Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.956+517.55

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ С ИНЪЕКТИВНЫМ СИМВОЛОМ В ТЕРМИНАХ ИТЕРАЦИЙ ПОТЕНЦИАЛОВ ДВОЙНОГО СЛОЯ

А. А. Шлапунов

Аннотация: Доказывается существование $H^p(D)$-предела итераций потенциалов двойного слоя, построенных при помощи параметрикса Ходжа на гладком компактном многообразии X (здесь D — открытое связное подмножество в X). Этот предел является ортогональным проектором из пространства Соболева $H^p(D)$ на замкнутое подпространство $H^p(D)$-решений некоторого эллиптического оператора P порядка $p \geq 1$. Используя этот результат, мы получаем формулы для соболевских решений уравнения $Pu = f$ в D, если такие решения существуют. Решения даются в виде суммы ряда, слагаемые которого суть итерации потенциалов двойного слоя. Похожее разложение построено также для P-задачи Неймана в D. Библиогр. 8.

1. Введение

Работа базируется на одном очень простом наблюдении. Рассмотрим операторное уравнение $Au = f$ с некоторым ограниченным линейным оператором $A : H_0 \to H_1$ в гильбертовых пространствах H_0, H_1 и предположим, что для всех $u \in H_0$ справедлива следующая формула:

$$u = \Pi_1 u + \Pi_2 A u,$$

где Π_1 — проектор из H_0 на ядро $\ker A$. Тогда можно надеяться, что при разумных условиях элемент $\Pi_2 f$ определяет решение уравнения $Au = f$. Этот метод неоднократно использовался в комплексном анализе и хорошо зарекомендовал себя там.

Известно, что теория Ходжа для эллиптического дифференциального оператора P на компактном многообразии X дает L^2-ортогональный проектор на пространство решений уравнения $Pu = 0$ на всем X. В настоящей работе, используя теорию Ходжа, мы строим ортогональный проектор из пространства Соболева $H^p(D)$ (где D — открытое связное подмножество в X, а p — порядок оператора P) на замкнутое подпространство $H^p(D)$-решений уравнения $Pu = 0$ в D (см. § 2 и 3).

Работа мотивирована следующими соображениями. Во-первых, локальная разрешимость линейных дифференциальных операторов с инъективным символом и гладкими коэффициентами уже многие годы является одним из основных нерешенных вопросов теории переопределенных систем (см., например, [1]). Вышеупомянутые результаты позволяют построить формулу для H^p-решений

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–15–96140) и группы профессора Шульце (университет г. Потсдам, Германия).

уравнения $Pu = f$ на открытых подмножествах в X для оператора P с инъективным символом, если такие решения существуют (см. § 4). Решение дается в виде суммы ряда, слагаемые которого суть итерации потенциалов двойного слоя, в то время как разрешимость уравнения $Pu = f$ эквивалентна сходимости этого ряда вместе с ортогональностью ядру $\ker P^*$ (последнее представляет собой тривиальное необходимое условие разрешимости). Во-вторых, этот метод дает возможность построить аналогичное разложение для P-задачи Неймана (см. § 5, 6).

Для системы Коши — Римана $P = \bar{\partial}$ в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ эти потенциалы двойного слоя являются интегралами типа Мартинелли — Бохнера. В этом случае подобные результаты получены А. В. Романовым [2] и А. М. Кытмановым [3 с. 177]. В [2] построена явная формула для решения $u \in H^1(D)$ уравнения $\bar{\partial} u = f$, где D — псевдовыпуклая область с гладкой границей, а f — $\bar{\partial}$-замкнутая (0,1)-форма с коэффициентами из $H^1(D)$; в [3] регуляризована $\bar{\partial}$-задача Неймана в таких областях.

2. Теория Ходжа на компактном многообразии

Пусть X — C^∞-многообразие размерности $\dim X = n$, E и F — гладкие $\mathbb{C}$-векторные расслоения над X, а $do_p(E \to F)$ — векторное пространство линейных дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами порядка $\leq p$ между расслоениями E и F. Пусть E^* — сопряженное расслоение к E, $(.,.)_x$ — эрмитова метрика в слоях E, dx — форма объема на X. Обозначим через ${}^tP \in do_p(F^* \to E^*)$ транспонированный оператор, а через $P^* \in do_p(F \to E)$ — (формально) сопряженный для $P \in do_p(E \to F)$.

Пусть $S_P(U)$ обозначает пространство слабых решений уравнения $Pu = 0$ на открытом подмножестве U в X. Для всякой области (т. е. открытого связного множества) D в X обозначим через $L^2(E_{|D})$ пространство Лебега, состоящее из всех измеримых функций на D, для которых $(u,u)_{L^2(E_{|D})} = \int\limits_D (u,u)_x \, dx < \infty$. Обозначим также через $H^m(E_{|D})$ пространство Соболева, состоящее из сечений-распределений расслоения E над D, слабые производные которых принадлежат $L^2(E_{|D})$ до порядка m, а через $S_P^m(D)$ — замкнутое подпространство в $H^m(E_{|D})$, состоящее из слабых решений уравнения $Pu = 0$ в D $(m \in \mathbb{N})$.

Пусть $\sigma(P)$ — главный символ оператора P. В дальнейшем мы будем предполагать, что символ $\sigma(P)(x, \zeta)$ инъективен для всех $x \in X$ и векторов ζ из (действительного) кокасательного расслоения над многообразием X. Тогда лапласиан $\Delta = P^*P$ является эллиптическим оператором порядка $2p$ на X и для него существует параметрикс Ходжа, скажем, Φ (см., например, [1, § 8]).

Рассмотрим для $u, v \in H^p(E)$ эрмитову форму

$$h(u,v) = \int\limits_X (Pu, Pv)_x \, dx + \int\limits_X (Ku, Kv)_x \, dx,$$

где K — соответствующий Φ ортогональный L^2-проектор на конечномерное пространство $S_P(X)$, для которого $PK = KP^* = 0$ и $\Phi K = K\Phi = 0$.

Предложение 2.1. *Эрмитова форма $h(\cdot,\cdot)$ является скалярным произведением на $H^p(E)$, определяющим топологию, эквивалентную исходной. Оператор K является ортогональным относительно $h(.,.)$ проектором на подпро-*

странство $S_P(X)$ *в* $H^p(E)$. *Положим*

$$Tf(x) = \int\limits_X {}^t({}^tP^*(y)\Phi(x,y))f(y)\,dy.$$

Тогда

$$h(Tf,u) = \int\limits_X (f,Pu)_x\,dx$$

для всех $f \in L^2(F)$, $u \in H^p(E)$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$(TPu)(x) + (Ku)(x), \quad x \in X, \tag{2.1}$$

для всех $u \in H^p(E)$. Коэффициенты оператора P являются $C^\infty(E)$-функциями, а значит, $Pu \in L^2(F)$. Из (2.1) следует, что $h(u,u) = 0$ эквивалентно $u \equiv 0$ на X. Поскольку $(\cdot,\cdot)_x$ является эрмитовой метрикой, заключаем, что $h(.,.)$ представляет собой скалярное произведение на $H^p(E)$. Так как оператор K сглаживающий, то $\|.\|_{H^p(E)}$ не слабее, чем $\sqrt{h(.,.)}$.

Из (2.1) и теоремы об ограниченности псевдодифференциальных операторов (см. [4, 1.2.3.5]) вытекает, что найдется такая постоянная $c_1 > 0$, что для всех $u \in H^p(E)$

$$\|u\|^2_{H^p(E)} \le c_1\big(\|Pu\|^2_{L^2(F)} + \|Ku\|^2_{H^p(E)}\big).$$

Поскольку K сглаживающий, найдется такая постоянная $c_2 > 0$, что

$$\|Ku\|^2_{H^p(E)} \le c_2\|Ku\|^2_{L^2(E)}$$

для всех $u \in H^p(E)$. Эквивалентность топологий доказана.

Если $f \in C^\infty(F)$, $u \in H^p(E)$, то, интегрируя по частям, получаем $Tf = \Phi(P^*f)$. Из свойств параметрикса Ходжа следует, что $KTf = 0$, а значит,

$$h(Tf,u) = \int\limits_X (P\Phi(P^*f),Pu)_x\,dx = \int\limits_X (P^*P\Phi(P^*f),u)_x\,dx$$
$$= \int\limits_X (P^*f,u)_x\,dx = \int\limits_X (f,Pu)_x\,dx.$$

Поскольку $C^\infty(F)$ плотно в $L^2(F)$, справедливо требуемое утверждение для интеграла T.

Наконец, для $u,v \in H^p(E)$ видим, что

$$h(Ku,v) = h(u,v) - h(TPu,v) = \int\limits_X (Ku,Kv)_x\,dx,$$

т. е. K — самосопряженный оператор относительно $h(.,.)$ в $H^p(E)$ и $K^2 = I$, что и требовалось. □

Как хорошо известно, с помощью оператора T легко получить условия разрешимости уравнения $PU = f$ на X и найти само решение. На самом деле параметрикс Ходжа может быть полезен для этой цели и на открытых подмножествах многообразия X. Обозначим через $G_P(.,.)$ оператор Грина для

$P \in do_p(E \to F)$ (см., например, [1, с. 82]). Пусть D — относительно компактная область в X с гладкой границей ∂D. Определим операторы T_D, K_D и M, положив

$$(K_D u)(x) = \int\limits_D {}^t(K(x,y))u(y)\,dy \quad (x \in X),$$

$$(Mu)(x) = -\int\limits_{\partial D} G_P({}^tP^*(y,D)\Phi(x,y), u(y)) \quad (x \in X\backslash\partial D), \tag{2.2}$$

$$(T_D f)(x) = \int\limits_D {}^t({}^tP^*(y,D)\Phi(x,y))f(y)\,dy \quad (x \in X)$$

для $u \in H^p(E_{|D})$, $f \in L^2(F_{|D})$.

Из теоремы об ограниченности псевдодифференциальных операторов (см. [4]) и формулы Стокса следует, что

$$(Mu)(x) + (K_D u)(x) + (T_D P u)(x) = \begin{cases} u(x), & x \in D, \\ 0, & x \in X \setminus \overline{D} \end{cases} \tag{2.3}$$

для всех $u \in H^p(E_{|D})$, а операторы $M : H^p(E_{|D}) \to H^p(E_{|D})$, $K_D : H^p(E_{|D}) \to H^p(E_{|D})$ и $T_D : L^2(F_{|D}) \to H^p(E_{|D})$ непрерывны.

Пример 2.2. Пусть Y — относительно компактная область с гладкой границей ∂Y в некотором открытом множестве $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, а P — оператор с инъективным символом на $\widetilde{X}$. Предположим, что оператор P^*P имеет двустороннее фундаментальное решение на $\widetilde{X}$, и пусть Φ — функция Грина задачи Дирихле для оператора P^*P в Y. В [5] построено скалярное произведение $h_D(.,.)$ на $H^p(E_{|D})$, определяющее топологию, эквивалентную исходной, и такое, что предел итераций потенциалов двойного слоя $\lim\limits_{N\to\infty} M^N$ — ортогональный относительно $h_D(.,.)$ проектор на $S^p_P(D)$. В [5] также доказано, что

$$h_D(T_D f, v) = \int\limits_D (f, Pv)_x\,dx$$

для всех $f \in L^2(F_{|D})$ и $v \in H^p(E_{|D})$. Эта ситуация соответствует разложению Ходжа для задачи Дирихле для P^*P в Y.

В следующем параграфе мы докажем аналогичные результаты для интегралов T_D и M в нашей более общей ситуации.

3. Построение скалярного произведения $h_D(.,.)$

Нам понадобится информация о разрешимости задачи Дирихле для оператора $\Delta = P^*P$ в области D в X. Пусть U — окрестность ∂D в X, а F_j $(0 \le j \le p-1)$ — векторные расслоения над U. Зафиксируем систему Дирихле, скажем $\{B_j\}_{j=0}^{p-1}$, граничных дифференциальных операторов $B_j \in do_j(E_{|U} \to F_j)$. Это означает, что каждый символ $\sigma(B_j)(x,\zeta)$ имеет максимально возможный ранг для всех $x \in U$ и векторов ζ, конормальных к ∂D.

Задача 3.1. *Пусть* $\bigoplus\limits_{j=0}^{p-1} \psi_j \in \oplus H^{p-j-1/2}(F_{j|\partial D})$ *и* $\phi \in L^2(E_{|D})$. *Найти сечение* $\psi \in H^p(E_{|D})$ *такое, что*

$$\begin{cases} P^*P\psi = \phi & \text{в } D; \\ (B_j\psi)_{|\partial D} = \psi_j & (0 \le j \le p-1). \end{cases}$$

Обозначим через $H^p_0(E_{|D})$ пространство

$$H^p_0(E_{|D}) = \{u \in H^p(E_{|D}) : B_j u = 0 \text{ на } \partial D \text{ для } 0 \le j \le p-1\}.$$

Тогда $H^p_0(E_{|D})$ — замыкание $\mathscr{D}(E_{|D})$ в $H^p(E_{|D})$.

В следующем хорошо известном утверждении $Z_0(D) = S_P(D) \cap H^p_0(E_{|D})$, а $Z_0^\perp(D)$ состоит из сечений $\psi \in H^p(E_{|D})$ таких, что

$$\int\limits_D (\psi(x), v(x))_x \, dx = 0$$

для всех $v \in Z_0(D)$.

Лемма 3.2. *Задача* 3.1 *разрешима в том и только том случае, когда*

$$\int\limits_D (\phi, v)_x \, dx = 0 \quad \text{для всех } v \in Z_0(D).$$

Она имеет не более чем конечное число решений; разность между двумя решениями принадлежит конечномерному пространству $Z_0(D)$. Более того, существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\|\psi\|_{H^p(E_{|D})} \le c \left(\|\phi\|_{L^2(E_{|D})} + \sum_{j=0}^{p-1} \|\psi_j\|_{H^{p-j-1/2}(F_{j|\partial D})} \right)$$

для всех решений $\psi \in Z_0^\perp(D)$ задачи 3.1.

Обозначим $S^p_{P^*P}(X \setminus \overline{D}) \cap Z_o^\perp(X \setminus \overline{D})$ через $\widetilde{S}^p_\Delta(X \setminus \overline{D})$. Используя лемму 3.2, мы получаем линейный изоморфизм

$$\widetilde{S}^p_\Delta(X \setminus \overline{D}) \ni v \xrightarrow{\mathscr{R}^+} \bigoplus_{j=0}^{p-1} (B_j v)_{|\partial D} \in \bigoplus_{j=0}^{p-1} (H^{p-j-1/2}(E_{|\partial D})).$$

Композиция $(\mathscr{R}^+)^{-1}$ с оператором сужения

$$H^p(E_{|D}) \ni u \xrightarrow{\mathscr{R}^-} \bigoplus_{j=0}^{p-1} (B_j u)_{|\partial D} \in \bigoplus_{j=0}^{p-1} (H^{p-j-1/2}(E_{|\partial D}))$$

дает нам линейное непрерывное отображение $H^p(E_{|D}) \ni u \to S(u) \in \widetilde{S}^p_\Delta(X \setminus \overline{D})$. Для $u \in H^p(E_{|D})$ введем следующее обозначение:

$$U(u)(x) = \begin{cases} u(x), & x \in D, \\ S(u)(x), & x \in X \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Поскольку $(B_j S(u))_{|\partial D} = (B_j u)_{|\partial D}$ $(0 \le j \le p-1)$, имеем $U(u) \in H^p(E)$.

Теорема 3.3. *Эрмитова форма $h_D(u, v) = h(U(u), U(v))$ является скалярным произведением на $H^p(E_{|D})$, определяющим топологию, эквивалентную исходной. Более того,*

$$h_D(T_D f, u) = \int\limits_D (f, Pu)_x \, dx$$

для всех $f \in L^2(F_{|D})$, $u \in H^p(E_{|D})$.

Доказательство. Из предложения 2.1 следует, что $\sqrt{(h_D(.,.))}$ не слабее, чем стандартная норма $\|.\|_{H^p(E_{|D})}$. С другой стороны,

$$h_D(u,u) = h(U(u),U(u)) \le c_1 \|U(u)\|^2_{H^p(E)} \le 2c_1\big(\|u\|^2_{H^p(E_{|D})} + \|S(u)\|^2_{H^p(E_{|X\setminus D})}\big).$$

Используя лемму 3.2 и непрерывность оператора сужения, заключаем, что найдутся такие постоянные c_3, c_4, что

$$\|S(u)\|^2_{H^p(E_{|X\setminus D})} \le c_3 \sum_{j=0}^{p-1} \|B_j u\|^2_{H^{p-j-1/2}(F_{j|\partial D})} \le c_4\ \|u\|_{H^p(E_{|D})}$$

для всех $u \in H^p(E_{|D})$, что и доказывает эквивалентность топологий.

Предложение 3.4. *Для всех* $u, v \in H^p(E_{|D})$, $f \in L^2(F_{|D})$ *выполнены равенства*

$$h_D(T_D f, v) = \int\limits_D (f, Pv)_x\, dx,$$

$$h_D((M+K_D)u, v) = \int\limits_{X\setminus D} (PS(u), PS(v))_x\, dx + \int\limits_X (KU(u), KU(v))_x\, dx.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{D}(F_{|D})$. Тогда $T_D f$ принадлежит $H^p(E)$ (и даже $C^\infty(E)$). Покажем, что $U(Tf_{|D}) = Tf$. Для этого нам нужно проверить, что $(T_D f)_{|X\setminus\overline{D}} \in \widetilde{S}^p_\Delta(X \setminus \overline{D})$. Однако $T_D f = Tf = \Phi(P^* f)$, а значит, $P^*PT_D f = P^* f - KP^* f = P^* f$ на X. Поскольку $f \in \mathscr{D}(F_{|D})$, то $P^*PT_D f = 0$ в $X \setminus \overline{D}$. Очевидно, что $Z_o(X \setminus \overline{D}) \subset Z(X)$, а интеграл $\Phi(P^* f)$ ортогонален $Z(X)$. Следовательно, $T_D f_{|X\setminus\overline{D}} \in Z_o^\perp(X \setminus \overline{D})$, что и требовалось.

Далее, если $u \in H^p(E_{|D})$, то из предложения 2.1 следует, что

$$h_D(T_D f, u) = h(Tf, U(u)) = \int\limits_X (f, PU(u))_x\, dx = \int\limits_D (f, Pu)_x\, dx.$$

Так как $\mathscr{D}(F_{|D})$ плотно в $L^2(F_{|D})$, а оператор T_D ограничен, эта формула верна для всех $u \in H^p(E_{|D})$ и $f \in L^2(F_{|D})$. Наконец, из (2.2) вытекает, что

$$h_D((M+K_D)u, v) = h_D(u - T_D Pu, v) = \int\limits_{X\setminus D} (PS(u), PS(v))_x\, dx + \int\limits_X (KU(u), KU(v))_x\, dx.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 3.5. *Операторы*

$$T_D P : H^p(E_{|D}) \to H^p(E_{|D}), \quad (M + K_D) : H^p(E_{|D}) \to H^p(E_{|D})$$

являются линейными ограниченными самосопряженными неотрицательными операторами и, более того, $\|T_D P\| \le 1$, $\|M + K_D\| \le 1$.

Легко понять, что $Z_0^\perp(D)$ — ортогональное дополнение $Z_0(D)$ в пространстве $H^p(E_{|D})$ относительно $h_D(.,.)$. В самом деле, $Z_0(D) \subset Z(X)$, поскольку всякий элемент $u \in Z_0(D)$ может быть продолжен нулем из D на X как решение уравнения $Pu = 0$ на X. Тогда $S(u) = 0$ для всех $u \in Z_0(D)$ и

$$h_D(u,v) = \int\limits_X (KU(u), KU(v))_x\,dx = \int\limits_D (u,v)_x\,dx.$$

Из следствия 3.5 вытекает, что можно рассматривать итерации $(M+K_D)^\nu$ и $(T_DP)^\nu$ интегралов $(M+K_D)$ и T_DP соответственно в пространствах Соболева $H^p(E_{|D})$. В следующем утверждении $\Pi(\Sigma)$ обозначает ортогональный (относительно $h_D(.,.)$) проектор на замкнутое подпространство Σ в $H^p(E_{|D})$.

Следствие 3.6. *В сильной операторной топологии пространства* $H^p(E_{|D})$

$$\lim_{\nu\to\infty}(M+K_D)^\nu = \Pi\bigl(S^p_P(D)\bigr), \quad \lim_{\nu\to\infty}(T_DP)^\nu = \Pi(\ker(M+K_D)),$$

в сильной операторной топологии пространства $L^2(F_{|D})$

$$\lim_{\nu\to\infty}(I-PT_D)^\nu = \Pi(\ker(T_D)).$$

Доказательство. Из следствия 3.5 следует, что

$$\lim_{\nu\to\infty}(M+K_D)^\nu = \Pi(I-K_D-M),$$

$$\lim_{\nu\to\infty}(I-PT_D)^\nu = \ker(PT_D), \quad \lim_{\nu\to\infty}(T_DP)^\nu = \ker(I-T_DP)$$

в сильной операторной топологии в $H^p(E_{|D})$ (см., например, [5, § 2] или [6] для компактных операторов). А из предложения 3.4 и (2.2) вытекает, что

$$\ker(I-T_DP) = \ker(M+K_D), \quad \ker T_DP = S^p_P(D) \quad \ker PT_D = \ker T_D. \quad \square$$

4. Условия разрешимости для $Pu = f$

В этом разделе с помощью следствия 3.6 исследуется разрешимость уравнения $Pu = f$ в D. В частности, когда оно разрешимо, мы получаем явное решение в виде суммы ряда, который может быть вычислен по данным f.

Следствие 4.1. *В сильной операторной топологии пространства* $H^p(E_{|D})$

$$I = \Pi(S^p(D)) + \sum_{\mu=0}^{\infty}(M+K_D)^\mu(T_DP), \tag{4.1}$$

$$I = \Pi(\ker(M+K_D)) + K_D + \sum_{\mu=0}^{\infty}(T_DP)^\mu M, \tag{4.2}$$

в сильной операторной топологии пространства $L^2(F_{|D})$

$$I = \Pi(\ker T_D) + \sum_{\mu=0}^{\infty}P(M+K_D)^\mu T_D. \tag{4.3}$$

Доказательство. Из формулы (2.2) следует, что для всех $\nu \in \mathbb{N}$

$$I = (I-PT_D)^N \ + \ \sum_{\mu=0}^{N-1}(I-PT_D)^\mu PT_D. \tag{4.4}$$

Согласно (2.2) имеем

$$(I-PT_D)^\mu PT_D = P(I-T_DP)^\mu T_D = P(M+K_D)^\mu T_D.$$

Используя теперь следствие 3.6, мы можем перейти к пределу по $N\to\infty$ в (4.4) и получить (4.3). Доказательство формул (4.1) и (4.2) проводится аналогично. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть $f \in L^2(F_{|D})$. Для существования сечения $u \in H^p(E)$, удовлетворяющего $Pu = f$ в D, необходимо и достаточно, чтобы*

(1) *ряд $Rf = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty}(M + K_D)^\mu T_D f$ сходился в $H^p(E_{|D})$;*

(2) $\int\limits_D (g, f)_x \, dx = 0$ *для всех $g \in \ker T_D$.*

Более того, если (1) и (2) выполнены, то $PRf = f$ на D.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3.3 и следствия 4.1. Обратно, пусть (1) и (2) выполнены. Тогда из следствия 4.1 вытекает, что

$$f = \sum_{\mu=0}^{\infty} P(M + K_D)^\mu T_D f.$$

Поскольку ряд Rf сходится в $H^p(E_{|D})$, то $f = PRf$. $\square$

В [5] получен этот результат в случае, рассмотренном в примере 2.2.

Замечание 4.3. Из следствия 3.6 следует, что решение $u = Rf$ уравнения $Pu = f$ в D принадлежит $\big(S^p_P(D)\big)^\perp$, где $(S^p_P(D))^\perp$ — ортогональное (относительно $h_D(.,.)$) дополнение $S^p_P(D)$ в $H^p(E_{|D})$, и является единственным решением в этом подпространстве. Частичные суммы $R_N f$ ряда Rf можно трактовать как приближенные решения уравнения $Pu = f$ в D. Как легко увидеть с помощью следствий 3.6 и 4.1,

$$\lim_{N\to\infty} \|PR_N f - f - \Pi(\ker T_D) f\|_{L^2(F_{|D})} = 0$$

для всех $f \in L^2(F_{|D})$ и $R_N f \in (S^p_P(D))^\perp$ для всех $N \in \mathbb{N}$.

Замечание 4.4. Для сечения $g \in L^2(F_{|D})$ обозначим через $\tilde{g}$ его продолжение из D нулем на X. Тогда $0 = T_D g = T\tilde{g}$, а значит, $\ker T_D$ — множество таких функций g из $L^2(F_{|D})$, что $P^*\tilde{g} = 0$ (слабо) на X.

Если оператор P может быть включен в какой-нибудь эллиптический комплекс (E^i, P^i), то условие (2) в теореме 4.2 может быть заменено следующим: $P^1 f = 0$ в D и $\int\limits_D (g, f)_x \, dx = 0$ для всех $g \in \ker T_D \cap S^0_{P_1}(D)$.

Как и выше, $\{B_j\}_{j=0}^{p-1}$ — система Дирихле порядка $p-1$ на ∂D, $\{C_j\}_{j=0}^{p-1}$ — система Дирихле, двойственная к $\{B_j\}_{j=0}^{p-1}$ относительно формулы Грина (см., например, [7, лемма 28.3]). Пусть $\mathfrak{H}(D) = \{g \in L^2(F_{|D}) : P^* g = 0,\ P^1 g = 0$ в D и $({}^t C^*_j g)_{|\partial D} = 0,\ 0 \le j \le p-1$ в смысле слабых граничных значений$\}$.

Будем называть $\mathfrak{H}(D)$ *гармоническим* пространством для комплекса $\{E^i, P^i\}$ в D. В силу эллиптичности комплекса $\mathfrak{H}(D) \subset C^\infty(F_{|D})$. Нетрудно видеть, что для комплекса Дольбо это определение гармонического пространства $\mathfrak{H}(D)$ совпадает с данным в [8]. Легко также доказать, что $\ker T_D \cap S^0_{P^1}(D) = \mathfrak{H}(D)$. Тем не менее пространство $\mathfrak{H}(D)$ не является, вообще говоря, конечномерным (если только $D \ne X$).

5. *P*-задача Неймана

В этом разделе теорема 3.3 используется для изучения P-задачи Неймана для эллиптического оператора $P \in do_p(E \to F)$.

Задача 5.1. *Пусть* $\phi \in L^2(E_{|D})$ *и* $\psi_j \in W^{-j-1/2,2}(F_{j|\partial D})$ $(0 \le j \le p-1)$ — *заданные сечения. Найти* $\psi \in H^p(E_{|D})$ *такое, что*

$$\begin{cases} P^*P\psi = \phi & \text{в } D; \\ {}^tC_j^*P\psi = \psi_j & \text{на } \partial D \ (0 \le j \le p-1). \end{cases}$$

Уравнение $P^*P\psi = \phi$ в D понимается в смысле распределений, а граничные значения — в вариационном смысле:

$$\int\limits_D (\phi, v)_x \, dx - \int\limits_{\partial D} \sum_{j=0}^{p-1} (\psi_j, B_j v)_y \, ds(y) = \int\limits_D (P\psi, Pv)_y \, dy \quad \text{для всех } v \in C^\infty(E_{|\overline{D}}). \tag{5.1}$$

Предложение 5.2. *Пусть* $\phi = 0$ *и* $\psi_j = 0$ *для всех* $0 \le j \le p-1$. *Тогда* $\psi \in H^p(E_{|D})$ *является решением задачи* 5.1 *в том и только том случае, когда* $\psi \in S_P^p(D)$.

Доказательство. Очевидно, что $\psi \in S_P^p(D)$ — решение задачи 5.1 для $\phi = 0$ и $\psi_j = 0$ $(0 \le j \le p-1)$. Обратно, если ψ — решение задачи 5.1 для $\phi = 0$ и $\psi_j = 0$ $(0 \le j \le p-1)$, то $T_D P\psi = 0$. Значит, $\psi = (M+K_D)\psi = \lim\limits_{\nu\to\infty}(M+K_D)^\nu\psi$, т. е. $\psi \in S_P^p(D)$ (см. следствие 3.6). $\square$

Оператор P^*P эллиптичен, его коэффициенты бесконечно дифференцируемы, и символы граничных операторов $({}^tC_j^*)$ имеют максимальные ранги на ко-нормальных векторах к ∂D. Но поскольку пространство $S_P^p(D)$ может быть бесконечномерным, из предложения 5.2 вытекает, что задача 5.1 может быть некорректной.

Положим

$$\widetilde{T}_D(\oplus\psi_j)(x) = \int\limits_{\partial D} \sum_{j=0}^{p-1} {}^t({}^tB_j^*(y)\Phi(x,y))\psi_j(y)\, ds(y),$$

$$V(\phi)(x) = \int\limits_D {}^t(\Phi(x,y))\phi(y)\, dy.$$

Теорема 5.3. *Задача* 5.1 *разрешима в том и только том случае, когда*

(1) *справедливо равенство*

$$\int\limits_D (\phi, v)_x \, dx - \int\limits_{\partial D} \sum_{j=0}^{p-1} (\psi_j, B_j v)_y \, ds(y) = 0$$

для всех $v \in S_P^p(D)$;

(2) *ряд*

$$r(\phi, \oplus\psi_j) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (M+K_D)^\mu (V(\phi) - \widetilde{T}_D(\oplus\psi_j))$$

сходится в пространстве $H^p(E_{|D})$.

Если выполнены условия (1), (2), *то ряд* $r(\phi, \oplus\psi_j)$ *является решением задачи* 5.1.

Доказательство. Пусть задача 5.1 разрешима, а $\psi \in H^p(E_{|D})$ — одно из ее решений. Тогда $V(\phi) - \widetilde{T}_D(\oplus\psi_j) = T_D P\psi$ и из следствия 3.6 вытекает, что ряд $RP\psi = r(\phi \oplus \psi_j)$ сходится в $H^p(E_{|D})$.

Обратно, пусть выполнены условия (1) и (2). Докажем, что ряд $r(\phi, \oplus\psi_h)$ удовлетворяет (5.1). Заметим, что

$$T_D P r(\phi, \oplus\psi_j) = (I - (M + K_D)) r(\phi, \oplus\psi_j) = V(\phi) - \widetilde{T}_D(\oplus\psi_j). \tag{5.2}$$

Используя (2.3), легко понять, что для всех $v \in C^\infty(E_{|D})$ и $x \in D$ имеем

$$v(x) = \int\limits_D {}^t(\Phi(x,y)) P^* P v(y)\, dy + (K_D v)(x) - \int\limits_{\partial D} G_{P^*P}(\Phi(x,y), v(y)).$$

Тогда из теоремы Фубини и (5.2) следует, что

$$\int\limits_D (Pr(\phi, \oplus\psi_j, Pv)_x\, dx$$
$$= \int\limits_D (T_D P r(\phi, \oplus\psi_j), P^* P v)_y\, dy - \int\limits_{\partial D} G_{P^*P}(T_D P r(\phi, \oplus\psi_j), v(y))$$
$$= \int\limits_D (V(\phi) - \widetilde{T}_D(\oplus\psi_j), P^* P v)_y\, dy - \int\limits_{\partial D} G_{P^*P}(V(\phi) - \widetilde{T}_D(\oplus\psi_j), v(y))$$
$$= \int\limits_D (\phi, v - K_D v)_x\, dx - \int\limits_{\partial D} \sum_{j=0}^{p-1} (\psi_j, B_j(v - K_D v))_x\, dx.$$

Наконец, поскольку $K_D v \in S_P^p(D)$, условие (1) означает, что выполняется (5.1). Теорема 5.3 доказана. $\square$

Конечно, если для задачи 5.1 выполнены условия Шапиро — Лопатинского, то ряд $r(\phi, \oplus\psi_j)$ сходится для всех данных ϕ и ψ_j.

В ситуации, рассмотренной в примере 2.2, подобная теорема доказана в [5].

6. Примеры

Пусть P — однородный $(l \times k)$-оператор с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с инъективным символом порядка $p \geq 1$. Тогда P^*P имеет стандартное фундаментальное решение сверточного типа (см. [7, с. 74]). Для $n > 2p$ мы получаем разложение Ходжа в $L^2(\mathbb{R}^n)$ с $K = 0$ и Φ, равным нулю «в бесконечности» (см. [7, с. 74]). В этом случае $S(u)$ — решение внешней задачи Дирихле для P^*P и D, равное нулю «в бесконечности». Используя разложение в «ряд Лорана» для решений эллиптических систем (см. [7, теорема 7.25]), заключаем, что $PS(u) \in [L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{D})]^l$, а

$$h_D(u, v) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (PU(v))^*(x)(PU(u))(x)\, dx \quad \text{на } [H^p(D)]^k.$$

Таким образом, эта ситуация соответствует компактификации $\mathbb{R}^n$ с одной бесконечно удаленной точкой.

Пример 6.1. Пусть P — оператор градиента в $\mathbb{R}^n$. Тогда $(-P^*P)$ — обычный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $\Phi = \phi_n$ — стандартное фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Комплекс совместности для P — это комплекс де Рама, а задача 5.1 — классическая задача Неймана. Хорошо известно, что она является фредгольмовой.

Пример 6.2. Пусть P — система Коши — Римана в $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$). Тогда $(-4P^*P)$ есть оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{2n}$. Комплекс совместности для P — это комплекс Дольбо, а задача 5.1 — $\bar{\partial}$-задача Неймана (см., например, [3]). Хорошо известно, что это некорректная задача.

Пример 6.3. Пусть ∂_j означает $\frac{\partial}{\partial x_j}$. Рассмотрим систему P в $\mathbb{R}^3$:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2\mu}\partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2\mu}\partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\mu}\partial_3 \\ \sqrt{\lambda}\partial_1 & \sqrt{\lambda}\partial_2 & \sqrt{\lambda}\partial_3 \\ \sqrt{\mu}\partial_2 & \sqrt{\mu}\partial_1 & 0 \\ \sqrt{\mu}\partial_3 & 0 & \sqrt{2\mu}\partial_1 \\ 0 & \sqrt{2\mu}\partial_3 & \sqrt{2\mu}\partial_2 \end{pmatrix},$$

где $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$. Тогда $(-P^*P)$ — оператор Ламе

$$\mathscr{L} = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div}$$

в $\mathbb{R}^3$ с постоянными Ламе μ, λ, а $\Phi(x-y)$ — матрица Кельвина — Сомильяна $(\Phi^{(i,j)})_{i,j=1,2,3}$ с компонентами

$$\Phi^{(i,j)} = \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \left(\delta_{ij}(\lambda + 3\mu)\phi_n(x-y) - (\lambda + \mu)x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\phi_n(x-y) \right)$$

(здесь δ_{ij} — символ Кронекера).

В этом случае $S_P(D)$ состоит из (не всех!) многочленов первой степени. Оператор совместности P^1 для P дается в виде

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} & -\sqrt{2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{2,2} & \partial_{1,1} & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{1,2} & 0 & 0 \\ \partial_{3,3} & 0 & \partial_{1,1} & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{1,3} & 0 \\ 0 & \partial_{3,3} & \partial_{2,2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{2,3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\partial_{1,2} & 0 & -\partial_{3,3} & \partial_{2,3} & \partial_{1,3} \\ 0 & -\sqrt{2}\partial_{1,3} & 0 & 0 & \partial_{2,3} & -\partial_{2,2} & \partial_{1,2} \\ -\sqrt{2}\partial_{3,2} & 0 & 0 & 0 & \partial_{1,3} & \partial_{1,2} & -\partial_{1,1} \end{pmatrix},$$

где $\partial_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$.

В линейной теории упругости уравнение $Pu = f$ можно интерпретировать следующим образом: по заданным компонентам деформации f изотропного упругого тела D найти компоненты смещения $u(x)$ для всех точек $x \in D$. Простые вычисления показывают, что для всех $f \in [L^2(D)]^7$, удовлетворяющих условиям совместности в выпуклой области D, существует решение уравнения $Pu = f$ в $[H^1(D)]^3$.

Граничный оператор

$${}^tC_0^*P = \tau = (\tau^{(i,j)})_{i,j=1,2,3}$$

— это оператор напряжения с компонентами

$$\tau^{(i,j)} = \left(\delta_{ij}\mu\frac{\partial}{\partial n} + \lambda n_i(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

где $n_j(x)$ — j-я компонента внешней нормали $n(x)$ к ∂D в точке x, $\frac{\partial}{\partial n}$ — нормальная производная относительно ∂D.

В линейной теории упругости задачу 5.1 можно интерпретировать следующим образом: по заданным компонентам вектора напряжения ψ_0 на границе изотропного упругого тела D, находящегося под действием силы ϕ, найти компоненты смещения $u(x)$ для всех точек $x \in D$. Хорошо известно, что эта задача является фредгольмовой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарханов Н. Н.* Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов. Новосибирск: Наука, 1990.

2. *Романов А. В.* Сходимость итераций интеграла Мартинелли — Бохнера и система Коши — Римана // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 4. С. 780–783.

3. *Кытманов А. М.* Интеграл Мартинелли — Бохнера и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.

4. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems. Berlin: Akademie-Verl., 1982.

5. *Nacinovich M., Shlapunov A. A* On iterations of the Green integrals and their applications to elliptic differential complexes // Math. Nachr. 1996. V. 180. P. 243–286.

6. *Лаврентьев М. М, Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980.

7. *Тарханов Н. Н.* Ряд Лорана для решений эллиптических систем. Новосибирск: Наука, 1991.

8. *Hörmander L.* L^2-estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator // Acta Math. 1965. V. 113, N 1–2. P. 89–152.

Статья поступила 21 апреля 2000 г., окончательный вариант — 27 ноября 2000 г.

Шлапунов Александр Анатольевич
Красноярский гос. университет, математический факультет
просп. Свободный, 79, Красноярск 660041
`shlapuno@math.kgu.krasnoyarsk.su;   shlapuno@lan.krasu.ru`