gamma \subset \overline{\mathscr{D}}$, соединяющая x_0 и x_1, такая, что $d(u, \partial\mathscr{D}) \ge Cl(\gamma(u, x_0))$, где u — текущая точка γ, $l(\gamma(u, x_0))$ — длина участка кривой γ от точки u до точки x_0, а C — некоторая положительная константа. Кривую γ будем называть *осью гибкого конуса*.

Сначала мы находим поверхности $\mathscr{P}$, для которых существуют слоения горизонтальных кривых $\{\gamma\}$, удовлетворяющие свойству: если $\gamma \in \{\gamma\}$ — кривая такая, что $\gamma \cap \mathscr{P} = x_0$, то точка x_0 удовлетворяет условию гибкого конуса относительно любой точки $x \in \gamma$, $x_0 \ne x$ ($\mathscr{P}$ рассматривается как граница некоторой неограниченной области), а константа C из определения 4 не зависит от выбора

x_0. Используя тот факт, что поверхности вида $x_{1j} = 0$, $j = 1, \dots, m_1$, трансверсальны слоениям левоинвариантных горизонтальных векторных полей, которые являются кратчайшими группы Карно, доказываем следующее утверждение.

Теорема 1. *Гиперпространство* $\Gamma_{1,j} = \{x \in \mathbb{G} \mid x_{1j} > 0\}$, $j = 1, \dots, m_1$, *является равномерной областью на группе Карно* $\mathbb{G}$.

Несложно понять, что для поверхностей вида $x_{kj} = 0$, $k > 1$, вообще говоря, не существует гладкого горизонтального векторного поля, интегральные линии которого трансверсальны таким поверхностям. Тем не менее нами показано, что на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ для поверхности $x_{21} = 0$ существует распределение негладких горизонтальных кривых, относительно которого граничные точки области $x_{21} > 0$ удовлетворяют условию гибкого конуса. С помощью этого факта, устанавливается

Теорема 2. *Гиперпространство* $\Gamma_{2,1} = \big\{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, t) \in \mathbb{H}^n \mid t > 0\big\}$ *является равномерной областью на группе Гейзенберга* $\mathbb{H}^n$.

На следующем этапе нашей работы рассматриваются ограниченные области групп Гейзенберга, которые получаются в результате пересечения неограниченных равномерных областей. Используя теоремы 1, 2, а также специфическое поведение пространства $V_1(x)$ группы Гейзенберга, доказываем следующие утверждения.

Теорема 3. *Евклидов куб*

$$P_n = \{(x_1, y_1, \dots, t) \in \mathbb{H}^n \mid \max\{|x_i|, |y_j|, |t|\} < 1\}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

является равномерной областью на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$.

Теорема 4. *Область* $\widetilde{P}_n = \mathbb{H}^n \setminus \overline{P}_n$ *локально равномерна. Таким образом, куб* P_n *является* NTA*-областью на группе* $\mathbb{H}^n$.

Следовательно, на группах Карно существуют NTA-области с негладкой границей. Теорема 4 доказывает гипотезу профессора Л. Капонья, высказанную им автору статьи на конференции, посвященной 70-летию академика Ю. Г. Решетняка.

Последний параграф работы содержит понятия внутреннего и внешнего однородных конусов, которые появились в работе Л. Капонья и Н. Гарофало [15] и оказались очень полезными в задаче нахождения NTA-областей на группах Карно. Отметим, что в работе [16] Л. Капонья и Н. Гарофало построили на двуступенчатых группах Карно широкий класс NTA-областей, имеющих гладкую границу и удовлетворяющих, в частности, условиям внутреннего и внешнего однородных конусов. Там же доказано, что шар в метрике Карно — Каратеодори на группах Гейзенберга не удовлетворяет условию внешней спирали и, как следствие, не может удовлетворять условию внешнего однородного конуса (см. также работу [17], где дано другое доказательство этого факта). Результаты, полученные при доказательстве теорем 3, 4, дают нам право утверждать, что кубы P_n, не обладая гладкой границей, тем не менее удовлетворяют условиям внутреннего и внешнего однородных конусов. Естественно возникает вопрос: существуют ли на группах Карно NTA-области, не удовлетворяющие этим условиям? В § 4 мы строим на группе $\mathbb{H}^1$ ограниченную неодносвязную NTA-область, не удовлетворяющую условию внутреннего однородного конуса.

На протяжении всей работы D обозначает константу из условия удвоения по мере, $d_e(x, y)$ — евклидово расстояние между точками x, y, $B_e(x, R)$ — шар с центром в точке x радиуса R в метрике $d_e(x,y)$, $\langle x,y\rangle$ — евклидово скалярное произведение векторов x, y.

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность профессору С. К. Водопьянову за постановку задачи и полезные рекомендации, профессору Л. Капонья за интерес к результатам автора и обсуждения с ним вопросов, затрагиваемых в настоящей работе.

§ 2. Примеры неограниченных равномерных областей на группах Карно

Лемма 1. *Пусть S — связное множество, принадлежащее некоторой области $\mathscr{D}\subset\mathbb{X}$, обладающее следующими свойствами:*

1) *точки x_1, x_2 принадлежат S,*

2) *существует константа α такая, что $d(x,\partial\mathscr{D})\geq\alpha d(x_1,x_2)$ для любой точки x, принадлежащей S,*

3) *$S\subset B(z,\beta d(x_1,x_2))$, $z\in\mathbb{X}$, для некоторой константы β.*

Тогда для точек x_1, x_2 найдется кривая γ конечной длины, соединяющая x_1 и x_2, для которой выполняются условия равномерности с константам, зависящими от α, β, D.

Доказательство. Для любой положительной константы c_1 построим семейство шаров $\{B(z_i,c_1d(x_1,x_2))\}$, обладающее свойствами

1^0) $S\subset\bigcup\limits_{i=1}^{N}B(z_i,c_1d(x_1,x_2))$,

2^0) $z_i\in S$,

3^0) $B(z_i,c_1d(x_1,x_2)/4)\cap B(z_i,c_1d(x_1,x_2)/4)=\varnothing$.

Для этого на первом шаге полагаем $z_1=x_1$. На втором шаге точка z_2 принадлежит множеству $S_1=S\setminus B(z_1,c_1d(x_1,x_2))$, на n-м шаге точка z_n принадлежит множеству $S_{n-1}=S\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}B(z_i,c_1d(x_1,x_2))$. Очевидно, что свойство 2^0 выполняется. Из приведенной выше конструкции следует, что для любых i, j верно неравенство $d(z_i,z_j)\geq c_1d(x_1,x_2)$; поэтому свойство 3^0 выполняется. Покажем, что выполняется свойство 1^0, причем количество шаров N в покрытии ограничено некоторой константой. Из условия 3 леммы имеем

$$\bigcup_i B(z_i,c_1d(x_1,x_2))\subset B(z,(\beta+c_1)d(x_1,x_2)).$$

Из свойства 3^0 получаем неравенство

$$\sum_i\mu(B(z_i,c_1d(x_1,x_2)/4))\leq\mu(B(z,(\beta+c_1)d(x_1,x_2))). \tag{1}$$

С другой стороны, $B(z,(\beta+c_1)d(x_1,x_2))\subset B(z_i,16(\beta+c_1)d(x_1,x_2))$ для любого z_i, поэтому

$$\begin{aligned}\mu(B(z_i,c_1d(x_1,x_2)/4))&\geq D^{-5}B(z_i,16(\beta+c_1)d(x_1,x_2))\\&\geq D^{-5}B(z,(\beta+c_1)d(x_1,x_2)).\end{aligned}\tag{2}$$

Из оценок (1), (2) следует, что N ограничено некоторой константой, которая зависит только от D, β, c_1.

Пусть $c_1=\alpha/2$. Тогда для любой точки $y\in\bigcup\limits_i B(z_i,\alpha d(x_1,x_2)/2)$ имеем

$$d(y,\partial\mathscr{D})\geq\alpha d(x_1,x_2)/2.$$

Так как S — связное множество, из конечного покрытия $\{B(z_i, \alpha d(x_1, x_2)/2)\}$ можно выделить набор шаров $\{B(\tilde{z}_i)\}$, $1 \leq i \leq N_1$ (обычно называемый *цепочкой шаров длины* N_1), обладающий следующими свойствами: $\tilde{z}_1 = z_1$; $B(\tilde{z}_{i-1}) \cap B(\tilde{z}_i) \neq \varnothing$; $\tilde{z}_i \neq \tilde{z}_j$, если $i \neq j$; $x_2 \in B(\tilde{z}_{N_1})$. Используя эту цепочку шаров, построим требуемую леммой кривую γ. Для этого из каждого пересечения $B(\tilde{z}_{i-1}) \cap B(\tilde{z}_i)$ произвольно выбираем точку u_i и соединяем ее при помощи радиусов шаров $B(\tilde{z}_{i-1})$, $B(\tilde{z}_i)$ с центрами этих шаров; точку x_2 соединяем с z_{N_1} также при помощи радиуса. Нетрудно видеть, что кривая γ удовлетворяет всем требованиям леммы 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u \in \Gamma_{1,j}$ — произвольная точка. Найдем точку $v \in \partial\Gamma_{1,j}$ такую, что $d(u, \partial\Gamma_{1,j}) = d(u, v)$. Пусть γ — кратчайшая, соединяющая u и v. Тогда длина γ по определению есть евклидова длина кривой γ_1, являющейся проекцией γ на пространство $V_1(0)$. Тем самым $l(\gamma)$ не меньше длины перпендикуляра p, опущенного из $u|_{V_1(0)} = u_1$ на $\partial\Gamma_{1,j}|_{V_1(0)}$. Поэтому положим $v_1 = (u_{1,1}, \dots, u_{1,j-1}, 0, u_{1,j+1}, \dots, u_{1,m_1}) = v|_{V_1(0)}$ и рассмотрим p как сужение кратчайшей γ на $V_1(0)$. Для того чтобы построить по p кривую γ, решим задачу Коши

$$\dot{x}_{1j}(s) = \dot{p} = 1, \quad \dot{x}_{1i}(s) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m_1,$$
$$\dot{x}_2(s) = [x_1(s), \dot{x}_1(s)], \dots, \quad x(0) = u, \quad s \in [-u_{1j}, 0].$$

Ее решение однозначно определяет кратчайшую γ — отрезок интегральной линии векторного поля $X_{1,j}(u)$.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 1. Пусть u_1, $u_2 \in \Gamma_{1,j}$ — произвольные точки. Соединим u_1 и u_2 кратчайшей γ. Для каждой точки $x \in \gamma$ определим точку $v_x \in \Gamma_{1,j}$ следующим образом:

1) v_x принадлежит пересечению области $\Gamma_{1,j}$ и интегральной линии векторного поля $X_{1,j}(x)$,

2) $d(v_x, x) = 10d(u_1, u_2)$,

3) расстояние от точки пересечения интегральной линии векторного поля $X_{1,j}(x)$ и границы области $\Gamma_{1,j}$ до v_x принимает наибольшее значение.

Тогда $d(v_x, \partial\Gamma_{1,j}) \geq 5d(u_1, u_2)$ и точки v_x образуют некоторый континуум, принадлежащий шару $B(u_1, 20d(u_1, u_2))$. Из леммы 1 вытекает существование горизонтальной кривой σ, удовлетворяющей условиям равномерности для точек v_{u_1} и v_{u_2}, причем константы равномерности зависят от D и не зависят от v_{u_1}, v_{u_2}.

Будем обозначать через $\gamma_1(\gamma_2)$ отрезок интегральной линии векторного поля $X_{1,j}(u_1)$ $(X_{1,j}(u_2))$, который соединяет точки v_{u_1} и u_1 (v_{u_2} и u_2). Тогда горизонтальный путь $\gamma_1 \cup \sigma \cup \gamma_2$ удовлетворяет условиям равномерности для точек u_1 и u_2, причем константы равномерности зависят от D и не зависят от выбора u_1 и u_2.

Следствие 1. *Гиперпространства*

$$\Big\{x \in \mathbb{G} \mid \sum_{i,j} \alpha_{i,j} x_{i,j} > c,\, (\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}) \neq (0, \dots, 0)\Big\},$$

где $c \in \mathbb{R}$, являются равномерными областями группы Карно $\mathbb{G}$.

Следствие 2. *Область $P_{j,k_1,k_2} = \{u = (u_1, \dots, u_m) \mid k_1 < u_{1,j} < k_2\}$ является локально равномерной областью группы Карно с параметрами, зависящими от k_1 и k_2.*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Для любой точки $x_0 \in \partial\Gamma_{2,1}$ найдется точка z, принадлежащая центру $Z\mathbb{H}^1$, такая, что x_0 удовлетворяет условию гибкого конуса относительно z с константой C, не зависящей от выбора x_0.*

Доказательство. Для единицы группы подходящая кривая строится следующим образом. Рассмотрим последовательность точек $\{(0,0,t/2^k)\}$, $k = 0,1,\dots$, $t>0$. Соединим попарно точки $(0,0,t/2^k)$ и $(0,0,t/2^{k+1})$ кратчайшими γ_k. Отметим, что $\gamma_k = \delta_{1/2}\gamma_{k-1}$. Пусть $\tilde\gamma = \bigcup \gamma_k$. Имеем

$$l(\tilde\gamma) \approx t^{1/2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2} \approx d(0,(0,0,t)) \approx d((0,0,t),\partial\Gamma_{2,1}).$$

Рассматривая в качестве оси гибкого конуса кривую $\tilde\gamma$ и используя инвариантность метрики Карно — Каратеодори относительно действия группы растяжений, мы можем утверждать, что единица группы удовлетворяет условию гибкого конуса относительно любой точки центра $Z\mathbb{H}^1$.

Пусть $w \in \partial\Gamma_{2,1}$, $w = (w_1,w_2,w_3)$, — фиксированная точка, удовлетворяющая следующему условию: $(w_1)^2 + (w_2)^2 > 1$. Пусть $\bar\gamma_w$ — отрезок левоинвариантного горизонтального векторного поля с началом в точке w, $\bar\gamma_w \subset \Gamma_{2,1}$, соединяющий w с некоторой точкой u' такой, что $d(u',\partial\Gamma_{2,1}) = 10^{-10}$. Обозначим через $\hat\gamma_w$ кратчайшую, реализующую расстояние $d(u',Z\mathbb{H}^1)$, $\hat\gamma_w \cap Z\mathbb{H}^1 = z_w$. Введем в рассмотрение кривую $\gamma_w = \bar\gamma_w \cup \hat\gamma_w$. Очевидно, что найдутся некоторые константы k_1, $k_2 > 0$, не зависящие от выбора текущей точки u кривой γ_w, такие, что

$$k_1 d(w,u) \le l(\gamma_w(w,u)) \le k_2 d(u,\partial\Gamma_{2,1}). \tag{3}$$

Следовательно, точка w удовлетворяет условию гибкого конуса относительно точки z_w. При помощи ортогональных преобразований евклидовой плоскости $t=0$ и группы растяжений построим, используя γ_w, семейство кривых $\{\tilde\gamma_w\}$ таких, что $\bigcup\limits_{\tilde\gamma_w \in \{\tilde\gamma_w\}} \tilde\gamma_w = \overline{\Gamma_{2,1}}$. Тогда для любой точки $p \in \partial\Gamma_{2,1}$, $p \ne e$, найдется единственная кривая $\tilde\gamma_p \in \{\tilde\gamma_w\}$ такая, что $p \in \tilde\gamma_p$ и для кривой $\tilde\gamma_p$ выполняются оценки (3) (соответственно заменяем w на p) с теми же самыми константами k_i. Поэтому точка p удовлетворяет условию гибкого конуса относительно точки $z_p = \tilde\gamma_p \cap Z\mathbb{H}^1$.

Лемма 3. *Пусть $a = (a_1,a_2)$, $b = (b_1,b_2)$ — две произвольные точки двуступенчатой группы Карно. Тогда множество $(a_1 s + b_1(1-s), a_2 s + b_2(1-s))$, $s \in [0,1]$, принадлежит шару в однородной метрике ρ, определяемой как $\rho(a,b) = ((b_1-a_1)^4 + (b_2-a_2+[b_1;a_1])^2)^{1/4}$, с центром в точке b и радиуса $\rho(a,b)$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\rho((b_1,b_2),(a_1 s + b_1(1-s), a_2 s + b_2(1-s)))\\ = \rho((0,0),((a_1-b_1)s,(a_2-b_2-[b_1;a_1])s)) = f^{1/4}(s).\end{aligned}$$

Тогда

$$\dot f(s) = \frac{f(s)^{-3/4}}{4}\big(4s^3(a_1-b_1)^4 + 2s(a_2-b_2-[b_1;a_1])^2\big) > 0.$$

Другими словами, при движении от точки b к точке a расстояние ρ монотонно возрастает. Отсюда следует утверждение леммы 3.

Доказательство теоремы 2. Сначала мы докажем теорему 2 для $\mathbb{H}^1$. Пусть $z_1, z_2 \in \Gamma_{2,1}$ — произвольные точки. Полагаем, что

$$\min\{d(z_1, \partial\Gamma_{2,1}), d(z_2, \partial\Gamma_{2,1})\} \leq 2d(z_1, z_2),$$

иначе соединяющая z_1 и z_2 кривая, удовлетворяющая условиям равномерности, будет кратчайшей. Рассмотрим возможные расположения точек $z_1 = (x_1, y_1, t_1)$, $z_2 = (x_2, y_2, t_2)$.

Пусть $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$, $(x_2, y_2) \neq (0, 0)$. Соединим точки z_1 и z_2 сегментом e. Из леммы 3 следует, что $e \subset B(z_1, c_1 d(z_1, z_2))$, где константа c_1 зависит от констант эквивалентности однородной метрики и метрики Карно — Каратеодори. Рассмотрим семейство кривых $\{\tilde{\gamma}_w\}$, построенное в лемме 2. Для каждой точки $u \in e$ найдем кривую $\tilde{\gamma}_{w(u)}$ из $\{\tilde{\gamma}_w\}$ такую, что $u \in \tilde{\gamma}_{w(u)}$. Определим точку $z(u) \in \tilde{\gamma}_{w(u)}$ следующим образом:

$$z(u) = \begin{cases} x \in \gamma_{w(u)}, & \text{если} \quad l(\tilde{\gamma}_{w(u)}(u, x)) = d(z_1, z_2), \\ y = \tilde{\gamma}_{w(u)} \cap Z\mathbb{H}^1, & \text{если} \quad l(\tilde{\gamma}_{w(u)}(u, y)) \leq d(z_1, z_2). \end{cases}$$

Пусть σ_i, $i = 1, 2$, — часть кривой $\tilde{\gamma}_{w(z_i)}$, соединяющая точки z_i и $z(z_i)$. Рассмотрим множество E, состоящее из точек $u \in e$ таких, что $\tilde{\gamma}_{w(u)} \cap Z\mathbb{H}^1 \neq \varnothing$. Пусть u_i такие точки, что для каждой $u \in E$ выполняется $d_e(z_i, u_i) \leq d_e(z_i, u)$. Обозначим $\tilde{\gamma}_{w(u_i)} \cap Z\mathbb{H}^1 = x_i$. Пусть последняя координата точки x_1 больше последней координаты точки x_2. Рассмотрим следующее разбиение отрезка $[x_1, x_2]$: на первом шаге берем точку x_3 такую, что $|x_1 - x_3| = |x_2 - x_3|$, на втором шаге берем точку x_4 такую, что $|x_4 - x_3| = |x_2 - x_4|$, на n-м шаге берем точку x_{n+2} такую, что $|x_{n+2} - x_{n+1}| = |x_n - x_{n+2}|$. Соединим последовательно точки x_1 и x_3, x_3 и $x_4, \dots$ кратчайшими. В результате получим горизонтальную кривую σ, которая удовлетворяет условиям равномерности для точек x_1 и x_2 с константами равномерности, зависящими только от констант эквивалентности однородной метрики и метрики Карно — Каратеодори. Далее рассмотрим множества $K_i = \{z(u) \mid u \in [z_i, u_i]\}$, $i = 1, 2$. Используя лемму 1 (в качестве множества S рассматриваем K_i), построим горизонтальные кривые $\hat{\sigma}_i$, соединяющие точки $z(z_i)$ и x_i, такие, что расстояние от каждой точки, принадлежащей $\hat{\sigma}_i$, $i = 1, 2$, до $\partial\Gamma_{2,1}$ не меньше $C_3 d(z(z_i), x_i)$, $C_3 = C_3(D) = \text{const}$, а длина $\hat{\sigma}_i$ равна $C_4 d(z_i, x_i)$, $C_4 = C_4(D) = \text{const}$. Кривая $\sigma_1 \cup \hat{\sigma}_1 \cup \sigma \cup \hat{\sigma}_2 \cup \sigma_2$ удовлетворяет условию равномерности для точек z_1, z_2 с некоторыми константами, зависящими только от D и констант эквивалентности однородной и Карно — Каратеодори метрик. В силу инвариантности метрики группы Гейзенберга относительно действия ортогональных преобразований $V_1(0)$ и группы растяжений результат не зависит от выбора точек $z_1 = (x_1, y_1, t_1)$, $z_2 = (x_2, y_2, t_2)$, где $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$, $(x_2, y_2) \neq (0, 0)$.

Случаи расположения точек z_1 и z_2, когда $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) \neq (0, 0)$ или когда $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (0, 0)$, фактически уже разобраны выше. Таким образом, теорема 2 для $\mathbb{H}^1$ доказана.

Доказательство теоремы 2 для $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, в целом может быть проведено по схеме, предложенной для $\mathbb{H}^1$. Единственное отличие состоит в изменении построения семейства $\{\tilde{\gamma}_w\}$ из леммы 2. Рассмотрим множество

$$\mathscr{A} = \left\{ (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, 0) \mid \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2\right) = 1 \right\}.$$

Для каждой точки $u \in \mathscr{A}$ найдется отрезок $I(u)$ левоинвариантного горизонтального векторного поля с началом в точке u, принадлежащий $\Gamma_{2,1}$, такой, что $I(u) \cap V_1(0) = u$. Так как множество $\mathscr{A}$ компактно, отрезки $I(u)$ можно выбрать таким образом, чтобы они «непрерывно зависели» от u, т. е. $I(u_n)$ поточечно сходится к $I(u)$ при стремлении u_n к u ($u_n, u \in \mathscr{A}$). Уменьшая по необходимости длины отрезков $I(u)$, добьемся того, чтобы отрезки удовлетворяли следующим условиям:

a) $I(u_1) \cap I(u_2) = \varnothing$, если $u_1 \neq u_2$,

b) существует число $z > 0$ такое, что для каждого $I(u)$ один из его концов v всегда принадлежит множеству $(0, \dots, 0, z)V_1(0)$,

c) $I(u) \cap Z\mathbb{H}^n = \varnothing$, $I(u) \subset B_e(u, 10^{-2})$.

Соединим каждую точку v с точкой $(0, \dots, 0, z)$ евклидовым прямолинейным отрезком $T(u)$. Для каждой кривой $W(u) = I(u) \cup T(u)$ рассмотрим семейство $\{\delta_\tau W(u)\}$, $\tau \in (0, \infty)$. Тогда набор кривых $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{u \in \mathscr{A}} \{\delta_\tau W(u)\}$ обладает следующими свойствами:

a_1) существуют константы k_1, k_2 такие, что для любой кривой $\gamma \in \mathscr{B}$ выполняются неравенства

$$k_1 d(u', \hat{u}) \leq l(\gamma(u', \hat{u})) \leq k_2 d(u', \partial\Gamma_{2,1}),$$

где u' — текущая точка кривой γ, $\hat{u} = \gamma \cap V_1(0)$,

b_1) $\bigcup\limits_{\gamma \in \mathscr{B}} \gamma = \overline{\Gamma}_{2,1}$,

c_1) для каждой точки $w \in \partial\Gamma_{2,1}$ существует единственная кривая $\gamma \in \mathscr{B}$ такая, что $w \in \gamma$.

Рассматривая в схеме доказательства теоремы 2 для $\mathbb{H}^1$ семейство $\mathscr{B}$ вместо семейства $\{\tilde{\gamma}_w\}$, получим доказательство теоремы 2 для общих групп Гейзенберга.

§ 3. Доказательства теорем 3, 4 и некоторые следствия

Доказательство теоремы 3. Сначала мы докажем теорему 3 для $\mathbb{H}^1$. Рассмотрим куб P с вершинами в точках $O_1 = (1,1,-1)$, $O_2 = (1,-1,-1)$, $O_3 = (1,-1,1)$, $O_4 = (-1,-1,1)$, $O_5 = (-1,1,1)$, $O_6 = (-1,1,-1)$, $O_7 = (1,1,1)$, $O_8 = (-1,-1,-1)$. Обозначим через $R_{i,j}$ ребра куба, соединяющие вершины O_i, O_j, а через $\Gamma_{i,j,k,l}$ — грань куба, натянутую на вершины O_i, O_j, O_k, O_l. На первом шаге для каждой точки z множества $P_1 = B_e(O_1, \varepsilon) \cap \partial P$ построим отрезок I_z интегральной линии некоторого левоинвариантного горизонтального векторного поля с началом в точке z, обладающий свойствами:

1) $I_z \in \operatorname{int} P$,
2) $d(\psi, \partial P) \geq bl(I_z(z, \psi))$, $\psi \in I_z$, где $I_z(z, \psi)$ — участок I_z от точки z до точки ψ, а константа b не зависит от z и ψ.

Для этого рассмотрим левоинвариантное горизонтальное векторное поле

$$\alpha X + \beta Y = (\alpha, \beta, -2y\alpha + 2x\beta), \quad \alpha, \beta = \text{const}, \tag{4}$$

где $z = (x, y, t) = (1 + \tilde{\varepsilon}_1, 1 + \tilde{\varepsilon}_2, -1 + \tilde{\varepsilon}_3) \in P_1$. Свойство 1 будет выполняться, если

$$\alpha < 0, \quad \beta < 0, \quad -2y\alpha + 2x\beta > 0,$$

т. е. $-2(1 + \tilde{\varepsilon}_2)\alpha + 2(1 + \tilde{\varepsilon}_1)\beta > 0$, откуда $\beta > \alpha(1 + \tilde{\varepsilon}_1)/(1 + \tilde{\varepsilon}_2)$. Если $\beta \geq \alpha/2$, то отрезок I_z векторного поля $(\alpha, \beta, -2y\alpha + 2x\beta)$ некоторой длины s будет содержаться в $\operatorname{int} P$, причем длина не зависит от выбора z. Проверим свойство 2. Пусть $\psi = (\alpha s + x, \beta s + y, (-2y\alpha + 2x\beta)s + t)$. Очевидно, существует некоторая константа $\tilde{b}$ такая, что $\tilde{b} d_e(z, \psi) \le d_e(\psi, \partial P) \le d(\psi, \partial P)$. Имеем $l(I_z(z, \psi)) = s$, $d_e(z, \psi) = s(\alpha^2 + \beta^2 + (-2y\alpha + 2x\beta)^2)^{1/2}$. Таким образом,

$$d(\psi, \partial P) \ge \tilde{b} s(\alpha^2 + \beta^2 + (-2y\alpha + 2x\beta)^2)^{1/2} \ge b l(\psi, \partial P), \quad b = b(\varepsilon).$$

Фиксируем множество $\bigcup\limits_{z \in P_1} I_z = U_1$. Рассуждая, как и выше, для каждой точки $z \in P_i = B_e(O_i, \varepsilon) \cap \partial P$ можно доказать существование отрезка I_z интегральной линии некоторого левоинвариантного горизонтального векторного поля, обладающего свойствами 1, 2. Обозначим $\bigcup\limits_{z \in P_i} I_z = U_i$, $i = 1, \dots, 8$.

На втором шаге для каждой точки z множества $P_{i,j} = \bigcup\limits_{z \in \widetilde{R}_{i,j}} B_e(z, \varepsilon/16) \cap \partial P$, где $\widetilde{R}_{i,j} = R_{i,j} \setminus (B_e(O_i, \varepsilon/4) \cup B_e(O_j, \varepsilon/4))$, построим отрезок I_z интегральной линии некоторого левоинвариантного горизонтального векторного поля с началом в точке z, обладающий свойствами 1, 2. Для $P_{i,j}$, имеющих с ребрами, параллельными оси t, непустое пересечение, существование таких отрезков следует из теоремы 1 (для каждой грани куба $\Gamma_{i,j,k,l}$ найдется трансверсальное ей горизонтальное левоинвариантное векторное поле, а каждое ребро есть пересечение двух граней; поэтому для каждого множества $P_{i,j}$ достаточно взять подходящую линейную комбинацию левоинвариантных горизонтальных векторных полей и рассмотреть соответствующие отрезки интегральных линий). Рассмотрим оставшиеся $P_{i,j}$. Для них существование подходящих отрезков I_z интегральных линий некоторого левоинвариантного горизонтального векторного поля, обладающих свойствами 1, 2, может быть доказано тем же способом, что и в случае вершин куба. Рассмотрим, например, множество $P_{1,6}$. Для выполнения свойства 1 достаточно, чтобы в (4) α было любым, $\beta < 0$, $-2y\alpha + 2x\beta > 0$, а поскольку $x \in [-1, 1]$, то достаточно $\alpha/2 < \beta$. Введем обозначение $\bigcup\limits_{z \in P_{i,j}} I_z = U_{i,j}$.

На третьем шаге рассмотрим множества

$$\widetilde{\Gamma}_{i,j,k,l} = \Gamma_{i,j,k,l} \setminus \bigcup_{y \in \partial \Gamma_{i,j,k,l}} B_e(y, \varepsilon/64).$$

Обозначим $P_{i,j,k,l} = \big(\bigcup\limits_{z \in \widetilde{\Gamma}_{i,j,k,l}} B_e(z, \varepsilon/256) \big) \cap \partial P$. Из теоремы 1 следует, что для каждой точки z множества $P_{i,j,k,l}$, содержащееся в грани куба, нормальный вектор которой ортогонален вектору $(0, 0, 1)$, существует отрезок I_z интегральной линии некоторого левоинвариантного горизонтального векторного поля с началом в точке z, обладающий свойствами 1, 2. Введем обозначение $U_{i,j,k,l} = \bigcup\limits_{z \in P_{i,j,k,l}} I_z$.

На четвертом шаге рассмотрим множества $\Gamma_{2,1}^{(-1)} = (0, 0, -1)\Gamma_{2,1}$ и $-\Gamma_{2,1}^{(1)} = \mathbb{H}^1 \setminus \overline{(0, 0, 1)\Gamma_{2,1}}$. Обозначим через $w = (w_1, w_2, 1)$ точку такую, что $w_1^2 + w_2^2 = 10^{-2}$. В точке w найдем некоторое левоинвариантное горизонтальное векторное поле, не перпендикулярное вектору $(0, 0, 1)$. Тогда существует отрезок I_w интегральной линии этого векторного поля, содержащийся в $-\Gamma_{2,1}^{(1)}$ и не пересекающий ось t. Обозначим через $w' = (w_1', w_2', w_3')$ конец отрезка I_w, принадлежащий внутренности множества $-\Gamma_{2,1}^{(1)}$. Соединим точки w' и $(0, 0, w_3')$ прямолинейным отрезком κ^1. Обозначим через $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ горизонтальную кривую $I_w \cup \kappa^1$. Введем в рассмотрение семейство $\{\tilde{\delta}_\tau \kappa_\theta\}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \tau \le 1$, где $\tilde{\delta}_\tau(x,y,t) = (\tau x, \tau y, \tau^2 t + 1)$, $\kappa_\theta = (\kappa_1 \cos\theta - \kappa_2 \sin\theta, \kappa_1 \sin\theta + \kappa_2 \cos\theta, \kappa_3)$, и следующую совокупность кривых:

$$W_{(1)} = \bigcup_{\tilde{\sigma}^1 \in \{\tilde{\delta}_\tau \kappa_\theta\}} \tilde{\sigma}^1.$$

Заметим, что отрезок I_w выбирается так, чтобы $W_{(1)} \subset B_e((0,0,1), 10^{-1})$.

Для $\Gamma_{2,1}^{(-1)}$ рассмотрим точку $q = (q_1, q_2, -1)$ такую, что $q_1^2 + q_2^2 = 10^{-2}$. В точке q найдем некоторое левоинвариантное горизонтальное векторное поле, не перпендикулярное $(0,0,1)$. Тогда существует отрезок I_q интегральной линии этого векторного поля, содержащийся в $\Gamma_{2,1}^{(-1)}$ и не пересекающий ось t. Обозначим через $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$ конец отрезка I_q, принадлежащий внутренности множества $\Gamma_{2,1}^{(-1)}$. Соединим точки $\tilde{q}$ и $(0,0,\tilde{q}_3)$ прямолинейным отрезком ω^1. Обозначим через $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ горизонтальную кривую $I_w \cup \omega^1$. Введем в рассмотрение семейство $\{\hat{\delta}_\tau \omega_\theta\}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \tau \le 1$, где $\hat{\delta}_\tau(x,y,t) = (\tau x, \tau y, \tau^2 t - 1)$, $\omega_\theta = (\omega_1 \cos\theta - \omega_2 \sin\theta, \omega_1 \sin\theta + \omega_2 \cos\theta, \omega_3)$, и следующую совокупность кривых:

$$W_{(-1)} = \bigcup_{\tilde{\sigma}^2 \in \{\tilde{\delta}_\tau \omega_\theta\}} \tilde{\sigma}^2.$$

Заметим, что отрезок I_q выбирается так, чтобы $W_{(-1)} \subset B_e((0,0,-1), 10^{-1})$.

На пятом шаге рассмотрим отрезки интегральных линий I_z, построенные на первом и втором шагах. Выделим из них следующие два подмножества:

$$\bigl\{I_z^{(1)}\bigr\} = \{I_z \mid I_z \cap \Gamma_{3,4,5,7} \ne \varnothing\}, \quad \bigl\{I_z^{(-1)}\bigr\} = \{I_z \mid I_z \cap \Gamma_{1,2,6,8} \ne \varnothing\}.$$

Введем в рассмотрение семейства $\bigl\{\tilde{\delta}_\tau I_z^{(1)}\bigr\}$, $\bigl\{\hat{\delta}_\tau I_z^{(-1)}\bigr\}$, $1 \ge \tau \ge h > 0$, где

$$h = \min\bigl\{\tau \mid \tilde{\delta}_\tau I_z^{(1)} \cap \bigl(\partial B_e((0,0,1), \delta^{(1)}) \cap \Gamma_{3,4,5,7}\bigr) \ne \varnothing, \\ \hat{\delta}_\tau I_z^{(-1)} \cap (\partial B_e\bigl((0,0,-1), \delta^{(-1)}) \cap \Gamma_{1,2,6,8}\bigr) \ne \varnothing\bigr\},$$

где $\delta^{(1)} = r^{(1)}/100$, $\delta^{(-1)} = r^{(-1)}/100$, а числа $r^{(1)}$, $r^{(-1)}$ определяются следующим образом:

$$r^{(1)} = \sup\bigl\{s \mid \bigl(B\bigl((0,0,1), s\bigr) \cap -\Gamma_{2,1}^{(1)}\bigr) \subset W_{(1)}\bigr\},$$
$$r^{(-1)} = \sup\bigl\{s \mid \bigl(B\bigl((0,0,-1), s\bigr) \cap \Gamma_{2,1}^{(-1)}\bigr) \subset W_{(-1)}\bigr\}.$$

Отметим, что отрезки интегральных линии горизонтальных левоинвариантных векторных полей, которые фигурировали на первом и втором шагах, должны выбираться следующим образом: если некоторый отрезок принадлежит семейству $\bigl\{\tilde{\delta}_\tau I_z^{(1)}\bigr\}$ $\bigl(\bigl\{\hat{\delta}_\tau I_z^{(-1)}\bigr\}\bigr)$ и имеет непустое пересечение с кольцом

$$B_e((0,0,1), 10\delta^{(1)}) \setminus B_e((0,0,1), \delta^{(1)}) \quad (B_e((0,0,-1), 10\delta^{(-1)}) \setminus B_e((0,0,-1), \delta^{(-1)}),$$

то он содержится в $W_{(1)}$ $(W_{(-1)})$.

Введем обозначения

$$S_1 = \bigcup_{\tilde{\delta}_\tau I_z^{(1)} \in \{\tilde{\delta}_\tau I_z^{(1)}\}} \tilde{\delta}_\tau I_z^{(1)}, \quad S_2 = \bigcup_{\hat{\delta}_\tau I_z^{(-1)} \in \{\hat{\delta}_\tau I_z^{(-1)}\}} \hat{\delta}_\tau I_z^{(-1)}.$$

Итогом наших построений являются множества

$$U_i, \quad U_{i,j}, \quad U_{i,j,k,l}, \quad W_{(1)}, \quad W_{(-1)}, \quad S_i. \tag{5}$$

Они обладают следующими свойствами:

1°) граница замыкания объединения множеств (5) представляет собой две непересекающиеся компоненты, одна из которых ∂P, другая принадлежит внутренности куба P;

2°) каждое из множеств (5) представляет собой объединение кривых γ_x, имеющих в качестве одного из своих концов точку $x \in \partial P$, причем существует константа b, одна и та же для каждой кривой γ_x из рассматриваемого множества, такая, что $d_c(y, \partial P) \geq bl(\gamma_x(x, y))$, где $y \in \gamma_x$;

3°) каждая кривая γ_x (см. свойство 2°) представляет собой или отрезок интегральной линии левоинвариантного горизонтального векторного поля (в этом случае обозначаем $\gamma_x = I_{x,1}$), или объединение отрезка вида $I_{x,1}$ (см. свойство 2°) и отрезка интегральной линии левоинвариантного горизонтального векторного поля, соединяющего один из концов $I_{x,1}$ и $Z\mathbb{H}^1$ (в этом случае обозначаем $\gamma_x = I_{x,1} \cup I_2$).

Теперь перейдем к доказательству равномерности куба P. Для этого зафиксируем некоторое число η, и будем рассматривать только те пары точек $u, v \in P$, для которых выполняются неравенства

$$d(u, v) \leq \eta, \quad \max\{d(u, \partial P), d(v, \partial P)\} \leq 2\eta. \tag{6}$$

Число η выбирается при этом таким образом, чтобы пары точек u, v, удовлетворяющие неравенствам (6), принадлежали одному из множеств (5). Существование такого числа η вытекает из свойства 1°, а также из способа построения множеств (5). Действительно, нетрудно заметить, что всегда, когда u, v принадлежат двум различным множествам из (5), причем точки не принадлежат их пересечению, найдется обязательно третье множество из (5) (обозначим его через $M_{u,v}$), которому принадлежат уже обе точки u, v. Кроме того, выберем η настолько малым, чтобы прямолинейный отрезок, соединяющий u и v, принадлежал множеству $M_{u,v}$. Но тогда существование кривой, удовлетворяющей условиям равномерности для точек u, v (удовлетворяющих неравенствам (6)), может быть доказано методами доказательств теорем 1, 2. А этого, в свою очередь, достаточно, чтобы сделать заключение о том, что куб P является равномерной областью.

Для доказательства теоремы 3 для общих групп Гейзенберга достаточно указать конечный набор множеств K_i для куба P_n, аналогичный набору (5), и число η такие, что для любой пары точек, удовлетворяющих соотношениям

$$u, v \in P_n, \quad d(u, v) \leq \eta, \quad \max\{d(u, \partial P), d(v, \partial P)\} \leq 2\eta,$$

прямолинейный отрезок, соединяющий u и v, содержится в некотором множестве K_i. Такой набор может быть построен тем же способом, что и множества (5). Действительно, используя метод доказательства теоремы 2, множества K_i, которым принадлежат точки $\partial P_n \cap Z\mathbb{H}^n$, можно построить так же, как и множества $W_{(1)}$, $W_{(-1)}$ для случая $\mathbb{H}^1$. Укажем, например, как построить аналог множеств U_i. Для этого рассмотрим произвольную вершину w куба P_n. Под вершиной мы подразумеваем здесь точку

$$w = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2n}, \delta_{2n+1}) \in \mathbb{H}^n, \quad |\delta_j| = 1, \quad 1 \leq j \leq 2n + 1.$$

Для каждой точки z множества $K_1 = B_e(w,\varepsilon) \cap \partial P_n$ построим отрезок I_z интегральной линии некоторого левоинвариантного горизонтального векторного поля с началом в точке z, обладающий свойствами:

1) $I_z \in \operatorname{int} P_n$,
2) $d(\psi, \partial P_n) \geq bl(I_z(z,\psi))$, $\psi \in I_z$, где $I_z(z,\psi)$ — участок I_z от точки z до точки ψ, а константа b не зависит z и ψ.

Для этого рассмотрим левоинвариантное горизонтальное векторное поле

$$V = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i X + \beta_i Y) = \left(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n, \sum_{i=1}^{n} (-2y_i\alpha_i + 2x_i\beta_i)\right), \quad \alpha_i, \beta_i = \mathrm{const},$$

где $z = (\delta_1 + \tilde{\varepsilon}_1, \delta_2 + \tilde{\varepsilon}_2, \dots)$. Вершина w есть пересечение некоторых $2n+1$ евклидовых гиперплоскостей, внутренние нормальные векторы n_i которых имеют координаты $(0, \dots, 0, -\delta_i, 0, \dots, 0)$. Для того чтобы выполнялись свойства 1,2, достаточно потребовать выполнение неравенств

$$\langle n_{2i+1}, V \rangle = -\delta_{2i+1}\alpha_i > 0, \quad \langle n_{2i}, V \rangle = -\delta_{2i}\beta_i > 0,$$

$$\langle n_{2n+1}, V \rangle = -\delta_{2n+1} \sum_{i=1}^{n} (-2y_i\alpha_i + 2x_i\beta_i) > 0.$$

Однако если вместо последнего неравенства мы потребуем выполнение более сильных условий $-\delta_{2n+1}(-2y_i\alpha_i + 2x_i\beta_i) > 0$, то существование коэффициентов α_i, β_j вытекает из доказательства уже разобранного случая. Существование оставшихся множеств K_i может быть получено такой же редукцией к $\mathbb{H}^1$, существование числа η вытекает из построения K_i.

Доказательство теоремы 4. Сначала покажем, что область $\widetilde{P} = \mathbb{H}^1 \setminus \overline{P}$ является локально равномерна, откуда, конечно, будет следовать, что куб P является NTA-областью на группе $\mathbb{H}^1$.

Используя метод доказательства теоремы 3, построим аналог множеств (5) для $\widetilde{P}$. Для этого рассмотрим отрезки $I_{x,1}$ (см. свойство 3° теоремы 3) множеств U_i, $U_{i,j}$, $U_{i,j,k,l}$, S_i. Каждый из этих отрезков продолжим за границу куба на некоторое расстояние s'. В результате получим множества $\widetilde{U}_i$, $\widetilde{U}_{i,j}$, $\widetilde{U}_{i,j,k,l}$. Далее рассмотрим множества $(0,0,-1)W_{(1)} = \widetilde{W}_{(1)}$, $(0,0,-1)W_{(-1)} = \widetilde{W}_{(-1)}$. Нетрудно убедиться в том, что найдется число $\tilde{\epsilon}$ такое, что точки u, v, принадлежащие $\widetilde{P}$ и удовлетворяющие неравенствам

$$d(u,v) \leq \tilde{\epsilon}, \quad \max\{d(u, \partial\widetilde{P}), d(v, \partial\widetilde{P})\} \leq 2\tilde{\epsilon},$$

принадлежат одному из множеств

$$\widetilde{U}_i, \quad \widetilde{U}_{i,j}, \quad \widetilde{U}_{i,j,k,l}, \quad \widetilde{S}_i, \quad \widetilde{W}_{(1)}, \quad \widetilde{W}_{(-1)}. \tag{7}$$

Однако заметим, что не для всех пар точек u, v прямолинейный отрезок, их соединяющий, будет содержаться в $\widetilde{P}$. Тем не менее поскольку этот отрезок содержится в одном из множеств (7), используя методы доказательств теорем 1, 2, всегда можно построить для таких точек u, v кривую, удовлетворяющую условиям равномерности, с константами, не зависящими от выбора концевых точек.

Доказательство теоремы 4 в общем случае может быть получено очевидным обобщением методов доказательства теоремы 3 и разобранного выше случая группы $\mathbb{H}^1$.

Следствие 3. *Пусть* Π — *некоторый параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям, являющийся центрально симметричным. Тогда области* $v\Pi$, $v \in \mathbb{H}^n$, *а также* $\delta_\tau \Pi$, $\tau \in \mathbb{R}^+$ *являются* NTA*-областями.*

Доказательство. Доказательство следствия 3 для Π может быть проведено точно таким же способом, как и доказательство теорем 3, 4. Оставшиеся случаи (v не совпадает с началом координат и $\tau \neq 1$) вытекают из инвариантности метрики Карно — Каратеодори относительно действия группы растяжений и левых сдвигов.

§ 4. Условие однородного конуса и NTA-области

Рассмотрим шар $B(P, r)$ относительно однородной метрики. Назовем *сферической шапочкой* множество $C_\varepsilon(Q) = B(Q, \varepsilon) \cap \partial B(0, 1)$, где $Q \in \partial B(0, 1)$ и $\varepsilon > 0$.

Определение 5. Пусть $\mathscr{D} \subset \mathbb{G}$ — некоторая область и $P \in \partial \mathscr{D}$. Говорим, что область $\mathscr{D}$ удовлетворяет *условию внутреннего однородного конуса* в точке P, если найдется сферическая шапочка $C_\varepsilon(Q)$ такая, что $\Gamma_P = \{P\delta_s X \mid s \in (0, s_0),\ X \in C_\varepsilon(Q)\} \subset \mathscr{D}$.

Аналогично определяется условие внешнего однородного конуса.

Теорема 5. *На группе Гейзенберга* $\mathbb{H}^1$ *существуют* NTA*-области, не удовлетворяющие условию внутреннего однородного конуса.*

Доказательство. Построим NTA-область, не удовлетворяющую условию однородного конуса. Для этого введем в рассмотрение куб P_1 с вершинами в точках $A_1 = (\varepsilon/2, \varepsilon/2, 1)$, $A_2 = (-\varepsilon/2, \varepsilon/2, 1)$, $A_3 = (-\varepsilon/2, -\varepsilon/2, 1)$, $A_4 = (\varepsilon/2, -\varepsilon/2, 1)$, $A_5 = (\varepsilon/2, \varepsilon/2, 1-\varepsilon)$, $A_6 = (-\varepsilon/2, \varepsilon/2, 1-\varepsilon)$, $A_7 = (-\varepsilon/2, -\varepsilon/2, 1-\varepsilon)$, $A_8 = (\varepsilon/2, -\varepsilon/2, 1-\varepsilon)$. Выделим следующий куб P_2, принадлежащий P_1, имеющий вершины $E_1 = (\varepsilon/4, \varepsilon/4, 1-\varepsilon/4)$, $E_2 = (-\varepsilon/4, \varepsilon/4, 1-\varepsilon/4)$, $E_3 = (-\varepsilon/4, -\varepsilon/4, 1-\varepsilon/4)$, $E_4 = (\varepsilon/4, -\varepsilon/4, 1-\varepsilon/4)$, $E_5 = (\varepsilon/4, \varepsilon/4, 1-3\varepsilon/4)$, $E_6 = (-\varepsilon/4, \varepsilon/4, 1-3\varepsilon/4)$, $E_7 = (-\varepsilon/4, -\varepsilon/4, 1-3\varepsilon/4)$, $E_8 = (\varepsilon/4, -\varepsilon/4, 1-3\varepsilon/4)$. Рассмотрим область $D_1 = (P_1 \setminus P_2)$, не являющуюся односвязной. Из теорем 3, 4 и следствия 3 вытекает, что P_1, P_2 суть NTA-области, а $\mathbb{H}^1 \setminus \overline{P_2}$ — локально равномерная область. Отсюда следует, что D_1 является NTA-областью. Обозначим через a_0, b_0 константы равномерности для областей D_1, P_2.

На первом шаге подействуем на куб P_2 группой растяжений δ_τ таким образом, чтобы грань куба P_2, натянутая на вершины E_i, $i = 1, 2, 3, 4$, перешла в множество, принадлежащее грани куба P_1, натянутой на вершины A_i, $i = 5, 6, 7, 8$. Очевидно, что в силу инвариантности метрики Карно — Каратеодори относительно группы растяжений область $\delta_\tau P_2$ является NTA-областью. При этом область $\delta_\tau P_2$ представляет собой некоторый параллелепипед, обозначим его через D_2. Рассмотрим область $F_0 = \operatorname{Int} \overline{D_1 \cup D_2}$. Покажем, что эта область удовлетворяет NTA-условиям. Принимая во внимание доказательства теорем 2, 3, достаточно проверить выполнение NTA-условий в окрестности отрезков R_i, $i = 1, 2, 3, 4$, соединяющих попарно точки $\delta_\tau E_1$ и $\delta_\tau E_2$, $\delta_\tau E_2$ и $\delta_\tau E_3$, $\delta_\tau E_3$ и $\delta_\tau E_4$, $\delta_\tau E_4$ и $\delta_\tau E_1$ соответственно. В силу инвариантности метрики Карно — Каратеодори относительно левых сдвигов можно предполагать, не уменьшая общности, что все R_i принадлежат плоскости $V_1(0)$. Далее покажем, что для каждой точки $v \in \bigcup\limits_i R_i$, найдутся два горизонтальных левоинвариантных векторных поля таких, что отрезки интегральных линий этих полей с началом в точке v будут целиком (за исключением точки v) принадлежать внутренности области F_0 и внутренности дополнения к F_0 соответственно. Существование таких векторных полей вытекает из следующих фактов: плоскость $V_1(v)$ всегда содержит прямую, проходящую через точку v и начало координат; для любой точки $v \in \bigcup_i R_i$ нормаль плоскости $V_1(v)$ не является коллинеарной нормалям граней куба P_1 и параллелепипеда D_2. Далее, применяя методы доказательств теорем 3, 4, показываем выполнение NTA-условий для области F_0.

Будем называть грань параллелепипеда D_2, натянутую на вершины $\delta_\tau E_5$, $\delta_\tau E_6$, $\delta_\tau E_7$, $\delta_\tau E_8$, *нижней границей* области F_0, грань параллелепипеда P_1, натянутую на вершины A_1, A_2, A_3, A_4, — *верхней границей* области F_0. Также будем называть верхней границей области $\delta_\alpha F_0$ образ верхней границы области F_0 при действии группы растяжений δ_α, $\alpha > 0$, соответственно определяется нижняя граница области $\delta_\tau F_0$.

На втором шаге подействуем группой растяжений δ_{τ_1} на область F_0 таким образом, чтобы нижняя граница множества F_0 содержалась в верхней границе множества $F_1 = \delta_{\tau_1} F_0$. Введем следующие обозначения: $D_3 = \delta_{\tau_1} D_1$, $D_4 = \delta_{\tau_1} D_2$.

Рассмотрим область $Q_0 = \operatorname{Int} \overline{D_2 \cup D_3}$. Используя те же аргументы, что и при обосновании выполнения NTA-условий для F_0, можно утверждать, что Q_0 является NTA-областью.

На третьем шаге действуем группой растяжений δ_{τ_1} на область F_1 таким образом, чтобы нижняя граница множества F_1 содержалась в верхней границе множества $F_2 = \delta_{\tau_1} F_1$, на $(i+1)$-м шаге действуем группой растяжений δ_{τ_1} на область F_{i-1} таким образом, чтобы нижняя граница множества F_{i-1} содержалась в верхней границе множества $F_i = \delta_{\tau_1} F_{i-1}$. Введем обозначения $D_{2i+1} = \delta_{\tau_1} D_{2(i-1)+1}$, $D_{2i+2} = \delta_{\tau_1} D_{2(i-1)+2}$.

Рассмотрим область $F = \operatorname{Int} \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} D_j}$. Покажем, что данная область является NTA-областью. Сначала докажем, что F — равномерная область. Для этого рассмотрим всевозможные случаи расположения пары точек u, w в области F, и для каждого случая построим кривую, для которой выполняются условия равномерности.

Случай 1. u, $w \in F_0$ или u, $w \in Q_0$. Выше мы отмечали, что F_0, Q_0 суть NTA-области. Пусть a_1, b_1 — константы равномерности этих областей. Существование подходящих кривых в этом случае вытекает из того, что $(F_0 \cup Q_0) \subset F$.

Случай 2. u, $w \in \delta_{\tau_1^i} F_0$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$ или u, $w \in \delta_{\tau_1^i} Q_0$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Этот случай вытекает из случая 1 в силу инвариантности метрики Карно — Каратеодори относительно действия группы растяжений; при этом константы равномерности областей $\delta_{\tau_1^i} F_0$, $\delta_{\tau_1^i} Q_0$ будут теми же самыми, что и у областей F_0, Q_0 соответственно.

Случай 3. $u \in D_i$, $w \in D_j$, $j - i > 1$. Построим некоторую вспомогательную кривую. Рассмотрим точки $p_1 = (0,0,1)$ и $p_2 = \big(0,0,(1-3\varepsilon/4)(1-\varepsilon)(1-\varepsilon/4)^{-1}\big)$ (p_2 — точка пересечения нижней границы множества F_0 и $Z\mathbb{H}^1$), $q = (0,0,1-\varepsilon)$. Соединим точки p_1 и q, q и p_2 кривыми β_1 и β_2 соответственно, существование которых гарантируется равномерностью областей D_1, D_2. Обозначим $\gamma_1 = \beta_1 \cup \beta_2$. Покажем, что для кривой γ_1 в области F_0 выполняются условия равномерности с некоторыми константами, зависящими от a_0, b_0. Для этого предварительно выведем следующую оценку:

$$d(p_1, q) + d(q, p_2) \approx \varepsilon^{1/2} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon^2)^{1/2}}{(2 - \varepsilon/2)^{1/2}} \leq C \frac{(3\varepsilon/2 - 3\varepsilon^2/4)^{1/2}}{(1 - \varepsilon/4)^{1/2}} = Cd(p_1, p_2).$$

Тогда $l(\gamma_1) = l(\beta_1) + l(\beta_1) \leq a_0(d(p_1, q) + d(q, p_2)) \leq a_0 C d(p_1, p_2)$. Теперь проверим второе условие равномерности. Заметим, что найдутся точки $g_i \in \beta_i$, отличные от концов кривых β_i, такие, что для любых $v_i \in \beta_i(p_i, g_i)$ выполняются оценки

$$l(\gamma_1(p_i, v_i)) < \frac{l(\gamma_1)}{2}, \quad l(\beta_i(p_i, v_i)) \leq b_0(v_i, \partial F_0).$$

Рассмотрим кривую $\gamma_1(v_1, v_2)$. Очевидно, что существует положительная константа κ такая, что $d(\gamma_1(v_1, v_2), \partial F_0) > \kappa$. Тогда для каждой точки $g \in \gamma_1(v_1, v_2)$ имеем

$$l(\gamma_1(p_1, g)) \leq l(\gamma_1) \leq \frac{a_0 d(p_1, p_2)\kappa}{\kappa} \leq C'(a_0, \varepsilon, \kappa) d(g, \partial F). \tag{8}$$

Рассмотрим кривую $\gamma = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i$, $\gamma_i = \delta_{\tau_1}\gamma_{i-1}$. Покажем, что для любой кривой $\tilde{\gamma} \subset \gamma$ выполняются условия равномерности с константами, не зависящими от выбора $\tilde{\gamma}$. Поскольку случаи 1, 2 разобраны, достаточно рассмотреть кривую $\tilde{\gamma}$, имеющую вид $\tilde{\gamma} = \sigma_1 \cup (\bigcup\limits_{i=j+1}^{j+k} \gamma_i) \cup \sigma_2$, $k \in \mathbb{N}$, где $\sigma_1 \subset \gamma_j$, $\sigma_2 \subset \gamma_{j+k+1}$, или $\tilde{\gamma} = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 \subset \gamma_j$, $\sigma_2 \subset \gamma_{j+1}$, и проверить, что для нее выполняются условия равномерности.

Пусть p_3 —начало кривой $\tilde{\gamma}$, p_4 — конец кривой $\tilde{\gamma}$ (здесь направление на прямой $Z\mathbb{H}^1$ задаем от точки p_0 к началу координат). Будем далее полагать, не уменьшая общности, что $p_3 \in F_0$. Пусть для определенности $p_3 \in D_1$.

Сначала покажем существование константы c такой, что

$$d(p_3, p_4) \geq cd(p_2, q), \tag{9}$$

где $q = (0, 0, 1 - \varepsilon)$. Пусть $p_3 = (x_3, y_3, t_3)$, $p_4 = (x_4, y_4, t_4)$. Тогда

$$d(p_3, p_4) \approx \rho(p_3, p_4) \approx |x_3 - x_4| + |y_3 - y_4| + |t_3 - t_4 + 2y_4x_3 - 2x_4y_3|^{1/2}.$$

Поскольку $|x_i| \leq \varepsilon$, $|y_i| \leq \varepsilon$, то

$$|t_3 - t_4| \geq 1 - \varepsilon - \frac{(1 - 3\varepsilon/4)(1 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon/4} = \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{2(1 - \varepsilon/4)} \approx \varepsilon, \ |2y_4x_3 - 2x_4y_3| \leq O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

откуда $d(p_3, p_4) \geq |t_3 - t_4 + 2y_4x_3 - 2x_4y_3|^{1/2} \approx \varepsilon^{1/2} = cd(p_2, q)$ для некоторой константы c. Случай, когда $p_3 \in D_2$, доказывается аналогично.

Проверим первое условие равномерности для кривой $\tilde{\gamma}$. Имеем

$$\begin{aligned} l(\tilde{\gamma}) = l(\sigma_1) + \sum_{i=2}^{1+k} l(\gamma_i) + l(\sigma_2) &\leq C_1(\varepsilon) \sum_{i=1}^{k} \tau_1^i l(\gamma(q, p_2)) \\ &\leq C_2(a_1, C_1, \tau_1) d(q, p_2) \leq C_3(C_2, c) d(p_3, p_4). \end{aligned}$$

Проверка второго условия равномерности разбивается (по отношению к тому, какая часть кривой является минимальной по длине) на два случая. Пусть $\min\limits_{j=3,4} l(\tilde{\gamma}(p_j, x)) = l(\tilde{\gamma}(p_4, x))$, $x \in \tilde{\gamma}$. В этом случае существование константы b

(см. определение 1) вытекает из того, что $F_i = \delta_{\tau_1} F_{i-1}$, и инвариантности метрики Карно — Каратеодори относительно действия группы растяжений. Рассмотрим оставшийся случай $\min\limits_{j=3,4} l(\tilde{\gamma}(p_j,x)) = l(\tilde{\gamma}(p_3,x))$. Напомним, что по предположению точка p_3 принадлежит F_0. Тогда, очевидно, существует точка $u \in \tilde{\gamma}$ такая, что $l(\tilde{\gamma}(p_3,w)) \le b_1 d(w,\partial F)$ для всех w, принадлежащих кривой $\tilde{\gamma}(p_3,u)$. Для точек w, принадлежащих участку $\tilde{\gamma}(u,z)$, где z — середина кривой $\tilde{\gamma}$, найдется число $\kappa > 0$ такое, что $d(w,\partial F) \ge \kappa$, и поэтому используя метод доказательства (8), получаем существование требуемой константы.

Переходим непосредственно к случаю 3. Рассмотрим множество $\gamma \cap \partial D_i$ и выберем из него точку, которая имеет наименьшую последнюю компоненту. Обозначим ее через v_i. После этого рассмотрим множество точек $\gamma \cap \partial D_j$ и выберем из него точку, которая имеет наибольшую последнюю компоненту. Обозначим ее через v_j. Имеем u, $v_i \in \overline{D_i}$. Как было отмечено выше, для любого i области D_i являются равномерными. Поэтому можно соединить точки точки u и v_i кривой $\sigma_i \subset \overline{D_i}$, для которой выполняются условия равномерности с константами a_0, b_0. Из этих же соображений можно соединить точки w и v_j кривой $\sigma_j \subset \overline{D_j}$, для которой выполняются условия равномерности с некоторыми константами a_0, b_0. Точки v_i, v_j соединим участком кривой γ.

Используя те же аргументы, что и при доказательстве неравенства (9) (см. оценки (10)), устанавливаем, что $d(u,w) \ge cd(v_i,v_j)$, откуда, пользуясь схемой рассуждений, которая применялась при проверке условий равномерности для кривой γ, получаем, что кривая $\sigma_i \cup \gamma(v_i,v_j) \cup \sigma_j$ удовлетворяет условиям равномерности с константами равномерности, не зависящими от выбора u и w.

Теперь покажем, что область F удовлетворяет условию внешней спирали. Именно, покажем, что для области F константа r_0 из определения 3 равна ∞. Напомним, что F_0, Q_0 являются NTA-областями, и пусть числа $r_0(F_0)$, $r_0(Q_0)$ обозначают константы из определения 3 для областей F_0 и Q_0 соответственно. Также напомним, что $F_0 = \operatorname{Int} \overline{D_1 \cup D_2}$, $Q_0 = \operatorname{Int} \overline{D_2 \cup D_3}$. Поскольку $D_3 = \delta_{\tau_1} D_1$, найдется число g такое, что $d(D_1,D_3) > g$. Поэтому область $F_0 \cup Q_0$ удовлетворяет условию внешней спирали с константой $r_0' = \min\{r_0(F_0), r_0(Q_0), g\}$. Рассмотрим множество $S = \partial F \cap \partial(F_0 \cup Q_0)$. Будем рассматривать те точки $v \in S$, которые принадлежат объединению границы множества F_0 и верхней границы множества F_1 (обозначим это объединение через S_1). Считаем, что число r_0' мало́ настолько, что те шары, существование которых обеспечивается выполнением условия внешней спирали для S_1, лежат в некоторой окрестности U множества S, причем найдется число κ такое, что $d(U,\partial F \setminus S) > \kappa > 100 r_0'$. Для каждого шара $B(v,r_0')$, где $v \in S_1$, обозначим через $B(u_v,\tilde{r})$ шар, существование которого гарантируется условием внутренней спирали для области $\operatorname{Int} F_0 \cup Q_0$ ($\tilde{r} = C_1 r_0'$, см. определение 3). Тогда полагаем для каждого $\hat{r} \in (r_0', R]$, где R — достаточно большое число, что шар, который гарантируется выполнением условия внешней спирали для $B(v,\hat{r})$, совпадает с $B(u_v,\tilde{r})$. Теперь рассмотрим шар $B(v,R+\alpha)$, $\alpha > 0$. Выбираем R настолько большим, чтобы для каждого числа α выполнялись соотношения $B\big((0,0,1),\frac{3(R+\alpha)}{4}\big) \subset B(v,R+\alpha)$, $F \subset \bigcup\limits_{z \in Z\mathbb{H}^1} B\big(z,\frac{(R+\alpha)}{1000}\big)$. Тогда шар, удовлетворяющий условию внешней спирали для $B(v,R+\alpha)$, строится следующим образом. Возьмем интегральную линию I некоторого горизонтального векторного поля в точке $(0,0,1)$. Выберем точку $w \in I$ такую, что $d(w,(0,0,1)) = \frac{(R+\alpha)}{2}$. В качестве искомого шара можно взять $B\big(w,\frac{(R+\alpha)}{100}\big)$. Для точек, принадлежащих множеству $\partial F \setminus (S_1 \cup (0,0,0))$, выполнение условия внешней спирали следует из вышесказанного для S_1 и инвариантности метрики Карно — Каратеодори относительно действия группы растяжений. Для точки $(0,0,0)$ выполнение условия внешней спирали с константой $r_0 = \infty$ очевидно, поскольку $F \subset \{(x,y,t) \mid t > 0\}$.

Таким образом, доказано, что F является NTA-областью. Пусть теперь начало координат принадлежит границе множества F. Как нетрудно заметить, область F строилась таким образом, что не найдется точки $v \in \mathbb{H}^1$ такой, что кривая $\delta_t v$ содержится в F. Поэтому в начале координат для области F условие внутреннего однородного конуса не выполняется. На этом доказательство теоремы 5 закончено.

В заключение отметим, что решающую роль в построении примера, приведенного выше, сыграло то обстоятельство, что область F не является односвязной. В связи с этим естественно возникает вопрос: можно ли построить аналогичный пример в классе односвязных областей?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gromov M.* Carnot — Carathéodory spaces seen from within. Bures-sur-Yvette, 1994. 221 p. (Препринт/IHES; N IHES/M/94/6).

2. *Pansu P.* Métriques de Carnot — Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.

3. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.

4. *Strichards R.* Sub-Reimannian geometry // J. Differential Geom. 1986. V. 24, N 2. P. 221–262.

5. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.

6. *Gehring F. W., Osgood B. G.* Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric // J. Anal. Math. 1979. V. 36. P. 50–74.

7. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1015–1048.

8. *Jones P.* Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces // Acta Math. 1981. N 147. P. 71–88.

9. *Koskela P. W.* Capacity extension domain. Helsinki, 1990. 42 p. (Препринт/Univ. of Jyväskylä; N 73/Soumalainen Tiedakatemia/Helsinki/1990).

10. *Jerison D., Kenig C.* Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains // Adv. Math. 1982. V. 47, N 1. P. 80–147.

11. *Capogna L., Tang P.* Uniform domains and quasiconformal mappings on Heisenberg group // Manuscripta Math. 1995. V. 86, N 3. P. 267–281.

12. *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1979. V. 4. P. 383–401.

13. *Jones P.* Extension theorems for BMO // Indiana Univ. Math. 1980. V. 29, N 1. P. 41–66.

14. *Wittmann R.* A non-tangential limit theorem // Osaka J. Math. 1987. V. 24, N 1. P. 61–76.

15. *Capogna L., Garofalo N.* Non tangentially accassible domains for Carnot — Caratheodory metrics and a Fatou type theorem // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1995. V. 321, N 12. P. 1565–1570.

16. *Capogna L., Garofalo N.* Boundary behavior of non-negative solutions of subelliptic equations in NTA-domains for Carnot — Caratheodory metrics // Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4, N 4. P. 403–432.

17. *Грешнов А. В.* Области, удовлетворяющие условиям внутренней и внешней спирали, на метрических пространствах // Тр. 12 Сибирской школы «Алгебра, геометрия, анализ и математическая физика». Новосибирск: РАН. Сиб. отд-ние, 1999. С. 54–67.

Статья поступила 15 января 2000 г.

Грешнов Александр Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
greshnov@math.nsc.ru