Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 515.17:517.545

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЕ ПРИМА И РАССЛОЕНИЕ ГАННИНГА НАД ПРОСТРАНСТВОМ ТЕЙХМЮЛЛЕРА

В. В. Чуешев

Аннотация: Вводятся и изучаются векторное расслоение Прима P из голоморфных дифференциалов Прима и когомологическое расслоение Ганнинга G над пространством Тейхмюллера компактных римановых поверхностей рода $g \geq 2$ и над пространством Торелли рода $g \geq 2$. Строится базис из голоморфных дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности, голоморфно зависящий от модулей компактной римановой поверхности и от существенных характеров. Из этих расслоений составляется точная последовательность голоморфных векторных расслоений над произведением пространства Тейхмюллера рода g и специальной области в комплексном многообразии $\mathbb{C}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$. Библиогр. 13.

Введение

Периоды многозначных голоморфных дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$ являются важными трансцендентными инвариантами римановой поверхности. Мультипликативные функции и дифференциалы Прима появились еще в прошлом веке в работах Ф. Прима [1], П. Аппеля [2] и других авторов. Однако до сих пор они остаются малоизученными объектами, хотя частные классы таких функций и дифференциалов нашли применение в ряде областей математики: в аналитической теории чисел, при алгеброгеометрическом интегрировании нелинейных уравнений математической физики и в теории аналитических линейных расслоений над компактными римановыми поверхностями. Кроме того, как правило, изучение проводилось при фиксированной римановой поверхности. В данной работе эти объекты рассматриваются для переменной римановой поверхности.

В работах [3, 4] дано описание когомологического расслоения Ганнинга, связанного с классами периодов мультипликативных голоморфных дифференциалов Прима, ассоциированных с любыми нетривиальными характерами (одномерными представлениями фундаментальной группы поверхности в $\mathbb{C}^*$) для фиксированной компактной римановой поверхности рода $g = 2$ и $g \geq 2$ соответственно.

В данной работе вводятся и изучаются векторное расслоение Прима P из голоморфных дифференциалов Прима и когомологическое расслоение Ганнинга G над пространством Тейхмюллера компактных римановых поверхностей рода $g \geq 2$ и над пространством Торелли рода $g \geq 2$. Строится базис из голоморфных дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности, голоморфно зависящий от модулей компактной римановой поверхности и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 98–01–00699, 99–01–00630) и гранта Сибирского отделения РАН.

от существенных характеров. Из этих расслоений составляется точная последовательность голоморфных векторных расслоений над произведением пространства Тейхмюллера рода g и специальной области в комплексном многообразии $\mathbb{C}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$.

1. Предварительные сведения

1. Пространство Тейхмюллера. Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$ с отмечанием $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^g$, т. е. набором образующих для $\pi_1(F)$; F_0 — фиксированная комплексно-аналитическая структура (или класс конформно эквивалентных гладких метрик класса C^∞) на F. По теореме униформизации существует конечнопорожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0, Γ изоморфна $\pi_1(F)$, и имеющая представление

$$\Gamma = \left\langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g : \prod_{j=1}^g C_j = \mathbf{1} \right\rangle,$$

где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}$, $j = 1, \dots, g$, и $\mathbf{1}$ — тождественное отображение плоскости $\mathbb{C}$ на себя, причем сопряжением группы Γ мёбиусовыми преобразованиями можно получить, что $z = -1$ и $z = 1$ — отталкивающая и притягивающая неподвижные точки для A_1, а $z = i$ — отталкивающая неподвижная точка для B_1 [5]. Здесь на U задана метрика Пуанкаре $ds = |dz|/(1 - |z|^2)$, $|z| < 1$, которая превращает U в модель геометрии Лобачевского, а A_j, B_j — мёбиусовы отображения круга U на себя, являющиеся изометриями в этой геометрии.

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\bar{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$ [6]. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0. Пусть $M(F)$ — множество всех комплексно-аналитических структур на F с обычной топологией C^∞ сходимости на F_0, $\mathrm{Diff}^+(F)$ — группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, $\mathrm{Diff}_0(F)$ — нормальная подгруппа в $\mathrm{Diff}^+(F)$, состоящая из всех диффеоморфизмов, гомотопных тождественному диффеоморфизму id на F. Группа $\mathrm{Diff}^+(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in \mathrm{Diff}^+(F)$, $\mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_g(F) = \mathbb{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/\mathrm{Diff}_0(F)$, а пространство Римана $\mathbb{R}_g(F)$ — фактор-пространство $M(F)/\mathrm{Diff}^+(F)$. Фактор-группа $\mathrm{Diff}^+(F)/\mathrm{Diff}_0(F) = \mathrm{Mod}\ \mathbb{T}_g$ называется *модулярной группой Тейхмюллера рода g*.

Так как $\pi : U \to F_0 = U/\Gamma$ — локальный диффеоморфизм, любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до Γ-дифференциала Бельтрами μ на U, т. е. $\mu \in L^\infty(U)$, $\|\mu\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{z \in U} |\mu(z)| < 1$, и

$$\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z), \quad z \in U, \ T \in \Gamma.$$

Если Γ-дифференциал μ на U продолжить по симметрии на $U^* = \mathbb{C} \setminus \overline{U}$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w_\mu : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, оставляющий неподвижными точки $\pm 1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu(z) w_z$. Тогда отображение $T \to T_\mu = w_\mu T w_\mu^{-1}$, $T \in \Gamma$, задает [5] изоморфизм фуксовой группы Γ на фуксову группу

$$\Gamma_\mu = w_\mu \Gamma w_\mu^{-1} = \left\langle A_{1\mu}, \ldots, B_{g\mu} : \prod_{j=1}^{g} [A_{j\mu}, B_{j\mu}] = \mathbf{1} \right\rangle.$$

Если Γ-дифференциал μ на U продолжить, положив $\mu = 0$ на U^*, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$ и отображение $T \to T^\mu = w^\mu T (w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу

$$\Gamma^\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1} = \left\langle A_1^\mu, \ldots, B_g^\mu : \prod_{j=1}^{g} [A_j^\mu, B_j^\mu] = \mathbf{1} \right\rangle.$$

Отображение w^μ конформно на U^*, и его производная Шварца $[w^\mu]$ принадлежит банахову пространству $B_2(U^*, \Gamma)$, состоящему из голоморфных функций $\varphi(z)$ на U^* таких, что $\varphi(T(z)) T'(z)^2 = \varphi(z)$, $z \in U^*$, $T \in \Gamma$, с нормой $\|\varphi\| = \sup\limits_{z \in U^*} \{|\varphi(z)|(1 - |z|^2)^2\} < \infty$.

Два Γ-дифференциала Бельтрами μ и ν называются *конформно эквивалентными*, если существует конформное отображение $h : F_\mu \to F_\nu$, гомотопное id на F. Класс $[\mu]$ конформно эквивалентных Γ-дифференциалов соответствует точно одной точке $[F_\mu] \in \mathbb{T}_g(F)$. Вложение Берса для $\mathbb{T}_g(F)$, задаваемое отображением $[\mu](= [F_\mu]) \to [w^\mu]$, является инъекцией из $\mathbb{T}_g(F)$ на стягиваемую ограниченную область в $B_2(U^*, \Gamma)$. Оно задает глобальную комплексно-аналитическую структуру на $\mathbb{T}_g(F)$, индуцированную из $B_2(U^*, \Gamma)$ [5, 6].

Классические результаты Л. Альфорса, Л. Берса и других авторов утверждают, что

1) $\mathbb{T}_g(F)$ является комплексным многообразием размерности $3g - 3$ при $g \geq 2$;

2) $\mathbb{T}_g(F)$ снабжено единственной комплексно-аналитической структурой такой, что естественное отображение $\Phi : M(F) \to M(F)/\operatorname{Diff}_0(F) = \mathbb{T}_g(F)$ голоморфно и имеет только локальные голоморфные сечения;

3) $\mathbb{T}_g(F)$ реализуется как ограниченная область голоморфности в $B_2(U^*, \Gamma)$;

4) группа $\operatorname{Mod} \mathbb{T}_g$ действует разрывно на $\mathbb{T}_g(F)$ как группа биголоморфных автоморфизмов и $\mathbb{R}_g(F) = \mathbb{T}_g(F)/\operatorname{Mod} \mathbb{T}_g$;

5) элементы из Γ^μ голоморфно зависят от $[\mu]$, а элементы из Γ_μ вещественно-аналитически зависят от $[\mu]$ на $\mathbb{T}_g(F)$;

Два Γ-дифференциала Бельтрами μ и ν будут конформно эквивалентными, если и только если $w^\mu T (w^\mu)^{-1} = w^\nu T (w^\nu)^{-1}$, $T \in \Gamma$. Отсюда получаем отождествления $M(F)/\operatorname{Diff}_0(F) = \mathbb{T}_g(F) = \mathbb{T}_g(\Gamma)$, положив $[\mu] = [F_\mu] = \Gamma^\mu$.

Элемент $[F_\mu] \in \mathbb{T}_g(F)$ можно также задать как класс $[(F_\mu; \Sigma)]$ конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей $(F_\mu; \Sigma)$, где Σ — упорядоченный набор гомотопических классов

$$[\alpha_1], [\beta_1], \ldots, [\alpha_g], [\beta_g]$$

ориентированных петель $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$, выходящих из фиксированной точки $O \in F$ и задающих каноническое рассечение на F. При этом $(F_{\mu_1}; \Sigma_1)$ называется *конформно эквивалентной* $(F_{\mu_2}; \Sigma_2)$, если существует конформное отображение $h : F_{\mu_1} \to F_{\mu_2}$ и образ упорядоченного набора петель из Σ_1 по h будет свободно гомотопен упорядоченному набору петель из Σ_2 на F. Заметим, что каждый такой набор Σ задает систему образующих в группе

$$\pi_1(F,O)=\left\langle [\alpha_1],[\beta_1],\dots,[\alpha_g],[\beta_g]:\prod_{j=1}^{g}[\alpha_j][\beta_j][\alpha_j]^{-1}[\beta_j]^{-1}=1\right\rangle.$$

Естественно, выбор Σ на F эквивалентен выбору системы образующих в $\pi_1(F_\mu)$, и $\{A_{j\mu},B_{j\mu}\}_{j=1}^{g}$ в Γ_μ и $\left\{A_j^\mu,B_j^\mu\right\}_{j=1}^{g}$ в Γ^μ для любого μ. Более детальное описание этих вопросов можно найти, например, в [5, 6].

2. Векторное расслоение Прима и когомологическое расслоение Ганнинга. Зафиксируем некоторое отмечание Σ на F, ему соответствует выбор образующих $A_1,B_1,\dots,A_g,B_g$ в Γ. Обозначим через $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ группу всех 1-мерных представлений Γ в $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash 0$. Тогда $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ биголоморфно изоморфна $\mathbb{C}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$, где $\mathbb{Z}^{2g}$ — целочисленная решетка в $\mathbb{C}^{2g}$, и является $2g$-мерной комплексной группой Ли. Действительно, отображение $\varphi:\mathbb{C}^{2g}\to\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ — сюръективный голоморфный гомоморфизм с ядром $\mathbb{Z}^{2g}$. Оно задается по правилу: точке $(x_1,\dots,x_g;y_1,\dots,y_g)\in\mathbb{C}^{2g}$ сопоставляется представление $\rho=\rho_{x,y}\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ такое, что

$$\rho(A_j)=\exp 2\pi i x_j,\quad \rho(B_j)=\exp 2\pi i y_j,\quad j=1,\dots,g.$$

Характер ρ называется *несущественным*, если $\rho=\rho_{x,y}$, где $y=\Omega x$, $x\in\mathbb{C}^g$, $\Omega=(\pi_{jk})$ — матрица порядка g, состоящая из B-периодов для канонического базиса абелевых дифференциалов $\zeta_1,\dots,\zeta_g$ первого рода, дуального к каноническому базису $[\alpha_1],\dots,[\alpha_g],[\beta_1],\dots,[\beta_g]$ на F_0. Множество несущественных характеров обозначим через L_g. Дополнение $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash L_g$ состоит из так называемых существенных характеров.

Пусть $L(I,\Omega(\mu))$ — решетка периодов для отмеченной компактной римановой поверхности $\left(F_\mu,\{\alpha_j(\mu),\beta_j(\mu)\}_{j=1}^{g}\right)$ с каноническим базисом абелевых дифференциалов $\zeta_1(\mu),\dots,\zeta_g(\mu)$ первого рода, который голоморфно зависит от $[\mu]\in\mathbb{T}_g(F)$, где $\alpha_j(\mu)$, $\beta_j(\mu)$ определяются по A_j^μ, B_j^μ, $j=1,\dots,g$. Она голоморфно зависит от $[\mu]$. Тогда $J(F_\mu)=\mathbb{C}^g/L(I,\Omega(\mu))$ — отмеченное многообразие Якоби для F_μ и определено голоморфное семейство Jac_g компактных комплексных многообразий с базой $\mathbb{T}_g(F)$ и слоем $J(F_\mu)$ над $[\mu]\in\mathbb{T}_g(F)$ с проекцией $\pi_{J,\mu}(z)=z \bmod L(I,\Omega(\mu))$, $z\in\mathbb{C}^g$ [7].

Голоморфным (многозначным) *ρ-дифференциалом Прима* на F_0 называется голоморфная дифференциальная 1-форма $\phi=\phi(z)dz$ на U такая, что

$$\phi(Tz)\,dTz=\rho(T)\phi(z)\,dz,\quad T\in\Gamma,\ z\in U. \tag{1}$$

По теореме монодромии имеем $\phi(z)\,dz=df(z)$ для голоморфной функции (интеграла Прима) $f(z)$ на U, которая определяется с точностью до комплексного постоянного слагаемого, связанного с выбором точки $z_0\in U$. Из (1) следует, что $f(Tz)=\rho(T)f(z)+\phi(T)$, где $\phi(T)=f(Tz_0)-f(z_0)\rho(T)$. Отображение периодов $\phi:\Gamma\to\mathbb{C}$ для ρ-дифференциала Прима $\phi=\phi(z)\,dz$ удовлетворяет условию

$$\phi(ST)=\phi(S)+\rho(S)\phi(T),\quad S,T\in\Gamma. \tag{2}$$

Для $\rho\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash L_g$, где L_g — g-мерная комплексная подгруппа Ли [3], обозначим через $\Gamma(F_0,O^{1,0}(\rho))$ векторное пространство голоморфных ρ-дифференциалов Прима на F_0 и через $P(F_0)=\bigcup\limits_{\rho\notin L_g}\Gamma(F_0,O^{1,0}(\rho))$ — расслоение Прима для фиксированной поверхности F_0. Известно, что это комплексное голоморфное векторное расслоение ранга $g-1$ над $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash L_g$ [3]. При $\rho=1$

$(\rho(T) = 1, T \in \Gamma)$ пространство $\Gamma(F_0, O^{1,0}(1))$ будет g-мерным комплексным пространством абелевых голоморфных дифференциалов на F_0.

Для $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash 1$ обозначим через $Z^1(\Gamma,\rho)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию (2). Любой элемент $\phi \in Z^1(\Gamma,\rho)$ задается набором чисел $\phi(A_1), \dots, \phi(A_g), \phi(B_1), \dots, \phi(B_g)$ с условием

$$\sum_{j=1}^{g}[\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)] = 0, \tag{3}$$

которое является следствием соотношения $\prod\limits_{j=1}^{g} C_j = 1$ в Γ, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma$. В комплексном векторном пространстве $Z^1(\Gamma,\rho)$ размерности $2g-1$ при $\rho \neq 1$ возьмем векторное подпространство $B^1(\Gamma,\rho)$, порожденное элементом σ. Тогда $H^1(\Gamma,\rho) = Z^1(\Gamma,\rho)/B^1(\Gamma,\rho)$ — комплексное векторное пространство размерности $2g-2$ при $\rho \neq 1$. Когомологическое расслоение Ганнинга для F_0 есть $G(F_0) = \bigcup\limits_{\rho\neq 1} H^1(\Gamma,\rho)$. Это комплексное голоморфное векторное расслоение ранга $2g-2$ над $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash 1$ [3, 4].

Заметим, что при $\rho \notin L_g$ отображение периодов $\phi : \Gamma \to \mathbb{C}$ для ρ-дифференциала Прима $\phi(z)\,dz$ задает линейное инъективное отображение $p : \phi(z)\,dz \to [\phi] \in H^1(\Gamma,\rho)$, где $[\phi]$ — класс периодов для $\phi(z)\,dz$, и $p : P(F_0) \to G(F_0)$ будет голоморфным отображением векторных расслоений над $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_g$ [3, 4].

2. Базис голоморфных дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности

Пусть $\phi = \phi(z)\,dz$ — голоморфный ρ-дифференциал Прима на отмеченной компактной римановой поверхности $\big(F_0, \{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^{g}\big)$ рода $g \geq 2$ с существенным характером ρ, который задается мультипликаторами $m_k = \rho([\alpha_k]) = \rho(A_k)$, $n_k = \rho([\beta_k]) = \rho(B_k)$, $k = 1, \dots, g$ [2, 3]. Возьмем $\omega = \omega(z)\,dz$ — абелев дифференциал первого рода на F_0 с простыми нулями $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2g-2}$. Если ω_0 — голоморфный абелев дифференциал на F_0 с модулями $[\mu_0]$, то он имеет с учетом кратности всего $2g-2$ нулей. Если его нули кратные, то существует ω, близкий к ω_0 (см. [8, с. 98]) голоморфный абелев дифференциал на F_0 с простыми нулями $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2g-2}$. При этом $\omega = \sum\limits_{j=1}^{g} a_j\zeta_j$, где $\zeta_1, \dots, \zeta_g$ — база голоморфных нормированных дифференциалов на F_0, которую по теореме Берса [9] можно выбрать глобально голоморфно зависящей от $[\mu]$, где a_j, $j = 1, \dots, g$, — постоянные комплексные числа. Если для $[\mu_0]$ нули простые, то и для окрестности $U([\mu_0])$ голоморфный на F_μ дифференциал ω тоже будет иметь простые нули $Q_1[\mu], \dots, Q_{2g-2}[\mu]$. Тогда отношение $f = \phi(z)\,dz/\omega(z)\,dz$ будет мультипликативной функцией с характером ρ и с простыми полюсами в $Q_1, \dots, Q_{2g-2}$, из которых $g-2$ можно выбирать произвольно, а остальные g находятся из известного соотношения [8, с. 318]

$$\sum_{j=1}^{2g-2} \varphi_k(Q_j) = -2K_k, \quad k = 1, \dots, g,$$

или $\varphi(Q_1 \dots Q_{2g-2}) = -2K$ через решение проблемы обращения Якоби, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_g)$ — отображение Якоби, голоморфно зависящее от $[\mu]$, из любого симметрического пространства $(F_0)_n$ $(n \geq 1)$ в многообразие Якоби $J(F_0)$

для поверхности F_0, $\varphi_k = \int\limits_{P_0}^{P} \zeta_k$, и $K = (K_1, \dots, K_g)$ — вектор констант Римана [8], зависящий голоморфно от точки P_0 и от $[\mu]$. Функция f также имеет (с учетом кратности) $2g-2$ нулей $P_1, \dots, P_{2g-2}$, так как $\deg(f) = 0$, где $(f) = P_1 \dots P_{2g-2}/Q_1 \dots Q_{2g-2} = \widetilde{D}$. П. Аппель показал в [2] (см. также [8]), что ветвь такой функции имеет вид

$$f(P) = f(Q_0) \exp\left[\sum_{j=1}^{2g-2} \int\limits_{Q_0}^{P} (\tau_{P_j P_0} - \tau_{Q_j P_0}) + \sum_{k=1}^{g} \int\limits_{Q_0}^{P} \zeta_k \log \rho(A_k)\right]$$

на $F_0' = F_0 \backslash \{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^{g}$ (или на каноническом многоугольнике Δ для группы Γ), где $Q_0 \neq P_0$, $Q_0 \notin \widetilde{D}$, τ_{PQ} — нормированный абелев дифференциал третьего рода на F_0 с простыми полюсами P и Q и вычетами $+1$ и -1 в них соответственно, голоморфно зависящий от $[\mu]$ [10; 11, с. 325] и от P, Q [8].

По теореме Абеля [8] для характеров ее нули и полюсы удовлетворяют системе из g уравнений:

$$(\varphi(\widetilde{D}))_k = \sum_{j=1}^{2g-2} [\varphi_k(P_j) - \varphi_k(Q_j)] = \frac{1}{2\pi i} \log \rho(B_k) - \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{j=1}^{g} \pi_{jk} \log \rho(A_j)\right],$$

$k = 1, \dots, g$, в $J(F_0)$. Эта система эквивалентна системе

$$\sum_{j=1}^{2g-2} \varphi_k(P_j) = -2K_k + \left[\frac{1}{2\pi i} \log n_k - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \pi_{jk} \log m_j\right], \quad k = 1, \dots, g. \tag{4}$$

Здесь $\Omega = (\pi_{jk})$ — матрица порядка g из B-периодов на F_0, голоморфно зависящая от $[\mu]$ [5, 7].

Таким образом, из $2g-2$ нулей $P_1, \dots, P_{2g-2}$ для f можно выбрать $g-2$ нуля произвольно, например попарно различные $P_{g+1}, \dots, P_{2g-2}$, которые образуют постоянное сечение для расслоенного пространства $\pi_{g-2} : S_T^{g-2}(V_g) \longrightarrow \mathbb{T}_g(F)$, чей слой над $[\mu] \in \mathbb{T}_g(F)$ есть пространство всех положительных дивизоров степени $(g-2)$ на компактной римановой поверхности F_μ с модулями $[\mu]$ над некоторой окрестностью $U([\mu_0])$ [7]. Остальные g нулей $P_1, \dots, P_g$ должны получаться как решение проблемы обращения Якоби для системы (4). Поэтому общая мультипликативная функция f зависит от $g-1$ произвольных констант, а именно $g-2$ нулей $P_{g+1}, \dots, P_{2g-2}$ и мультипликативной константы $f(Q_0) = C \neq 0$. Однако необходимо гарантировать однозначную разрешимость этой задачи обращения Якоби при некотором специальном выборе целого дивизора $P_{g+1} \dots P_{2g-2}$ степени $g-2$, т. е. однозначную разрешимость системы

$$\sum_{j=1}^{g} \varphi_k(P_j) = -2K_k + \left[\frac{1}{2\pi i} \log n_k - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \pi_{jk} \log m_j\right] - \sum_{j=g+1}^{2g-2} \varphi_k(P_j), \tag{5}$$

$k = 1, \dots, g$. Так как характер ρ существенный, то выражение в квадратных скобках (обозначим его $X = (X_1, \dots, X_g)$) не равно 0 в $J(F_0)$ (по теореме Абеля), и задача Якоби для системы (5) однозначно разрешима. Действительно, используя обозначения из [8], предположим, что правая сторона в (5) принадлежит особому множеству W_g^1 $(\subset W_{g-1} = \varphi((F_0)_{g-1}))$ при любом выборе дивизора $P_{g+1} \dots P_{2g-2}$, т. е. проблема Якоби разрешима, но не однозначно. Тогда правая сторона в (5) пробегает комплексное $(g-2)$-мерное (при $g \geq 3$) подмножество в $J(F_0)$, а W_g^1 имеет комплексную размерность строго меньше $g-2$ в $J(F_0)$ при условии, что F_0 — не гиперэллиптическая поверхность [8]. Таким образом, для $g \geq 3$ и F_0 — не гиперэллиптическая поверхность; противоречие. Рассмотрим общий случай. Из [8] имеем, что условие $u \in W_g^1$ эквивалентно условию $-(W_1 - u) \subset W_{g-1}$. Обозначая правую часть в (5) через u, получим $-(\varphi(P) - u) \subset W_{g-1}$ для любого $P \in F_0$. Отсюда имеем систему

$$-\left(\varphi_k(P) + 2K_k - X_k + \sum_{j=g+1}^{2g-2} \varphi_k(P_j)\right) = \sum_{j=1}^{g-1} \varphi_k(R_j), \quad k = 1, \dots, g,$$

или эквивалентную систему

$$-2K + X = \sum_{j=g+1}^{2g-2} \varphi(P_j) + \varphi(P) + \sum_{j=1}^{g-1} \varphi(R_j),$$

где $R_1, \dots, R_g$ — некоторые точки на F_0. Рассмотрим целый дивизор $D = P_{g+1} \dots P_{2g-2} P R_1 \dots R_{g-1}$ степени $2g-2$. Он содержит $g-1$ свободных (первых) точек, а значит, его индекс специальности $i(D)$ удовлетворяет неравенству $i(D) \geq g + g - 1 - (2g-2) = 1 > 0$. Отсюда $\varphi(D) = -2K$, так как D является дивизором некоторого голоморфного абелева дифференциала. Поэтому $-2K + X = -2K$ и $X = 0$ в $J(F_0)$. Следовательно, ρ — несущественный характер; противоречие.

Для $g = 2$ по $Q_1[\mu_0], Q_2[\mu_0]$ найдем $P_1([\mu_0], \rho)$, $P_2([\mu_0], \rho)$ так, что система (5) однозначно разрешима, и построим $f_1 \neq 0$. Тогда $f_1(z)\omega(z)\,dz$ будет базисом для 1-мерного комплексного векторного пространства голоморфных ρ-дифференциалов Прима с существенным характером ρ на F_0, локально голоморфно зависящим от $[\mu]$ и ρ, так как решение $P_1([\mu], \rho), P_2([\mu], \rho)$ проблемы обращения Якоби (5) голоморфно зависит от $[\mu]$ и ρ.

Для $g \geq 3$, выбрав попарно различные целые дивизоры $P_{g+1} \dots P_{2g-2}$ степени $g-2$ (как нули для f) так, что задача обращения Якоби для (5) имеет однозначное решение, получим бесконечное число функций таких, как f, с заданным существенным характером ρ и с заданными фиксированными простыми полюсами $Q_1, \dots, Q_{2g-2}$ на F_0. Если выберем $g-1$ линейно независимых над $\mathbb{C}$ функций $f_1(z), \dots, f_{g-1}(z)$ (точнее, их ветвей) на Δ, то

$$f_1(z)\omega(z)\,dz, \dots, f_{g-1}(z)\omega(z)\,dz$$

будет базисом голоморфных ρ-дифференциалов Прима на F_0. Любые g функций такого вида будут линейно зависимы над $\mathbb{C}$. Действительно, если по $g-1$ попарно различным дивизорам степени $g-2$ выбраны функции $f_1, \dots, f_{g-1}$ и если f — любая другая функция, выбранная также по дивизору $D' = P_1' \dots P_{g-2}'$, отличному от выбранных ранее дивизоров, то $f = \tilde{c}_1 f_1 + \dots + \tilde{c}_{g-1} f_{g-1}$ на Δ. Сначала выберем ненулевое решение $c_1, \dots, c_{g-1}$ для системы уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 f_1(P_1') + \dots + c_{g-1} f_{g-1}(P_1') \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 &= c_1 f_1(P_{g-2}') + \dots + c_{g-1} f_{g-1}(P_{g-2}'). \end{aligned}$$

Таким образом, полюсы и характеры функций f и $c_1 f_1 + \dots + c_{g-1} f_{g-1}$ одинаковы. Если у этих функций совпали $g-2$ нулей, то совпадут все остальные (как однозначные решения проблемы обращения Якоби (5)). Следовательно, $cf = c_1 f_1 + \dots + c_{g-1} f_{g-1}$, $c \neq 0$, и $\tilde{c}_j = c_j / c$, $j = 1, \dots, g-1$.

Для $k = 2$ если f_1, f_2 выбраны по различным дивизорам D_1, D_2 ($D_1 \neq D_2$) соответственно из $\{M_{g-2} \times P_0^2\} \backslash M_g^1$, то f_1, f_2 будут линейно независимы над $\mathbb{C}$. Действительно, если $f_2 = cf_1$, $c \neq 0$, то нули совпадают и совпадают их дивизоры нулей
$$D_1' D_1 = D_2' D_2. \qquad (*)$$

По условию $D_1 \neq D_2$ поточечно (т. е. их носители не пересекаются), а $D_1' \neq D_2'$ ввиду взаимной однозначности φ на $M_g \backslash M_g^1$ (или вследствие однозначности решения проблемы обращения Якоби). Из соотношений $D_1 \neq D_2$ и $(*)$ получаем, что $D_1' \supset D_2$ и $D_2' \supset D_1$, т. е. $D_1' = D_2 D_3, D_2' = D_1 D_4$. Отсюда $D_2 D_3 D_1 = D_1 D_4 D_2$ и $D_3 = D_4$. Далее,
$$\begin{aligned} &-2K + X - \varphi\bigl(D_1 P_0^2\bigr) = \varphi(D_2 D_3) = \varphi(D_1') \\ &\qquad \neq \varphi(D_2') = \varphi(D_1 D_3) = -2K + X - \varphi\bigl(D_2 P_0^2\bigr). \end{aligned}$$

Рассмотрим целый дивизор нулей $D_1 D_2 D_3$ для f_2 и f_1 степени $g-2+g-2+2 = 2g-2$. Он имеет $2g-4 = s-1$ свободных точек в силу произвола в выборе D_1 и D_2 в M_{g-2}. Тогда по [8, с. 125] имеем
$$s \leq r\left(\frac{1}{D}\right) = \deg D + 1 - g + i(D),$$
или
$$i(D) \geq s - \deg D - 1 + g = 2g - 3 - 2g + 2 - 1 + g = g - 2 \geq 1 > 0$$
при $g \geq 3$, а мы как раз рассматриваем случай $g \geq 3$. Поэтому $D = D_1 D_2 D_3$ является дивизором голоморфного абелева дифференциала и $\varphi(D) = -2K$. Следовательно, $-2K = -2K + X$ и $X = 0$, что противоречит условию $X \neq 0$ так как ρ — существенный характер. Таким образом, f_1, f_2 линейно независимы над $\mathbb{C}$.

Для $k = 3$ пусть f_3 линейно независима с f_1 и f_2 отдельно и f_1, f_2 тоже линейно независимы, а f_3 выбрана по дивизору $D_3 = P_{13} \dots P_{g-2,3} \neq D_1, D_2$. Тогда при $f_3 = c_1 f_1 + c_2 f_2$, $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, составим систему линейных уравнений:
$$\begin{gathered} 0 = c_1 f_1(P_{13}) + c_2 f_2(P_{13}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = c_1 f_1(P_{g-2,3}) + c_2 f_2(P_{g-2,3}) \end{gathered}$$
из $g-2$ уравнений с двумя неизвестными c_1, c_2 ($g \geq 4$). Всегда можно выбрать дивизор $D_3 = P_{13} P_{23} \dots \neq D_1, D_2$ и $D_3 \notin W_g^1$ такой, что система имеет единственное решение $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Таким образом, для $g = 2$, $g = 3$ и $g = 4$ получили базис голоморфных дифференциалов Прима $f_1\omega; f_1\omega, f_2\omega$ и $f_1\omega, f_2\omega, f_3\omega$ соответственно, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ.

Если уже выбраны тем же способом линейно независимые функции $f_1, \dots, f_{k-1}$, то выберем f_k по дивизору $D_k = P_{1k} \dots P_{k-1,k} \dots P_{g-2,k} \notin W_g^1$, отличному от уже выбранных, так, что ранг матрицы $\bigl(f_j\bigl(P_l^k\bigr)\bigr)$, $j = 1, \dots, k-1$, $l = 1, \dots, g-2$, равен $k-1$. Получим систему линейно независимых функций $f_1, \dots, f_{k-1}, f_k$ на F_0. Продолжая для k от 4 до $g-1$, получим линейно независимые функции

$f_1, \dots f_{g-1}$ на F_0 и базис $f_1\omega, \dots, f_{g-1}\omega$ голоморфных дифференциалов Прима, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ.

Для $g \geq 3$ есть другой способ выбора базиса голоморфных дифференциалов Прима, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_{g-1}, \omega_g$ — базис голоморфных абелевых дифференциалов на F_0, голоморфно зависящий от $[\mu]$, $[\mu] \in U([\mu_0])$. Тогда $f_1\omega_1, \dots, f_{g-1}\omega_{g-1}, f_g\omega_g$ — набор голоморфных дифференциалов Прима на F_0, где дивизоры нулей $(f_j)_0 = \dots D_j$ выбраны так же, как в предыдущем способе, и D_j, $j = 1, \dots, g$, будут попарно различными на F_0. Так как любые g голоморфных дифференциалов Прима линейно зависимы над $\mathbb{C}$, то, отбрасывая один, получим $g-1$ линейно независимых голоморфных дифференциалов Прима на F_0. Действительно, если $f_1\omega_1 = c_2 f_2\omega_2$, то нули f_1 и f_2 совпадают и, как раньше для случая $k = 2$, получим противоречие. Если $c_1 f_1\omega_1 + \dots + c_{g-1} f_{g-1}\omega_{g-1} = 0$, то, например для $c_{g-1} \neq 0$, имеем

$$\omega_{g-1} = -\frac{1}{c_{g-1}} \sum_{j=1}^{g-2} c_j \frac{f_j\omega_j}{f_{g-1}}.$$

Отсюда дивизоры нулей для f_j совпадают с дивизором нулей для f_{g-1}, $j = 1, \dots, g-2$. Пришли к противоречию с выбором дивизоров D_j, $j = 1, \dots, g-1$, при $g \geq 3$. Следовательно, получен базис голоморфных дифференциалов Прима $f_1\omega_1, \dots, f_{g-1}\omega_{g-1}$ на F_0, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Для любых $g \geq 2$, $[\mu_0] \in \mathbb{T}_g(F_0)$, $\rho_0 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_g$ существуют односвязные окрестности*

$$U([\mu_0]) \subset \mathbb{T}_g(F_0), \quad U(\rho_0) \subset (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_g)$$

и голоморфные функции $f_j([\mu], \rho; z)$, $j = 1, \dots, g-1$, на $w^\mu(U)$, голоморфно зависящие от $[\mu] \in U([\mu_0])$, $\rho \in U(\rho_0)$, такие, что при фиксированных $[\mu]$ и ρ они задают базис $f_j([\mu], \rho; z)\, dz$, $j = 1, \dots, g-1$, в комплексном векторном пространстве ρ-дифференциалов Прима на отмеченной компактной римановой поверхности $w^\mu(U)/\Gamma^\mu$ рода g.

3. Расслоения Прима и Ганнинга над пространством Тейхмюллера

Пусть E — главное $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$-расслоение над $\mathbb{T}_g(F)$ со слоем $\mathrm{Hom}(\Gamma^\mu, \mathbb{C}^*)$ над точкой $[F_\mu] = \Gamma^\mu$.

Лемма 1. *Голоморфное главное* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$*-расслоение E биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению $\mathbb{T}_g(F) \times \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ над $\mathbb{T}_g(F)$.*

Доказательство. Глобальная тривиализация (карта) Θ сопоставляет паре $([F_\mu]; \rho_\mu) \in [F_\mu] \times \mathrm{Hom}(\Gamma^\mu, \mathbb{C}^*)$ упорядоченный набор

$$\big([F_\mu], \rho_\mu\big(A_1^\mu\big), \dots, \rho_\mu\big(A_g^\mu\big), \rho_\mu\big(B_1^\mu\big), \dots, \rho_\mu\big(B_g^\mu\big)\big) \in [F_\mu] \times [\mathbb{C}^*]^{2g}$$

для любого $[F_\mu] \in \mathbb{T}_g(F)$. Она задает биекцию из E на $\mathbb{T}_g(F) \times [\mathbb{C}^*]^{2g}$ и определяет на E глобальную комплексно-аналитическую структуру. Аналогично отображение $\Theta_0 : ([F_\mu]; \rho) \to ([F_\mu]; \rho(A_1), \dots, \rho(A_g), \rho(B_1), \dots, \rho(B_g))$ задает глобальную карту на $\mathbb{T}_g(F) \times \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$. Определим отображение Ψ по правилу $\Psi : ([F_\mu]; \rho_\mu) \to ([F_\mu]; \rho)$, где $\rho(A_j) = \rho_\mu\big(A_j^\mu\big)$, $\rho(B_j) = \rho_\mu\big(B_j^\mu\big)$, $j = 1, \dots, g$. Оно будет изоморфизмом из $\mathrm{Hom}(\Gamma^\mu, \mathbb{C}^*)$ на $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ при фиксированном $[F_\mu]$. В картах Θ и Θ_0 отображение Ψ имеет вид $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$, а значит, будет биголоморфным изоморфизмом из E на $\mathbb{T}_g(F) \times \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ над $\mathbb{T}_g(F)$. Лемма 1 доказана.

С помощью леммы 1 введем векторные расслоение Прима P над $\mathbb{T}_g(F) \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_g)$ со слоем $\Gamma([F_\mu], O^{1,0}(\rho_\mu))$ над точкой $([F_\mu]; \rho)$, где $\rho(A_j) = \rho_\mu(A_j^\mu)$, $\rho(B_j) = \rho_\mu(B_j^\mu)$, $j = 1, \dots, g$, и расслоение Ганнинга G над $\mathbb{T}_g(F) \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash 1)$ со слоем $H^1(\Gamma^\mu, \rho_\mu)$ над точкой $([F_\mu]; \rho)$.

На P зададим естественную эрмитову метрику по аналогии с классическим эрмитовым скалярным произведением на пространстве голоморфных абелевых дифференциалов. Известно, что не существует глобальных голоморфных сечений для естественного отображения $\Phi : M(F) \to \mathbb{T}_g(F)$ [13]. Однако как показал Эрл [13], существует семейство глобальных вещественно-аналитических сечений для Φ, параметризованное единичным диском на $\mathbb{C}$. Пусть $s : \mathbb{T}_g(F) \to M(F)$ — любое такое фиксированное глобальное вещественно-аналитическое сечение.

Для элементов $\phi_1 = \phi_1(z)\,dz$, $\phi_2 = \phi_2(z)\,dz \in \Gamma([F_\mu], O^{1,0}(\rho_\mu))$ их эрмитово скалярное произведение (в слое над $([F_\mu]; \rho)$) определяется по формуле

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = i \int\limits_{\Delta(s[\mu])} \phi_1(w)\,dw \wedge \overline{\phi_2(w)\,dw},$$

где $w \in \Delta(s[\mu]) = w^{s[\mu]}(\Delta)$; Δ — фиксированная связная фундаментальная область для Γ, естественно выбранная по фиксированному набору петель из отмечания на F; $[\mu] \equiv [F_\mu] \in \mathbb{T}_g(F)$. Например, область Δ получается подъемом (коммутаторного) пути $\prod\limits_{j=1}^{g} C_j$ из фиксированной точки $z_0 \in U$, лежащей над точкой $O \in F$, из которой проведено фиксированное каноническое рассечение на F. Это будет послойная эрмитова метрика на P над $\mathbb{T}_g(F) \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_g)$, так как

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = i \int\limits_{\Delta} \phi_1(w^{s[\mu]}(z))\,dw^{s[\mu]}(z) \wedge \overline{\phi_2(w^{s[\mu]}(z))\,dw^{s[\mu]}(z)}$$

вещественно-аналитично на вещественно-аналитических сечениях расслоения P.

Теорема 2. *Расслоение Прима P является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга $g-1$ над $\mathbb{T}_g(F) \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_g)$.*

Доказательство. На P уже задана послойная эрмитова метрика. Покажем, что P будет голоморфным векторным расслоением. По теореме 1 над любой достаточно малой односвязной окрестностью $U([F_{\mu_0}] \times U(\rho_0))$ в базе существует базис $\{\phi_j([\mu]; \rho_\mu; z)\,dz\}_{j=1}^{g-1}$ для $\Gamma([F_\mu]; O^{1,0}(\rho_\mu))$, голоморфно зависящий от $([\mu]; \rho) \in U([F_{\mu_0}]) \times U(\rho_0)$. Отображение, сопоставляющее

$$\phi([\mu], \rho_\mu; z)\,dz = \sum_{j=1}^{g-1} \lambda_j([\mu]; \rho) \phi_j([\mu]; \rho_\mu; z)\,dz$$

набор

$$([\mu], \rho; \lambda_1([\mu], \rho), \dots, \lambda_{g-1}([\mu], \rho)),$$

задает тривиализацию (карту) $\Theta([\mu_0], \rho_0)$, биективно и послойно изоморфно отображающую $P|_{U([F_{\mu_0}]) \times U(\rho_0)}$ на $U([F_{\mu_0}]) \times U(\rho_0) \times \mathbb{C}^{g-1}$.

Пусть $U([F_{\mu_1}]) \cap U([F_{\mu_2}])$ и $U(\rho_1) \cap U(\rho_2)$ — непустые односвязные области в $\mathbb{T}_g(F)$ и в $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash L_g$, а $\{\phi_j([\mu], \rho_\mu; z)\, dz\}_{j=1}^{g-1}$ и $\{\phi'_k([\mu], \rho_\mu; z)\, dz\}_{k=1}^{g-1}$ — базисы над $U([F_{\mu_1}]) \times U(\rho_1)$ и $U([F_{\mu_2}]) \times U(\rho_2)$ соответственно. Тогда невырожденная матрица A_{12} перехода от первого базиса ко второму состоит из голоморфных функций от $([\mu], \rho) \in (U([F_{\mu_1}]) \cap U([F_{\mu_2}])) \times (U(\rho_1) \cap U(\rho_2))$. Для любого такого $([\mu], \rho)$ имеем

$$\phi([\mu], \rho_\mu; z)\, dz = \sum_{j=1}^{g-1} \lambda_j([\mu], \rho)\phi_j([\mu], \rho_\mu; z)\, dz$$
$$= \sum_{k=1}^{g-1} \beta_k([\mu], \rho)\phi'_k([\mu], \rho_\mu; z)\, dz, \quad z \in w^\mu(U).$$

Поэтому вектор-столбец $(\beta_1([\mu], \rho), \dots, \beta_{g-1}([\mu], \rho))$ получается как результат действия слева голоморфно зависящей от $([\mu], \rho)$ матрицы $\left(A_{12}^T\right)^{-1}$ на вектор-столбец $(\lambda_1([\mu], \rho), \dots, \lambda_{g-1}([\mu], \rho))$, где A_{12}^T — матрица, получающаяся транспонированием A_{12}. Следовательно, набор локальных карт $\Theta([\mu_0], \rho_0)$ ($[\mu_0] \in \mathbb{T}_g(F), \rho_0 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash L_g$) задает на P структуру голоморфного векторного расслоения над $\mathbb{T}_g(F) \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash L_g)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Когомологическое расслоение Ганнинга G является голоморфным векторным расслоением ранга $2g-2$ над $\mathbb{T}_g(F) \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash 1)$.*

Доказательство. Покроем $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash 1$ $2g$ окрестностями

$$U_l = \{\rho : \rho(A_l) \neq 1\}, \quad U_{g+l} = \{\rho : \rho(B_l) \neq 1\}, \quad l = 1, \dots, g.$$

При $\rho_\mu \neq 1$, как установлено в [3], существует изоморфизм векторного пространства $H^1(\Gamma^\mu, \rho_\mu)$ и векторного пространства $\mathrm{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma^\mu, \Gamma^\mu], \mathbb{C})$, состоящего из гомоморфизмов $\phi_0 : [\Gamma^\mu, \Gamma^\mu] \to (\mathbb{C}, +)$ таких,что $\phi_0(S^\mu T^\mu (S^\mu)^{-1}) = \rho_\mu(S^\mu)\phi_0(T^\mu)$, где $T^\mu \in [\Gamma^\mu, \Gamma^\mu]$, $S^\mu \in \Gamma^\mu$, $[\Gamma, \Gamma]$ — коммутант группы Γ. Значит, расслоение G над $\mathbb{T}_g(F) \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash 1)$ изоморфно расслоению со слоем $\mathrm{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma^\mu, \Gamma^\mu], \mathbb{C})$ над $([\mu], \rho)$, где $\rho(A_j) = \rho_\mu\left(A_j^\mu\right)$, $\rho(B_j) = \rho_\mu\left(B_j^\mu\right)$, $j = 1, \dots, g$. Зададим карту $\Theta\left(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g\right)$ над $\mathbb{T}_g(F) \times U_l$, биективно отображающую $G\,|_{\mathbb{T}_g(F) \times U_l}$ на $\mathbb{T}_g(F) \times U_l \times \mathbb{C}^{2g-2}$ по правилу: элементу $\phi_0([\mu], \rho_\mu) \in \mathrm{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma^\mu, \Gamma^\mu], \mathbb{C})$ сопоставляется набор

$$\left([\mu], \rho; \xi_1^l, \dots, \xi_{g-1}^l, \eta_1^l, \dots, \eta_{g-1}^l\right).$$

Здесь над U_l имеем

$$\xi_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)\left(\left[A_{\tilde{j}}^\mu, A_l^\mu\right]\right), \quad \eta_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)\left(\left[B_{\tilde{j}}^\mu, A_l^\mu\right]\right),$$

а над U_{g+l} —

$$\xi_j^{g+l} = \phi_0([\mu], \rho_\mu)\left(\left[A_{\tilde{j}}^\mu, B_l^\mu\right]\right), \quad \eta_j^{g+l} = \phi_0([\mu], \rho_\mu)\left(\left[B_{\tilde{j}}^\mu, B_l^\mu\right]\right),$$

где $\tilde{j} = j$ при $1 \leq j \leq l-1$ и $\tilde{j} = j+1$ при $l \leq j \leq g-1$. Для $\rho \in U_1$, например, будет $\sigma_\mu\left(A_1^\mu\right) = 1 - \rho_\mu\left(A_1^\mu\right) \neq 0$ и любой элемент $\phi_0 = \phi_0([\mu], \rho_\mu) \in \mathrm{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma^\mu, \Gamma^\mu], \mathbb{C})$ можно задать как $\phi_0 = \phi^1 \mid [\Gamma^\mu, \Gamma^\mu]$ для $\phi^1 = \phi^1([\mu], \rho_\mu) \in Z^1(\Gamma^\mu, \rho_\mu)$ такого, что $\phi^1\left(A_1^\mu\right) = 0$, $\phi^1(T^\mu) = \sigma_\mu\left(A_1^\mu\right)^{-1}\phi_0\left(\left[T^\mu, A_1^\mu\right]\right)$, $T^\mu \in \Gamma^\mu$. Отсюда

$$\xi_j^1 = \phi_0\left(\left[A_{j+1}^\mu, A_1^\mu\right]\right) = \phi^1\left(\left[A_{j+1}^\mu, A_1^\mu\right]\right) = \sigma_\mu\left(A_1^\mu\right)\phi^1\left(A_{j+1}^\mu\right),$$

$$\eta_j^1 = \phi_0\big([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]\big) = \phi^1\big([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]\big) = \sigma_\mu\big(A_1^\mu\big)\phi^1\big(B_{j+1}^\mu\big), \quad j = 1, \dots, g-1.$$

Кроме того, из уравнения (3) следует, что

$$\phi^1\big(B_1^\mu\big) = \sigma_\mu\big(A_1^\mu\big)^{-2} \sum_{j=1}^{g-1} \big[\sigma_\mu\big(B_{j+1}^\mu\big)\xi_j^1 - \sigma_\mu\big(A_{j+1}^\mu\big)\eta_j^1\big].$$

Таким образом, $\phi^1(A_j^\mu), \phi^1(B_j^\mu)$, $j = 1, \dots, g$, выражаются через ξ_j^1, η_j^1, $j = 1, \dots, g-1$, и последние можно взять в качестве координат для ϕ_0 в слоях над $\mathbb{T}_g(F) \times U_1$. Аналогично можно поступить для остальных окрестностей. Теперь так же, как в доказательстве теоремы 1 из [4], получим, что матрицы перехода $A_{k,l}$ голоморфны на $\mathbb{T}_g(F) \times (U_l \cap U_k)$ для всех $k, l = 1, \dots, 2g$. Следовательно, такие карты $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g), l = 1, \dots, 2g$, задают структуру голоморфного векторного расслоения на G над $\mathbb{T}_g(F) \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash 1)$. Теорема 3 доказана.

Из свойств отображения периодов $p : P \to G$ получается

Теорема 4. *Последовательность голоморфных векторных расслоений и отображений*

$$0 \to P \xrightarrow{p} G \xrightarrow{h} G/P \to 0$$

над $\mathbb{T}_g(F) \times (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_g)$ *является точной для любого* $g \geq 2$.

Доказательство. По предыдущим теоремам расслоения P и G имеют структуру голоморфных векторных расслоений. Кроме того, p — послойная инъекция. Покажем, что отображение p голоморфно относительно этих структур. Пусть $U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$ — достаточно малая односвязная окрестность точки $([\mu_0], \rho_0)$, как в теореме 1, где $U(\rho_0) \subset (\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_g)$. Тогда $U(\rho_0)$ лежит в одной из областей $U_j = \{\rho : \rho(A_j) \neq 1\}$, $U_{g+j} = \{\rho : \rho(B_j) \neq 1\}$, $j = 1, \dots, g$, покрытия для $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash 1$. Пусть, например, $U(\rho_0) \subset U_1$. Тогда существует базис голоморфных дифференциалов Прима:

$$\phi_1([\mu], \rho_\mu; z)\, dz, \dots, \phi_{g-1}([\mu], \rho_\mu; z)\, dz,$$

голоморфно зависящий от $([\mu]; \rho) \in U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$, $z \in w^\mu(U)$, и любой элемент $\phi([\mu], \rho_\mu; z)\, dz \in \Gamma([F_\mu], \rho_\mu)$ имеет разложение

$$\phi([\mu], \rho_\mu; z)\, dz = \sum_{j=1}^{g-1} \lambda_j([\mu], \rho)\phi_j([\mu], \rho_\mu; z)\, dz.$$

В карте $\Theta([\mu_0], \rho_0)$ он имеет послойные координаты $(\lambda_1([\mu], \rho), \dots, \lambda_{g-1}([\mu], \rho))$.

Элемент

$$[\phi([\mu]; \rho_\mu)] = p(\phi([\mu], \rho_\mu; z)\, dz) \in H^1(\Gamma^\mu, \rho_\mu)$$

в карте $\Theta\big(U_1; \{A_j, B_j\}_{j=1}^g\big)$ над $\mathbb{T}_g(F) \times U_1$ имеет послойные координаты

$$\xi_j^1 = \tilde{\phi}^1([A_{j+1}, A_1]) = \int_{z_0}^{[A_{j+1}, A_1]z_0} \phi([\mu], \rho_\mu; z)\, dz,$$

$$\eta_j^1 = \tilde{\phi}^1([B_{j+1}, A_1]) = \int_{z_0}^{[B_{j+1}, A_1]z_0} \phi([\mu], \rho_\mu; z)\, dz, \quad j = 1, \dots, g-1,$$

где $\tilde{\phi}^1 \in Z^1(\Gamma^\mu, \rho_\mu)$ — любой представитель класса периодов $[\phi([\mu], \rho_\mu)]$ при $\rho_\mu \in U_1$ [3]. Следовательно, вектор-столбец $\left(\xi_1^1, \dots, \xi_{g-1}^1, \eta_1^1, \dots, \eta_{g-1}^1\right)$ получается как действие слева матрицы $A([\mu], \rho)$ на вектор-столбец

$$(\lambda_1([\mu], \rho), \dots, \lambda_{g-1}([\mu], \rho)).$$

Здесь j-я строка матрицы $A([\mu], \rho)$ есть

$$\left(\tilde{\phi}_1^1([\mu], \rho_\mu)([A_{j+1}, A_1]), \dots, \tilde{\phi}_{g-1}^1([\mu], \rho_\mu)([A_{j+1}, A_1])\right)$$

и $(g + j - 1)$-я строка —

$$\left(\tilde{\phi}_1^1([\mu], \rho_\mu)([B_{j+1}, A_1]), \dots, \tilde{\phi}_{g-1}^1([\mu], \rho_\mu)([B_{j+1}, A_1])\right), \quad j = 1, \dots, g-1.$$

Эта матрица порядка $(g-1) \times (2g-2)$ состоит из элементов, голоморфно зависящих от $([\mu], \rho) \in U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$, где

$$\tilde{\phi}_k^1([\mu], \rho_\mu)[A_{j+1}, A_1] = \int\limits_{z_0}^{[A_{j+1}, A_1]z_0} \phi_k([\mu], \rho_\mu; z)\, dz,$$

$$\tilde{\phi}_k^1([\mu], \rho_\mu)[B_{j+1}, A_1] = \int\limits_{z_0}^{[B_{j+1}, A_1]z_0} \phi_k([\mu], \rho_\mu; z)\, dz, \quad k = 1, \dots, g-1.$$

Аналогично получаются голоморфные матрицы для отображения p в других случаях, когда $U(\rho_0) \subset U_l$, $l = 2, 3, \dots, 2g$, но надо рассматривать соответствующие коммутаторы. Следовательно, p будет голоморфным отображением относительно структур на P и на G.

Теперь нужно доказать, что на фактор-расслоении $G/P \equiv G/p(P)$ можно задать структуру голоморфного векторного расслоения, относительно которой естественное отображение $h : G \to G/P$ будет голоморфным. Сначала покажем, что $p(P)$ является голоморфным векторным подрасслоением в голоморфном векторном расслоении G. Над достаточно малой окрестностью $U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$ выберем фиксированный базис

$$\phi_1(z)\, dz = \phi_1([\mu], \rho_\mu; z)\, dz, \dots, \phi_{g-1}(z)\, dz = \phi_{g-1}([\mu], \rho_\mu; z)\, dz,$$

голоморфно зависящий от $([\mu], \rho)$. В карте $\Theta([\mu_0], \rho_0)$ он имеет послойные координаты

$$(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{C}^{g-1}$$

соответственно. Голоморфное инъективное $\mathbb{C}$-линейное отображение p этот базис переводит в линейно независимую над $\mathbb{C}$ систему $\{p(\phi_j(z)\, dz)\}_{j=1}^{g-1}$ сечений расслоения G, также голоморфно зависящую от $([\mu], \rho) \in U[\mu_0] \times U(\rho_0)$. Снова достаточно рассмотреть случай, когда $U(\rho_0) \subset U_1$. В карте

$$\Theta\left(U_1; \{A_j, B_j\}_{j=1}^g\right)$$

сечение $p(\phi_1(z)\, dz)$ имеет координаты

$$\begin{aligned}(\xi_1, \dots, \xi_{g-1}, \eta_1, \dots, \eta_{g-1}) &= (1, 0, \dots, 0) A^T([\mu], \rho) \\ &= \left(\tilde{\phi}_1^1[A_2, A_1], \dots, \tilde{\phi}_1^1[A_g, A_1], \tilde{\phi}_1^1[B_2, A_1], \dots, \tilde{\phi}_1^1[B_g, A_1]\right), \dots,\end{aligned}$$

$p(\phi_{g-1}(z)\,dz)$ — координаты $\big(\tilde{\phi}^1_{g-1}[A_2, A_1], \dots, \tilde{\phi}^1_{g-1}[B_g, A_1]\big)$. Составим матрицу размера $(g-1)\times(2g-2)$ из этих строк. Она содержит ровно $g-1$ линейно независимых строк и столько же независимых столбцов. Рассмотрим эту матрицу при фиксированных $([\mu_0], \rho_0)$. Существует биголоморфный автоморфизм α для $\mathbb{C}^{2g-2}$, переставляющий координаты и такой, что после его естественного действия на столбцы этой матрицы она будет иметь вид $(C_1([\mu_0], \rho_0); C_2([\mu_0], \rho_0))$, где $\det C_1([\mu_0], \rho_0) \neq 0$. В достаточно малой окрестности (обозначим ее так же) $U[\mu_0] \times U(\rho_0)$ имеем $\det C_1([\mu], \rho) \neq 0$. Строки полученной матрицы дают набор линейно независимых сечений в тривиальном расслоении $U[\mu_0] \times U(\rho_0) \times \mathbb{C}^{2g-2}$, голоморфно зависящих от $([\mu], \rho)$, и порождают, для фиксированной точки $([\mu], \rho), (g-1)$-мерное подпространство в $\mathbb{C}^{2g-2}$. Дополним этот набор базисными векторами $e_g, \dots, e_{2g-2}$ до базиса сечений в $U[\mu_0] \times U(\rho_0) \times \mathbb{C}^{2g-2}$. Получаем квадратную матрицу порядка $2g-2$ вида $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ O & I \end{pmatrix}$, где I — единичная матрица порядка $g-1$. Биголоморфный автоморфизм β этого произведения, который при фиксированных $([\mu], \rho)$ имеет матрицу преобразования вида $\begin{pmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ O & I \end{pmatrix}$, переводит указанный базис сечений в стандартный базис сечений $e_1, \dots, e_{2g-2}$ для $U(\rho_0) \times \mathbb{C}^{2g-2}$. Поэтому в новой карте $\Psi = \beta\alpha\Theta\big(U_1, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g\big)$ той же структуры голоморфного векторного расслоения набор голоморфных сечений $p(\phi_1(z)\,dz), \dots, p(\phi_{g-1}(z)\,dz))$ имеет вид $([\mu], \rho, e_1), \dots, ([\mu], \rho, e_{g-1})$. Следовательно, получаем послойный изоморфизм

$$\Psi : p(P)|_{U[\mu_0]\times U(\rho_0)} \to (U[\mu_0] \times U(\rho_0) \times \mathbb{C}^{g-1}) \subset U[\mu_0] \times U(\rho_0) \times \mathbb{C}^{2g-2},$$

а значит, $p(P)$ является голоморфным векторным подрасслоением ранга $g-1$ в G. В таких картах Ψ матрица перехода $A_{0,1;k,l}([\mu], \rho)$ для G над $U(\rho_0)$ принимает вид $\begin{pmatrix} I & O \\ C & D \end{pmatrix}$, где матрицы

$$A = A([\mu], \rho) = I, \quad C = C([\mu], \rho), \quad D = D([\mu], \rho)$$

порядка $g-1$ голоморфно зависят от $([\mu], \rho) \in (U[\mu_0] \cap U[\mu_1]) \times (U_k \cap U_l)$. При этом $A([\mu], \rho)$ и $D([\mu], \rho)$ являются матрицами перехода для $p(P)$ и $G/p(P)$ соответственно, а значит, $G/p(P)$ — голоморфное векторное расслоение со слоем $H^1(\Gamma^\mu, \rho_\mu)/(p(P))_{([\mu],\rho)}$ над точкой $([\mu], \rho)$. Отображение

$$h : [\phi([\mu], \rho_\mu)] \to [\phi([\mu], \rho_\mu)] + p(P)_{([\mu],\rho)}$$

в картах Ψ будет иметь вид

$$([\mu], \rho; \xi_1, \dots, \xi_{g-1}; \eta_1, \dots, \eta_{g-1}) \to ([\mu], \rho; 0, \dots, 0; \eta_1, \dots, \eta_{g-1}).$$

Следовательно, отображение h будет голоморфным. Теорема 4 доказана.

Замечание. Пространство Торелли Υ_g определяется как фактор-пространство $\mathbb{T}_g(F)/\tau_g$, где группа Торелли τ_g — нормальная подгруппа в $\operatorname{Mod}\mathbb{T}_g$, состоящая из элементов, тождественно действующих на первой группе гомологий $H_1(F, Z)$ поверхности F [5, 6]. Так как τ_g действует свободно на $\mathbb{T}_g(F)$, т. е. без неподвижных точек, то определено естественное неразветвленное голоморфное накрытие $\mathbb{T}_g(F) \to \Upsilon_g$. Группа накрывающих отображений этого накрытия естественно действует как группа биголоморфных автоморфизмов пространства $\mathbb{T}_g(F) \times (\operatorname{Hom}(H_1(F, Z), \mathbb{C}^*)\backslash L_g)$ (тождественно на втором сомножителе).

Поэтому теоремы 1–4 будут верны для естественно определенных над $\Upsilon_g \times (\mathrm{Hom}(H_1(F,Z),\mathbb{C}^*)\backslash L_g)$ расслоений Прима и Ганнинга, так как

$$\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*) \cong \mathrm{Hom}(\Gamma/[\Gamma,\Gamma],\mathbb{C}^*) = \mathrm{Hom}(H_1(F,Z),\mathbb{C}^*).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prym F., Rost G.* Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schoepfungen Riemann's. Leipzig, 1911.

2. *Appell P.* Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application an developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques // Acta Math. 1890. V. 13, N 3/4. P. 1–174.

3. *Gunning R. C.* On the period classes of Prym differentials // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 153–171.

4. *Чуешев В. В.* Когомологическое расслоение Ганнинга и группа Торелли // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 3. С. 198–203.

5. *Крушкаль С. Л.* Квазиконформные отображения и римановы поверхности. Новосибирск: Наука, 1975.

6. *Earle C. J.* Teichmueller theory // Discrete groups and automorhpic functions. London: Academic Press, 1977. (Proc. the London Math. Soc.(ed. by Harvey W.J.)). P. 143–162.

7. *Earle C. J.* Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties // Ann. Math. 1978. V. 107. P. 255–286.

8. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1992. (Grad. Text's Math.; v.71).

9. *Bers L.* Holomorphic differentials as functions of Moduli // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67, N 2. P. 206–210.

10. *Baker H. F.* Abel's theorem and the allied theory (including the theory of theta functions). Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1897.

11. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.

12. *Earle C. J., Kra I.* Positive divisors and Poincare series on variable Riemann surfaces // Tohôku Math. J. 1987. V. 39. P. 429–436.

13. *Earle C. J.* On quasiconformal extentions of the Beurling — Ahlfors type // Contributions to Analysis. New-York; London: Acad. Press, 1974. P. 99–105.

Статья поступила 19 ноября 1999 г., окончательный вариант — 14 февраля 2001 г.

Чуешев Виктор Васильевич
Кемеровский гос. университет, ул. Красная, 6, Кемерово 650043
chueshev@lanserv1.kemsu.ru