Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.983 : 517.982

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВКЛЮЧЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ПРОСТРАНСТВАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

И. В. Мельникова

Аннотация: Исследована корректность вырожденных задач Коши

$$Bu'(t) = Fu(t),\ t \geq 0,\ u(0) = x; \quad \frac{d}{dt}Bv(t) = Fv(t),\ t \geq 0,\ Bv(0) = x,$$

рассматриваемых в форме задачи Коши для включения с линейным многозначным оператором $\mathscr{A}$:

$$u'(t) \in \mathscr{A}\, u(t), \quad t \geq 0,\ u(0) = x. \tag{ICP}$$

На основе нового подхода к определению вырожденных интегрированных полугрупп и их генераторов в банаховом пространстве получен критерий корректности задачи (ICP) (n-корректности, (n, ω)-корректности) в терминах оператора $(\lambda - \mathscr{A}\,)^{-1} = R_{\mathscr{A}}(\lambda)$ и разложения пространства в прямую сумму. Полученное разложение обобщает условие плотности области определения генератора невырожденной полугруппы. Кроме того, задача Коши для включения рассмотрена в пространстве абстрактных распределений, и даны необходимые и достаточные условия корректности в пространстве $\mathscr{D}'(X) := \mathscr{L}(\mathscr{D}, X)$. Библиогр. 22.

Введение. Работа посвящена исследованию корректности вырожденных задач Коши

$$Bu'(t) = Fu(t), \quad t \in [0, T), \quad u(0) = x, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}Bv(t) = Fv(t), \quad t \in [0, T), \quad Bv(0) = x, \tag{2}$$

$$\ker B \neq \{0\}, \quad T \leq \infty,$$

рассматриваемых в форме задачи Коши для включения с линейным многозначным оператором $\mathscr{A}$:

$$u'(t) \in \mathscr{A} u(t), \quad t \in [0, T),\ u(0) = x. \tag{3}$$

Если положить $\mathscr{A} = B^{-1}F$ для задачи (1) или $\mathscr{A} = FB^{-1}$ и $u = Bv$ для задачи (2), то u является решением задачи Коши (3). Обратно, если u — решение задачи (3) с соответствующим оператором $\mathscr{A}$, то u является решением (1) или любое v из множества $Bv = u$ — решение (2). Линейные операторы $B, F : X \to Y$, действующие в банаховых пространствах X и Y, предполагаются такими, что $\mathscr{A}$ порождает некоторую вырожденную полугруппу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–001442) и Министерства общего и профессионального образования (№ 97–01.7–72).

Исследованию существования и единственности решения вырожденных задач в банаховых пространствах посвящено большое число работ, однако критерия корректности в общем случае до сих пор не получено. Для первоначального этапа исследований задачи (1) характерно использование техники F-присоединенных к ядру B векторов и разложение пространства $X = Y$ в прямую сумму подпространств, на одном из которых обратим оператор F, на другом — оператор B и $B^{-1}F$ ограничен (см., например, [1]), а также спектральной техники и техники коэрцитивных операторов [2]. Позднее для исследования вырожденных задач стали применять полугрупповую технику [3, 4] и технику многозначных операторов [5, 6] — в результате получены условия разрешимости задач (1), (2) в терминах операторов $(\lambda B - F)^{-1}B$ и $B(\lambda B - F)^{-1}$. В [7] дана спектральная характеристика оператора $\mathscr{A}$, порождающего однозначно разрешимую проинтегрированную задачу

$$v(t) \in \frac{t^n}{n!}x + \mathscr{A}\int\limits_0^t v(s)\,ds, \quad x \in X, \tag{4}$$

в [8, 9] для задач (1) и (3) установлен критерий равномерной корректности типа MFPHY (Miaydera — Feller — Phillips — Hille — Yosida) на основе техники C_0-полугрупп с генератором, являющимся однозначным сужением оператора $\mathscr{A}$. Для того чтобы получить критерий корректности в общем случае, возникла необходимость в технике вырожденных полугрупп с многозначными генераторами, обладающими различными спектральными свойствами. После работы Арендта [10], где интегрированные полугруппы были введены через абстрактное преобразование Лапласа, в теории полугрупп появилась серия работ [11–13], в которых дан новый подход к исследованию интегрированных и сверточных полугрупп: вместо определения генератора через производную в нуле соответствующего порядка от полугруппы или через преобразование Лапласа в экспоненциальном случае полугруппа и генератор определяются через связывающее их уравнение. Обобщение этих идей на случай включений в настоящей работе позволило получить критерий корректности задачи (3) с оператором $\mathscr{A}$, порождающим вырожденные полугруппы, полугруппы класса C_0 и интегрированные. В § 1 дано доказательство критерия равномерной корректности задачи (3) на максимальном классе корректности $D(\mathscr{A})$ в терминах существования вырожденной C_0-полугруппы с генератором $\mathscr{A}$ и полугруппы, порожденной однозначным сужением оператора $\mathscr{A}$, а также в терминах поведения резольвенты $R_{\mathscr{A}}(\lambda) := (\lambda I - \mathscr{A})^{-1}$ и разложения пространства X в прямую сумму

$$X = \mathscr{A}0 \oplus \overline{D(\mathscr{A})}. \tag{5}$$

Это разложение обобщает условие плотности области определения генератора (невырожденной) C_0-полугруппы. В § 2 в предположении разложения пространства, обобщающего (5):

$$X = \mathscr{A}^{n+1}0 \oplus X_{n+1}, \quad X_{n+1} = \overline{D(\mathscr{A}^{n+1})}, \tag{6}$$

получен критерий (n, ω)-корректности на подмножествах из $D(\mathscr{A}^{n+1})$ в терминах оценок на резольвенту. В § 3 исследованы локальная задача Коши и тесно связанная с ней задача Коши в пространстве распределений. Необходимые и достаточные условия n-корректности и корректности в пространстве абстрактных распределений $\mathscr{D}'(X) := \mathscr{L}(\mathscr{D}, X)$ ($\mathscr{D}$ — пространство Л. Шварца) получены в терминах операторов обобщенного решения и оценок на резольвенту.

Многочисленные примеры вырожденных задач Коши приведены в [2, 6, 14]. Структура вырожденных полугрупп, указанная в теоремах 2 и 4, позволяет строить примеры вырожденных полугрупп, используя известные полугруппы класса C_0 и интегрированные полугруппы, в том числе с неплотно заданными генераторами. Пример такого рода приведен в § 2.

1. Равномерная корректность задачи Коши для включения. Мы начинаем исследование вырожденных задач Коши с изучения равномерной корректности, которая, как и в случае задачи Коши с однозначным оператором, оказывается связанной с существованием сильно непрерывной по $t \geq 0$ полугруппы. В данном случае эта полугруппа сама является вырожденной.

Определение 1. Задача Коши (3) называется *равномерно корректной на* $E \subseteq D(\mathscr{A})$, если

(a) для любого $x \in E$ существует единственное решение

$$u(\cdot) \in C^1\{[0,\infty), X\} \cap C\{[0,\infty), D(\mathscr{A})\};$$

(b) $\sup\limits_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| \leq C_\tau \|x\|$ для любого $\tau > 0$.

Определение 2. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $U = \{U(t),\ t \geq 0\}$ на X называется *полугруппой класса* C_0 (C_0-*полугруппой*), если выполняются условия

(U1) $U(t+\tau) = U(t)U(\tau)$, $t, \tau \geq 0$ (полугрупповое равенство);

(U2) $\lim\limits_{t \to t_0} U(t)x = U(t_0)x$, $t_0 \geq 0$, $x \in X$ (условие сильной непрерывности);

(U3) $U(0) = I$.

Оператор $\mathscr{A}x := \lim\limits_{t \to 0} t^{-1}(U(t)x - x)$, определенный для тех x, где этот предел существует, называется *инфинитезимальным генератором* C_0-*полугруппы*.

Если семейство U удовлетворяют условиям (U1), (U2), а оператор $U(0)$ (и, следовательно, $U(t)$ для любого $t \geq 0$) имеет ненулевое ядро, то U называется *вырожденной* C_0-*полугруппой*.

Из условия (U3) следует, что C_0-полугруппа является невырожденной. Из равенства (U1) вытекает, что в вырожденном случае оператор $U(0)$ является проектором в пространстве X, порождающим разложение $X = \mathrm{im}\ U(0) \oplus \ker U(0)$, а сужение $U(t)$ на $\mathrm{im}\, U(0)$ — C_0-полугруппой.

Учитывая свойства C_0-полугрупп, дадим еще два определения генератора, эквивалентные определению инфинитезимального генератора, после чего рассмотрим обобщение этих определений на случай вырожденных полугрупп.

1. Из определения C_0-полугруппы следует ее экспоненциальная ограниченность: $U(t) \leq Ce^{\omega t}$, $t \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, поэтому определено преобразование Лапласа от полугруппы и для ее инфинитезимального генератора имеет место равенство

$$(\lambda I - \mathscr{A})^{-1}x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt, \quad x \in X,\ \mathrm{Re}\,\lambda > \omega. \tag{7}$$

Обратно, пусть $L(\lambda)$ — преобразование Лапласа от ω-экспоненциально ограниченной оператор-функции $U(t)$, $t \geq 0$. В [10] показано, что L удовлетворяет резольвентному тождеству

$$(\mu - \lambda)(\mu - \lambda)L(\lambda)L(\mu) = L(\lambda) - L(\mu), \quad \mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Re}\,\mu > \omega,$$

если и только если U удовлетворяет полугрупповому равенству. При этом если полугруппа U невырожденна (т. е. $U(0) = I$), то операторы $L(\lambda)$ обратимы, существует оператор $\mathscr{A} := \lambda I - L^{-1}(\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, для которого $L(\lambda)$ является резольвентой, и выполняется равенство (7). Таким образом, равенство (7) может служить определением генератора C_0-полугруппы.

2. Из определения инфинитезимального генератора $\mathscr{A}$ следуют равенства

$$U'(t)x = \mathscr{A}U(t)x = U(t)\mathscr{A}x, \quad t \geq 0, x \in D(\mathscr{A}).$$

Отсюда в силу замкнутости $\mathscr{A}$ и плотности области определения генератора C_0-полугруппы получаем уравнения, связывающие полугруппу с генератором:

$$U(t)x - x = \int\limits_0^t U(s)\mathscr{A}x\,ds,\ x \in D(\mathscr{A}); \quad U(t)x - x = \mathscr{A}\int\limits_0^t U(s)x\,ds,\ x \in X. \quad (8)$$

Нетрудно показать, что если выполняются уравнения (8), то имеет место равенство (7). Отсюда находим еще одно эквивалентное определение C_0-полугруппы и порождающего ее генератора — это семейство ограниченных операторов $\{U(t),\, t \geq 0\}$ и оператор $\mathscr{A}$, удовлетворяющие уравнениям (8). При этом генератор определяется через полугруппу следующим образом:

$$D(\mathscr{A}) := \left\{x \in X \mid \exists y : U(t)x - x = \int\limits_0^t U(s)y\,ds,\ t \in [0,T)\right\}, \quad \mathscr{A}x := y.$$

Теперь, обобщая соотношения (7), (8), переходим к определению и исследованию вырожденных полугрупп. Вырожденные полугруппы оказываются связанными с многозначными операторами.

Определение 3. Отображение $\mathscr{A} : X \mapsto 2^Y$ называется линейным многозначным оператором, если его график $\{(x, \mathscr{A}x),\, x \in D(\mathscr{A})\}$ является линейным многообразием в $X \times Y$; оператор $\mathscr{A}$ называется *замкнутым*, если его график замкнут.

Оператор A, являющийся сужением многозначного оператора $\mathscr{A}$, с областью определения $D(A)$, равной $D(\mathscr{A})$, назовем *однозначной ветвью* $\mathscr{A}$.

Как и в однозначном случае, для оператора $\mathscr{A} : X \mapsto 2^X$ из условия непустоты резольвентного множества $\rho(\mathscr{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - \mathscr{A})^{-1} \in \mathscr{L}(X)\}$ следует его замкнутость.

Нетрудно проверить, что если для некоторого подпространства $X_1 \subset X$ имеет место разложение $X = \mathscr{A}0 \oplus X_1$, то линейный оператор

$$Au := \mathscr{A}u \cap X_1, \quad D(A) := \{u \in X : Au \neq \varnothing\}, \quad (9)$$

является однозначным и для него имеет место равенство $D(A) = D(\mathscr{A})$, т. е. A — однозначная ветвь $\mathscr{A}$.

Теперь рассмотрим обобщение определений генератора C_0-полугруппы на случай вырожденной C_0-полугруппы. Определение (однозначного) инфинитезимального генератора $\mathscr{A}$ полугруппы U годится и в вырожденном случае (при этом $D(\mathscr{A}) \cap \ker U = \{0\}$), а вот определение генератора через равенство (7) приводит к многозначному оператору. Пусть L — преобразование Лапласа от вырожденной (экспоненциально ограниченной в силу свойств (U1), (U2)) C_0-полугруппы U. Из резольвентного тождества для преобразования Лапласа от полугруппы получаем

$$(\mu - L^{-1}(\mu))x + \ker U = (\lambda - L^{-1}(\lambda))x + \ker U =: \mathscr{A}x,$$
$$x \in \operatorname{im} L(\lambda) =: D(\mathscr{A}), \quad \lambda, \mu : \operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu > \omega,$$

и, следовательно, равенство (7), определяющее линейный теперь уже многозначный оператор $\mathscr{A}$, называемый *генератором вырожденной C_0-полугруппы.* Из равенства (7) следует, что $\ker U = \ker(\lambda I - \mathscr{A})^{-1}$. С другой стороны, $\ker(\lambda I - \mathscr{A})^{-1} = \mathscr{A}0$. Это означает, что генератор C_0-полугруппы является многозначным, если и только если эта полугруппа вырожденна.

Обобщение определения полугруппы, порожденной оператором $\mathscr{A}$, через уравнения (8) приводит к определению вырожденной C_0-полугруппы и ее генератора через уравнение и включение. В следующем параграфе при исследовании (n, ω)-корректности мы рассмотрим определение 6 такого типа. Для исследования равномерной корректности задачи (3) в этом параграфе оказывается достаточно определения генератора, введенного через равенство (7).

Следующие две теоремы связывают корректность задачи Коши для включения с порождением оператором $\mathscr{A}$ вырожденной C_0-полугруппы и с порождением C_0-полугруппы оператором, равным однозначной ветви $\mathscr{A}$. Они показывают роль разложения (5) и дают критерий равномерной корректности задачи (3) в терминах поведения $(\lambda I - A)^{-1}$ и $(\lambda I - \mathscr{A})^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{A}$ — замкнутый линейный многозначный оператор в банаховом пространстве X. Пусть $X_1 := \overline{D(\mathscr{A})}$ и оператор A определен по формуле* (9). *Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(W) *задача Коши* (3) *равномерно корректна на $D(\mathscr{A})$;*

(S) *оператор A является однозначной ветвью $\mathscr{A}$ и генератором C_0-полугруппы в X_1;*

(R) *для оператора A, однозначной ветви $\mathscr{A}$, выполнено* MFPHY-*условие: существуют $K > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} R_A(\lambda) \right\| \le \frac{Kk!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega, \ k = 0, 1, 2, \dots. \tag{10}$$

Доказательство. (W) $\Longrightarrow$ (S) $\Longrightarrow$ (R). Определим на $D(\mathscr{A})$ операторы решения $U(t)x := u(t)$, $t \ge 0$. Из корректности задачи (3) следует, что операторы $U(t)$ являются ограниченными на $D(\mathscr{A})$ и их можно продолжить на $X_1 = \overline{D(\mathscr{A})}$. Подобно невырожденному случаю можно показать, что операторы $U(t)$ образуют C_0-полугруппу на X_1. Пусть $G : X_1 \mapsto X_1$ — генератор этой полугруппы. Тогда G — это линейный замкнутый плотно определенный оператор со свойством

$$U(t)x \in C^1\{[0, \infty], X_1\} \Longleftrightarrow x \in D(G).$$

Поскольку для любого $x \in D(\mathscr{A})$ решение $u(\cdot) = U(\cdot)x$ принадлежит пространству $C^1\{[0, \infty], X_1\}$, имеет место вложение $D(\mathscr{A}) \subset D(G)$. В силу замкнутости оператора $\mathscr{A}$ для любого $x \in D(\mathscr{A})$ получаем

$$U(t)x - x = \int_0^t U'(\tau)x \, d\tau \in \mathscr{A} \int_0^t U(\tau)x \, d\tau.$$

Полученное включение может быть продолжено на X_1. Отсюда

$$\frac{U(t)x - x}{t} \in \frac{1}{t}\mathscr{A}\int_0^t U(\tau)x\,d\tau, \quad t > 0,\ x \in X_1.$$

Из определения $D(G) := \{x \in X_1 \mid \exists \lim\limits_{t\to 0} t^{-1}(U(t)x - x)\}$ следует, что $D(G) \subset D(\mathscr{A})$, значит, $D(G) = D(\mathscr{A})$ и $Gx \in \mathscr{A}x$ для любого $x \in D(\mathscr{A})$. Поскольку $Gx \in X_1$, для любого $x \in D(\mathscr{A}) = D(G)$

$$Gx \in Ax := \mathscr{A}x \cap X_1 \implies D(\mathscr{A}) \subset D(A) \implies D(\mathscr{A}) = D(A). \tag{11}$$

Покажем, что A — однозначный оператор, совпадающий с G. Пусть $y \in A0 := \mathscr{A}0 \cap X_1$. Положим $z := (\lambda - G)^{-1}y$, $\lambda \in \rho(G)$ (резольвентное множество $\rho(G)$ непусто, так как G — генератор C_0-полугруппы). Для этого элемента z имеем

$$(\lambda - G)z = y \quad \text{и} \quad \lambda z = y + Gz \in \mathscr{A}0 + Gz \subset \mathscr{A}0 + \mathscr{A}z = \mathscr{A}z,$$

т. е. $\lambda z \in \mathscr{A}z$, поэтому $(ze^{\lambda t})' = \lambda z e^{\lambda t} \in \mathscr{A}(ze^{\lambda t})$, следовательно, $u(t) = ze^{\lambda t}$, $t \geq 0$, является решением задачи (3) с начальным условием $u(0) = z$ для любого $\lambda \in \rho(G)$. В силу корректности задачи (3) отсюда $z = 0$ и $y = (\lambda - G)z = 0$. Таким образом, $A0 = \{0\}$, т. е. A — однозначный оператор. Из соотношений (11) получаем $Gx \subset Ax \Longrightarrow G = A$ для любого $x \in D(G) = D(A)$. Таким образом, A является генератором C_0-полугруппы в X_1. Это эквивалентно выполнению условия (10) для его резольвенты.

(R) $\Longrightarrow$ (W). Как известно (см., например, [1, 15]), выполнение оценок (10) в банаховом пространстве X_1 для плотно определенного оператора A ($\overline{D(A)} = X_1$), кроме отмеченной выше эквивалентности существованию C_0-полугруппы, является необходимым и достаточным условием равномерной корректности на $D(A)$ задачи Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad t \geq 0,\ u(0) = x.$$

Эта задача с оператором A, равным однозначной ветви $\mathscr{A}$, равномерно корректна на $D(A)$, если и только если задача Коши для включения (3) равномерно корректна на $D(\mathscr{A})$. Действительно, любое решение задачи с оператором A будет решением задачи (3). Обратно, если $u(\cdot)$ — решение задачи (3), то $u'(t) \in X_1$, следовательно, $\mathscr{A}u(t) \cap X_1 \neq \varnothing$ и $u(t) \in D(A)$ при $t \geq 0$. $\square$

Покажем, что при дополнительном условии $\rho(\mathscr{A}) \neq \varnothing$ оценки MFPHY выполнены для резольвенты самого оператора $\mathscr{A}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{A}$ — линейный многозначный оператор в банаховом пространстве X с непустым резольвентным множеством. Тогда*

(W) *задача Коши* (3) *равномерно корректна на* $D(\mathscr{A})$,

если и только если

(R$'$) *для $R_{\mathscr{A}}(\lambda)$ выполнено* MFPHY-*условие и имеет место разложение пространства $X = \overline{D(\mathscr{A})} \oplus \mathscr{A}0$.*

Доказательство. (W) $\Longrightarrow$ (R$'$). В теореме 1 доказано, что оператор A совпадает с однозначной ветвью $\mathscr{A}$ и является генератором C_0-полугруппы U. Покажем, что имеет место разложение пространства (5). Тогда полугруппа $\mathscr{U}$, равная U на $\overline{D(\mathscr{A})} = X_1$ и нулю на $\mathscr{A}0$, будет вырожденной C_0-полугруппой с генератором $\mathscr{A}$; из равенства (7) для этой полугруппы и ее генератора следует условие (10) для $R_{\mathscr{A}}(\lambda)$. Положим

$$y := R_{\mathscr{A}}(\lambda)x, \quad \text{где } x \in X, \lambda \in \rho(\mathscr{A}) \ \text{ и } \ z := x - (\lambda I - A)y.$$

Имеем $y \in D(\mathscr{A}) = D(A)$ и $(\lambda I - A)y \in X_1$. Поскольку $(\lambda - \mathscr{A})^{-1} f = (\lambda - A)^{-1} f$ для любого $f \in X_1$, получаем

$$(\lambda I - \mathscr{A})^{-1} z = (\lambda I - \mathscr{A})^{-1} x - (\lambda I - \mathscr{A})^{-1} (\lambda I - A) y = 0.$$

Значит, $z \in \ker(\lambda - \mathscr{A})^{-1} = \mathscr{A}0$, и для $x \in X$ имеет место разложение $x = z + (\lambda - A)y \in \mathscr{A}0 + X_1$. Из однозначности оператора A следует $A0 = \mathscr{A}0 \cap X_1 = \{0\}$. Таким образом, получено разложение X в прямую сумму: $X = \mathscr{A}0 \oplus X_1$.

(R$'$) $\Longrightarrow$ (W). В силу определения оператора A и разложения $X = \mathscr{A}0 \oplus X_1$ условие (10) для $R_{\mathscr{A}}(\lambda)$ и $R_A(\lambda)$ выполняется одновременно. Следовательно, задача Коши с оператором A равномерно корректна на $D(A)$. Как вытекает из теоремы 1, это эквивалентно равномерной корректности задачи (3) на $D(\mathscr{A})$. $\square$

Замечания. В рефлексивном пространстве X из оценок (10) для резольвенты оператора $\mathscr{A}$ получаем разложение пространства $X = \mathscr{A}0 \oplus \overline{D(\mathscr{A})}$ [6], поэтому в рефлексивном пространстве MFPHY-условие для $R_{\mathscr{A}}(\lambda)$ является достаточным для равномерной корректности задачи (3) на $D(\mathscr{A})$.

Если положить $R_{\mathscr{A}}(\lambda) = (\lambda B - F)^{-1} B$ для задачи (1) и $R_{\mathscr{A}}(\lambda) = B(\lambda B - F)^{-1}$ для задачи (2), то в качестве следствия из теоремы 2 получаем критерий корректности задачи (1) с операторами F, B такими, что замкнут оператор $B^{-1}F$; для задачи (2) с замкнутым оператором FB^{-1} получаем критерий существования единственной функции $u(\cdot)$ такой, что любая v из множества $Bv = u$ является решением задачи (2).

2. **(n, ω)-Корректность задачи Коши для включения.** Рассмотрим задачу Коши, для которой решение устойчиво относительно изменения x по некоторой более сильной норме, чем норма пространства X.

Определение 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Задача (3) называется *(n, ω)-корректной на $E \subseteq D(\mathscr{A}^n)$*, если для любого $x \in E$ существует единственное решение $u(t)$, $t \geq 0$, такое, что

$$\|u(t)\| \leq C e^{\omega t} \|x\|_{\mathscr{A}^n}, \quad \|x\|_{\mathscr{A}^n} := \sum_{k=0}^{n} \|\mathscr{A}^k x\|$$

для некоторого $C > 0$. Здесь $\|\mathscr{A}^k x\|$ — фактор-норма элемента $\{\mathscr{A}^k x\}$ в пространстве $X / \mathscr{A}^k 0$.

Если множество регулярных точек непусто, то норма $\|x\|_{\mathscr{A}^n}$ эквивалентна норме

$$\|x\|_n := \inf_{y:\ R^n_{\mathscr{A}}(\lambda) y = x} \|y\|, \quad \lambda \in \rho(\mathscr{A}).$$

В теоремах 3, 4 мы покажем, как (n, ω)-корректность задачи (3) на различных подмножествах E связана с существованием $n+1$ раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы и соответствующими оценками для резольвенты генератора. В теореме 5 при условии разложения пространства (6) докажем критерий (n, ω)-корректности. В § 3 будут исследованы вопросы корректности локальной задачи Коши.

Определение 5. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $T \leq \infty$. Однопараметрическое семейство ограниченных линейных операторов $V := \{V(t),\ t \in [0, T)\}$ на X называется *k раз интегрированной полугруппой*, если

(V1) выполнено равенство

$$V(t)V(s) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^s [(s-r)^{k-1}V(t+r) - (t+s-r)^{k-1}V(r)]\,dr, \quad s,t,t+s \in [0,T);$$

(V2) $V(t)$ сильно непрерывна по $t \in [0,T)$.

Полугруппа называется *локальной*, если $T < \infty$, *экспоненциально ограниченной*, если существуют $K > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что $\|V(t)\| \le Ke^{\omega t}$, $t \ge 0$, и *вырожденной*, если $\ker V = \{x \mid \forall t \in [0,T),\ V(t)x = 0\} \ne \{0\}$.

Из (V1) для любых $x \in X$ и $t \in [0,T)$ следует равенство $V(t)V(0)x = V(0)V(t)x = 0$, значит, $V(0)x \in \ker V$, и для невырожденной полугруппы $V(0) = 0$.

Учитывая, что подобно случаю C_0-полугруппы операторы

$$L_k(\lambda) := \int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda t} V(t)\,dt$$

удовлетворяют резольвентному тождеству, если и только если экспоненциально ограниченная оператор-функция $V(\cdot)$ удовлетворяет (V1), определим генератор k раз интегрированной ω-экспоненциально ограниченной полугруппы V (в общем случае многозначный оператор) с помощью равенства

$$(\lambda I - \mathscr{A})^{-1} = \int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda t} V(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega, \tag{12}$$

обобщающего (7). Отсюда следует $\ker V = \ker(\lambda I - \mathscr{A})^{-1} = \mathscr{A}0$, т. е. генератор полугруппы является многозначным, если и только если эта полугруппа вырожденна.

Рассмотрим теперь определение интегрированной полугруппы и порождающего ее оператора через соотношения, обобщающие (8). Пусть $\mathscr{A}$ — генератор (возможно, вырожденной) k раз интегрированной полугруппы V, определяемый равенством (12). Применим к (12) оператор $(\lambda I - \mathscr{A})$ справа на $D(\mathscr{A})$. Учитывая единственность преобразования Лапласа и соотношения

$$(\lambda I - \mathscr{A})^{-1}(\lambda I - \mathscr{A})x = x, \quad V(t)\mathscr{A}x \in \mathscr{A}V(t)x, \quad x \in D(\mathscr{A}),$$

$$(\lambda I - \mathscr{A})(\lambda I - \mathscr{A})^{-1}x \ni x, \quad \int_0^\infty \lambda^{k+1}\frac{t^k}{k!}e^{-\lambda t}x\,dt = x, \quad x \in X,$$

интегрируя по частям $\int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda s}V(s)\mathscr{A}x\,ds$, на $D(\mathscr{A})$ получаем уравнение и включение

$$V(t)x - \frac{t^k}{k!}x = \int_0^t V(s)\mathscr{A}x\,ds \in \mathscr{A}\int_0^t V(s)x\,ds, \quad x \in D(\mathscr{A}). \tag{13}$$

Это включение может быть продолжено на $\overline{D(\mathscr{A})}$. Полагая в (13) $x = R_{\mathscr{A}}(\lambda)y$, получаем продолжение на все пространство X:

$$V(t)y - \frac{t^k}{k!}y \in \mathscr{A}\int_0^t V(s)y\,ds, \quad y \in X. \tag{14}$$

Обратно, если ω-экспоненциально ограниченная оператор-функция $V(\cdot)$ удовлетворяет (13), (14) с замкнутым линейным оператором $\mathscr{A}$, то при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ операторы $L_k(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda I - \mathscr{A})L_k(\lambda)x \ni x,\ x \in X, \quad L_k(\lambda)(\lambda I - \mathscr{A})x = x,\ x \in D(\mathscr{A}).$$

Следовательно, $(\lambda I - \mathscr{A})^{-1} = L_k(\lambda)$, выполнено равенство (12), и сильно непрерывная оператор-функция $V(\cdot)$ удовлетворяет (V1). Таким образом, для экспоненциально ограниченной k раз интегрированной полугруппы и ее генератора может быть дано определение через соотношения (13), (14), эквивалентное (V1), (V2) и (12). Такое определение оказывается полезным не только для экспоненциально ограниченных полугрупп, но и локальных, поэтому мы дадим его для случая $t \in [0, T)$.

Определение 6. Пусть $\mathscr{A}$ — замкнутый линейный (многозначный) оператор, $k \in \mathbb{N}$. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных на X операторов $\{V(t),\ t \in [0, T)\}$, $T \leq \infty$, удовлетворяющих (13), (14), называется k *раз интегрированной полугруппой, порожденной генератором* $\mathscr{A}$.

Предложение 1. *Для k раз интегрированной полугруппы V и порождающего ее генератора $\mathscr{A}$ выполнено равенство* (V1).

Доказательство. Выше было показано, что для экспоненциально ограниченной k раз интегрированной полугруппы, порожденной $\mathscr{A}$, имеют место равенство (12) и, следовательно, (V1).

Теперь по схеме Танаки — Оказавы [16] покажем, что и для локальной полугруппы из соотношений (13), (14) при $t \in [0, T)$ следует, что в некоторой области правой полуплоскости существует резольвента $R_{\mathscr{A}}(\lambda)$ и для нее имеют место степенные оценки. Из этих оценок, как будет показано, вытекает равенство (V1).

Определим оператор

$$R(\lambda, \tau) := \int_0^\tau \lambda^k e^{-\lambda t} V(t)\, dt, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ \tau < T.$$

Применяя к этому равенству оператор $(\lambda I - \mathscr{A})$, из соотношений (13), (14) получаем

$$\begin{aligned} R(\lambda, \tau)(\lambda I - \mathscr{A})x &= (I - G(\lambda))x, \quad x \in D(\mathscr{A}), \\ (\lambda I - \mathscr{A})R(\lambda, \tau)x &\ni (I - G(\lambda))x, \quad x \in X, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$G(\lambda)x := \lambda^k e^{-\lambda\tau} V(\tau)x + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda\tau)^j}{j!} e^{-\lambda\tau} x,\ \|G(\lambda)\| \leq C(1+|\lambda|)^k e^{-\tau \operatorname{Re}\lambda},\ C = C(\tau, k).$$

Логарифмируя неравенство $C(1 + |\lambda|)^k e^{-\tau \operatorname{Re}\lambda} < \gamma < 1$, получаем область

$$\Lambda_k := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \frac{k}{\tau} \ln(1 + |\lambda|) + C\right\}, \quad C = C(\gamma, \tau), \quad \tau > 0,$$

в которой $\|G(\lambda)\| < 1$. Следовательно, $\|(1 - G(\lambda))^{-1}\| < 1/(1 - \gamma)$, и существует ограниченный оператор $(\lambda I - \mathscr{A})^{-1} = R_{\mathscr{A}}(\lambda)$, удовлетворяющий условию

$$(\exists C > 0\ \forall \lambda \in \Lambda_k) \quad \|R_{\mathscr{A}}(\lambda)\| \leq C|\lambda|^k. \tag{16}$$

Из этой оценки на резольвенту по теореме Любича для включений [7] следует, что уравнение (4) имеет единственное решение. В [13] доказано, что операторы $V(t)V(s)$, $t \in [0,T)$ (при фиксированном $s \in [0,T)$), и операторы в правой части соотношения (V1), примененные к элементу $z \in X$, дают решение задачи Коши для уравнения (4) с начальным значением $x = V(s)z$ для любого $z \in X$. Отсюда и из единственности решения выводим полугрупповое равенство (V1). $\square$

Подчеркнем, что далее при исследовании (n,ω)-корректности и n-корректности задачи Коши (3), как и в случае равномерной корректности, наша цель — получение критерия в терминах оценок на резольвенту, при этом полугрупповые результаты играют промежуточную роль. Поэтому каждый раз мы будем использовать наиболее подходящую полугрупповую технику: для исследования (n,ω)-корректности — это определение интегрированной полугруппы и ее генератора через соотношения (V1), (V2) и (12), а для исследования n-корректности — определение 6. При этом, как показывают доказательства теорем 3–7, получить критерий корректности в терминах резольвенты, используя технику интегрированных полугрупп (экспоненциально ограниченных и локальных), удается лишь в предположении соответствующего разложения пространства.

Теорема 3. *Пусть X — банахово пространство, $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathscr{A}$ — линейный многозначный оператор в X, для которого пересечение множества регулярных точек с полуплоскостью $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ непусто. Если задача* (3) *(n,ω)-корректна на $D(\mathscr{A}^{n+1})$, то для $R_{\mathscr{A}}(\lambda)$ выполнено условие типа MFPHY: найдутся такие $C > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, что*

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} \frac{R_{\mathscr{A}}(\lambda)}{\lambda^{n+1}} \right\| \le \frac{Ck!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega,\ k = 0,1,2,\dots. \qquad (R_{n+1})$$

Доказательство. Пусть $x \in D_{n+1} := D(\mathscr{A}^{n+1})$. Введем операторы решения $U(t)x := u(t)$, $t \ge 0$, где $u(\cdot)$ — единственное решение задачи (3). В силу устойчивости решения операторы $U(t)$ могут быть продолжены на $[D_{n+1}]_n$, замыкание D_{n+1} по норме $\|\cdot\|_n$. Для $x \in D_{n+1}$ имеем $U(t)x \in D(\mathscr{A})$ и

$$U'(t)x \in \mathscr{A}U(t)x = \lambda U(t)x - (\lambda I - \mathscr{A})U(t)x, \quad \lambda \in \rho(\mathscr{A}).$$

Отсюда (пользуясь для краткости обозначением $R := R_{\mathscr{A}}(\lambda)$) получаем

$$\begin{gathered} RU'(t)x = R\mathscr{A}U(t)x = \lambda RU(t)x - U(t)x, \\ U(t)x = R(\lambda - \mathscr{A})U(t)x \in (\lambda - \mathscr{A})RU(t)x, \\ R\mathscr{A}U(t)x = \lambda RU(t)x - U(t)x \in \mathscr{A}RU(t)x, \\ RU'(t)x = (RU(t)x)' \in \mathscr{A}RU(t)x, \quad RU(0)x = Rx, \quad x \in D_{n+1}. \end{gathered} \tag{17}$$

Следовательно, $RU(t)x$, $t \ge 0$, является решением задачи (3) с начальным условием Rx, $x \in D_{n+1}$, и в силу единственности $RU(t)x = U(t)Rx$. Интегрируя (17) от 0 до t, получаем на D_{n+1} равенство

$$\int_0^t U(s)x\,ds = -U(t)Rx + Rx + \lambda \int_0^t U(s)Rx\,ds =: U_1(t)x.$$

Правая часть этого равенства и, значит, операторы $U_1(t)$ определены на D_n. Операторы $U_1(t)$ на D_n коммутируют с R, удовлетворяют оценке

$$\|U_1(t)x\| \le Ce^{\omega t}\|Rx\|_n \le C_1 e^{\omega t}\|x\|_{n-1}$$

и, следовательно, могут быть продолжены на $[D_n]_{n-1}$. В общем случае

$$U_k(t)x := -U_{k-1}(t)Rx + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}Rx + \lambda \int_0^t U_{k-1}(s)Rx\,ds, \tag{18}$$

$$x \in D_{n+1-k}, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Операторы $U_k(t)$ на D_{n+1-k} коммутируют с R и удовлетворяют оценке

$$\|U_k(t)x\| \le Ce^{\omega t}\|x\|_{n-k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

тем самым могут быть продолжены на $[D_{n+1-k}]_{n-k}$. В частности, $U_n(t)$ определены и коммутируют с R на $D(\mathscr{A})$, удовлетворяют оценке $\|U_n(t)x\| \le Ce^{\omega t}\|x\|$ и могут быть продолжены на $\overline{D(A)}$, а операторы $V(t) := U_{n+1}(t)$ определены, ограничены и коммутируют с R на всем пространстве $X = D_0$. На $\ker R = \mathscr{A}0$ все построенные операторы $U_k(t)$ $(k \ge 1)$ равны нулю.

Покажем, что семейство $\{V(t), t \ge 0\}$ является $n+1$ раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппой. Из (18) следует, что $V(\cdot)x$ непрерывна по $t \ge 0$ для любого $x \in X$, следовательно, выполняется (V2). Чтобы показать, что выполняется (V1), достаточно проверить, что оператор-функция $L_{n+1}(\lambda)$, определенная при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, удовлетворяет резольвентному тождеству, т. е. достаточно проверить равенство (12) с k, равным $n+1$. Умножая (18) на $\lambda^k e^{-\lambda t}$ и интегрируя от 0 до ∞, при $k = n+1$ получаем равенство

$$L_{n+1}(\lambda)x = \int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t}V(t)x\,dt = R_{\mathscr{A}}(\lambda)x, \quad x \in X, \tag{19}$$

верное для λ из резольвентного множества $\rho(\mathscr{A})$, которое по условию непусто. Следовательно, резольвентное тождество имеет место для $L_{n+1}(\lambda)$ — аналитического продолжения $R_{\mathscr{A}}(\lambda)$ в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Таким образом, $\{V(t), t \ge 0\}$ является вырожденной $n+1$ раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппой с генератором $\mathscr{A}$. Из равенства (19) в области $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ вытекает условие (R_{n+1}). $\square$

Теорема 4. *Пусть для линейного многозначного оператора $\mathscr{A}$ выполнено условие (R_n). Тогда задача (3) (n,ω)-корректна на $R^{n+1}_{\mathscr{A}}(\lambda)\overline{D(\mathscr{A})}$.*

Доказательство. Если условие (R_n) имеет место для некоторых $C > 0$ и $\omega \in \mathbb{R}$, то из интегрированной версии теоремы Уиддера [10] следует, что $\mathscr{A}$ является генератором $n+1$ раз интегрированной ω-экспоненциально ограниченной полугруппы $\{V(t); t \ge 0\}$ (которая может быть и вырожденной) с условием

$$\|V(t+h) - V(t)\| \le Ce^{\omega t}h, \quad t \ge 0,\ h \ge 0. \tag{20}$$

Из равенства (19) для генератора полугруппы подобно (13), (14) получаем

$$V(t)x = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}x + \int_0^t V(s)\mathscr{A}x\,ds,\ V(t)x \in \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}x + \mathscr{A}\int_0^t V(s)x\,ds,\ x \in D(\mathscr{A}). \tag{21}$$

Отсюда для $x \in D(\mathscr{A}^2)$ (т. е. для x таких, что $\mathscr{A}x \cap D(\mathscr{A}) \ne \varnothing$) имеем

$$V'(t)x = \frac{t^n}{n!}x + V(t)\mathscr{A}x, \quad V'(t)\mathscr{A}x \in \frac{t^n}{n!}\mathscr{A}x + V(t)\mathscr{A}^2x \subset \frac{t^n}{n!}\mathscr{A}x + \mathscr{A}V(t)\mathscr{A}x$$

и

$$V''(t)x = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x + V'(t)\mathscr{A}x, \quad V''(t)x \in \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x + \mathscr{A}V'(t)x. \tag{22}$$

Используя свойство (20) и замкнутость оператора $\mathscr{A}$, включение в (21) можно продолжить с $D(\mathscr{A})$ на $\overline{D(\mathscr{A})} = X_1$. Теперь покажем, что уравнение и включение (22) можно продолжить с $D(\mathscr{A}^2) = R^2X$ на RX_1 (где $R := R_{\mathscr{A}}(\lambda)$). Пусть $y \in X_1$. Тогда существует последовательность $D(\mathscr{A}) \ni y_n \to y$. Возьмем $x_n = Ry_n$. Тогда

$$\mathscr{A}x_n = \mathscr{A}Ry_n = -(\lambda I - \mathscr{A})Ry_n + \lambda Ry_n, \quad x_n \to Ry = x \in RX_1$$

и множество $\{(\lambda - \mathscr{A})Ry_n\}$ содержит последовательность y_n, сходящуюся к y. Отсюда $\{\mathscr{A}x_n \cap D(\mathscr{A})\} \neq \varnothing$, и последовательность $-y_n + \lambda Ry_n \in D(\mathscr{A})$ сходится к $-y + \lambda Ry \in X_1$. В силу свойства (20) $V'(t)\mathscr{A}x_n \to V'(t)\mathscr{A}x$. Учитывая замкнутость оператора $V''(t)$, получаем

$$V''(t)x = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x + V'(t)\mathscr{A}x, \quad V''(t)x \in \frac{t^{n-1}}{(n-1)}x + \mathscr{A}V'(t)x, \quad x \in RX_1, \tag{23}$$

так что для $x \in R^2X_1$ существует $V''(t)\mathscr{A}x$. Дифференцируя (23), имеем

$$V^{(3)}(t)x = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}x + V''(t)\mathscr{A}x \in \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}x + \mathscr{A}V''(t)x, \quad x \in R^2X_1.$$

Продолжим этот процесс:

$$V^{(n+2)}(t)x \in \mathscr{A}V^{(n+1)}(t)x, \ x \in R^{n+1}\overline{D(\mathscr{A})}, \quad V^{(n+1)}(0)x = x.$$

Тем самым $V^{(n+1)}x$ — решение задачи (3) с $x \in R^{n+1}X_1$. По теореме Любича для включений из условия (R_n) следует единственность решения. Устойчивость решения относительно $\|x\|_n$ вытекает из того, что $V^{(n+1)}(t)x$, $x \in R^{n+1}X_1$, выражаются через $V'(t)$ на элементах $\mathscr{A}^k x$, $k \leq n$, и операторы $V'(t)$ ограничены на $\overline{D(\mathscr{A})} = X_1$. $\square$

Сравнивая результаты теорем 3, 4 с результатами теоремы 2, отметим, что оценки (R_n) в общем случае без разложения пространства гарантируют корректность лишь на $R^{n+1}X_1$ (а не на $D_{n+1} = D(\mathscr{A}^{n+1}) = R^{n+1}X$), а из корректности на D_{n+1} получены оценки (R_{n+1}) (а не (R_n)) и не получено какого-либо разложения пространства. При этом из оценок (R_{n+1}) и резольвентного тождества для любого x из D_{n+1} имеем $\|R_{\mathscr{A}}(\lambda)x - x\| \underset{\lambda\to\infty, \operatorname{Re}\lambda>\omega}{\longrightarrow} 0$. Отсюда

$$D_{n+1} \cap \ker R = \{0\} \quad \text{и} \quad X_{n+1} \cap \mathscr{A}0 = \{0\},$$

т. е. из оценок (R_{n+1}), связанных с (n,ω)-корректностью задачи (3) и существованием $n+1$ раз интегрированной полугруппы, в общем случае не следует ни $X_1 \cap \mathscr{A}0 = \{0\}$, ни $X_{n+1} \cap \mathscr{A}^{n+1}0 = \{0\}$ и, значит, в общем случае не следует ни разложение (5), ни разложение (6) (напомним, что при условии $\rho(\mathscr{A}) \neq \varnothing$ и, следовательно, без потери общности $0 \in \rho(\mathscr{A})$, разложение (6) может быть записано в виде $X = X_{n+1} \oplus \ker R^{n+1}$).

Если предположить, что разложение (6) имеет место, то получим критерий (n,ω)-корректности задачи Коши для включений.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{A}$ — линейный многозначный оператор в банаховом пространстве X, $\rho(\mathscr{A}) \neq \varnothing$ и имеет место разложение пространства* (6) *с некоторым $n \in \mathbb{N}$. Тогда задача* (3) *является (n,ω)-корректной на D_{n+1}, если и только если выполнено условие (R_n).*

Доказательство. Пусть выполнено условие (R_n). Тогда по теореме 4 задача Коши для включения (3) (n,ω)-корректна на множестве

$$R^{n+1}X_1 \subset R^{n+1}X = D_{n+1}, \quad \text{где } R := R_{\mathscr{A}}(\lambda),\ X_1 := \overline{D(\mathscr{A})}.$$

В силу разложения (6) имеем $R^{n+1}X = R^{n+1}X_{n+1} := R^{n+1}\overline{R^{n+1}X}$. С другой стороны, $R^{n+1}X_{n+1} \subset R^{n+1}X_1$, следовательно, $D_{n+1} \subset R^{n+1}X_1$, и, значит, $R^{n+1}X_1 = D_{n+1}$. Таким образом, задача (3) (n,ω)-корректна на D_{n+1}.

Пусть задача Коши (3) (n,ω)-корректна на D_{n+1}. Чтобы доказать (R_n), учитывая разложение (6), изменим первый шаг в конструкции операторов $U_k(t)$ по формуле (18) в теореме 3. Вместо операторов $U(t)$ будем использовать операторы $U_0(t)$, доопределенные на $\mathscr{A}0$:

$$U_0(t)x := \begin{cases} U(t)x, & x \in [D_{n+1}]_n, \\ 0, & x \in \mathscr{A}0. \end{cases}$$

Построенные таким образом операторы $U_0(t)$ заданы на $[D_{n+1}]_n \oplus \mathscr{A}0$. Благодаря этому построим интегрированную полугруппу $\{V(t), t \geq 0\}$ уже на n-м шаге, а не на $(n+1)$-м: операторы $V(t) := U_n(t)$ определим на $\mathscr{A}^{n+1}0$ и на $X_{n+1} = \overline{D_{n+1}}$, тем самым на $X = X_{n+1} \oplus \mathscr{A}^{n+1}0$ (в теореме 3 операторы $U_n(t)$ были определены лишь на $\overline{D(\mathscr{A})}$). Построенное семейство $\{V(t)\}$ экспоненциально ограничено, и для него выполнено равенство (12) с $k = n$. Следовательно, выполнено условие (R_n).

Учитывая разложение (6), проясним структуру построенной вырожденной n раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы V, рассматривая ее на X_{n+1} и на $\mathscr{A}^{n+1}0$. По построению все оператор-функции $U_k(\cdot)$ $(k \geq 1)$ равны интегралу соответствующего порядка от операторов решения на D_{n+1}, при этом $V(\cdot) = U_n(\cdot)$ продолжена по непрерывности на $X_{n+1} = \overline{D_{n+1}}$ и равна нулю на $\mathscr{A}0$. Следовательно, на X_{n+1} и на $\mathscr{A}0$ они не зависят от λ. Покажем, что для $x \in \mathscr{A}^{k+1}0$ значения $U_k(t)x$, определяемые через $R_{\mathscr{A}}(\lambda)x$, тоже не зависят от λ и равны полиномам соответствующего порядка $\sum\limits_{j=0}^{k-1} t^j x_j$ с некоторыми x_j, равными линейным комбинациям из элементов $R^i_{\mathscr{A}}(\lambda)x$. Имеем

$$\begin{gathered} U_1(t)x = R_{\mathscr{A}}(\lambda)x, \quad x \in \mathscr{A}^2 0 = \ker R^2_{\mathscr{A}}(\lambda), \\ U_2(t)x = (\lambda t - 1)R^2_{\mathscr{A}}(\lambda)x + tR_{\mathscr{A}}(\lambda)x, \quad x \in \mathscr{A}^3 0, \\ U_3(t)x = (\lambda^2 t^2/2 - 2\lambda t + 1)R^3_{\mathscr{A}}(\lambda)x + t(\lambda t/2 - 1)R^2_{\mathscr{A}}(\lambda))x + t^2/2R_{\mathscr{A}}(\lambda)x,\ x \in \mathscr{A}^4 0, \\ \ldots, U_n(t)x = \sum_{i=1}^{n} a_i(t,\lambda)R^i_{\mathscr{A}}(\lambda)x,\ a_i(t,\lambda) = \sum_{k=o}^{i-1}(-1)^{k+i-1}C^k_{i-1}\lambda^k\frac{t^k}{k!},\ x \in \mathscr{A}^{n+1}0. \end{gathered} \tag{24}$$

Независимость $U_1(t)$ от λ следует из равенства

$$dU_1(t)x/d\lambda = R'(\lambda)x = -R^2(\lambda)x = 0.$$

Далее по индукции можно доказать, что $dU_k(t)x/d\lambda = 0$, $x \in \mathscr{A}^{k+1}0$, $k = 2, 3, \ldots$. $\square$

Примеры вырожденных полугрупп, их генераторов и корректных вырожденных задач Коши мы можем построить, используя известные примеры интегрированных полугрупп с неплотно определенными генераторами [10, 15, 17] следующим образом. Пусть A — генератор интегрированной полугруппы $\{V(t), t \geq 0\}$ в пространстве X. Предположим, что подпространство $\overline{D(A)} =: X_1$ дополняемо в X до некоторого подпространства Y, т. е. $X = X_1 \oplus Y$. Пусть $B := P_{X_1}$ — проектор на подпространство X_1 в X. Тогда $\ker B = Y$, $\operatorname{im} B = X_1$ и

$$(\lambda I - A)x = (\lambda B - A)x, \quad x \in D(A),$$
$$(\lambda B - A)^{-1}x = (\lambda I - A)^{-1}x = R_A(\lambda)x, \quad x \in \overline{D(A)}.$$

Следовательно, MFPHY-оценки, верные для $R_A(\lambda)$ на X_1, верны и для $(\lambda B - A)^{-1}B$ на X.

Именно, пусть

$$X = C[0,\infty),\ A = -d/dx,\ D(A) = \{f \in C[0,\infty) \mid f' \in C[0,\infty), f(0) = 0\}.$$

В этом случае $Y = \{\text{const}\}$, $(Bf)(x) = f(x) - f(0)$,

$$D_1 = \{f \mid Af \in \operatorname{im} B\} = \{f \in C[0,\infty) \mid f' \in C[0,\infty), f(0) = f'(0) = 0\}$$

и задача Коши

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \quad x \in [0,\infty),\ t \geq 0, \quad u(x,0) = f(x),$$

является равномерно корректной на D_1: для $f \in D_1$ ее решением будет

$$u(x,t) = f(x-t),\ x \geq t, \quad u(x,t) = 0,\ x < t.$$

Рассмотрим теперь условия корректности задачи Коши для включения в случае, когда решение не обладает экспоненциальной ограниченностью, и в локальном случае.

3. Корректность локальной задачи Коши для включений.

Определение 7. Задача (3) называется *n-корректной на $E \subseteq D(\mathscr{A}^{n+1})$*, если для любого $x \in E$ существует единственное решение $u(t)$, $0 \leq t < T$, такое, что для всех $\tau < T$

$$\sup_{t \leq \tau} \|u(t)\| \leq C_\tau \|x\|_n.$$

Покажем, что n-корректность задачи Коши для включения связана с существованием вырожденной локально интегрированной полугруппы, порожденной $\mathscr{A}$ (см. определение 6 при $T < \infty$), и с условием на резольвенту $\mathscr{A}$, определяемым следующим образом.

($\mathscr{R}_m$) Существует параметр $m \in \mathbb{R}$ такой, что

$$\|R_{\mathscr{A}}(\lambda)\| \leq C|\lambda|^m$$

для любого $\lambda \in \Lambda_m$ и некоторого $C > 0$.

Теорема 6. *Пусть $\mathscr{A}$ — линейный многозначный оператор в банаховом пространстве X. Если задача Коши (3) n-корректна на $D(\mathscr{A}^{n+1})$ и $\rho(\mathscr{A}) \cap \Lambda_{n+1} \neq \varnothing$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то выполнено условие $(\mathscr{R}_m)$ с $m = n+1$. Если выполнено условие $(\mathscr{R}_m)$, то задача (3) p-корректна на $R^{p+1}X_1$ при $p > m+1$.*

Доказательство. Пусть задача (3) n-корректна на $D(\mathscr{A}^{n+1}) = D_{n+1}$. Тогда можно проверить, что построенное в теореме 3 семейство операторов $\{V(t) := U_{n+1}(t),\ t \in [0,T)\}$ удовлетворяет включению (14) с $k = n+1$. Сначала, учитывая исходное включение для $U(t)$:

$$U'(t)x \in \mathscr{A}U(t)x, \quad x \in D_{n+1},$$

проверяем для $U_1(t)$ включение (14) при $k = 1$ на D_n, затем, используя соответствующие включения для $U_k(t)$ $(k = 1, \dots n)$ на D_{n+1-k}, проверяем включение (14) с $k = n+1$ для $V(t) = U_{n+1}(t)$ на X. Отсюда, применяя доказательство предложения 1, получаем включение (15) (где k в определении $R(\lambda, \tau)$ равно $n+1$). Значит, оператор $\lambda I - \mathscr{A}$ имеет правый обратный в области Λ_{n+1}. Отсюда и из условия

$$\rho(\mathscr{A}) \cap \Lambda_{n+1} =: \Lambda \neq \varnothing$$

следует, что для $\mathscr{A}$ в области Λ существует резольвента. Продолжая аналитически резольвенту в область Λ_{n+1}, приходим к оценке (16) для $R_{\mathscr{A}}(\lambda)$ с $k = n+1$. Следовательно, выполнено условие $(\mathscr{R}_{n+1})$.

Обратно, если для $R_{\mathscr{A}}(\lambda)$ выполнено условие $(\mathscr{R}_m)$, то оператор-функция

$$V_p(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \lambda^{-p} e^{\lambda t} R_{\mathscr{A}}(\lambda)\, d\lambda, \quad \Gamma = \partial\Lambda_p, \tag{25}$$

определена и непрерывна по $t \in (-\infty, \tau_p)$, где $\tau_p := \frac{\tau}{m}(p-m-1)$, для любого $p > m+1$. Используя абстрактную теорему Коши, покажем, что $V_p(t)$ удовлетворяет уравнению (13) при $k = p$ на $D(\mathscr{A})$:

$$\int\limits_0^t V_p(s)(\mathscr{A} \pm \lambda I)x\, ds = \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\lambda^{-p+1} e^{\lambda s} R_{\mathscr{A}}(\lambda)x - \lambda^{-p} e^{\lambda s} x)\, d\lambda \right) ds$$
$$= V_p(t)x - \frac{t^p}{p!}x, \quad t \in [0, \tau_p),\ x \in D(\mathscr{A}).$$

Применяя оператор $\mathscr{A} \pm \lambda I$ к $\int\limits_0^t V_p(s)x\, ds$, $x \in X$, получаем включение (14) при $k = p$. Отсюда, как показано в теореме 4, следует корректность задачи (3) на $R^{p+1}X_1$. Более того, для любого $T > 0$ единственным устойчивым относительно $x \in R^{p+1}X_1$ по норме $\|\cdot\|_p$ решением задачи (3) является

$$u(t) = V_p^{(p)}(t)x, \quad t \in [0, \tau_p),$$

где $p = p(T)$ выбрано так, что $\tau_p \geq T$. $\square$

Итак, мы показали, что для n-корректности локальной задачи Коши (3) на различных подмножествах E начальных данных из пространства X необходимым и достаточным является условие $(\mathscr{R}_m)$. Теперь рассмотрим корректность задачи (3) с начальными данными из X в пространстве абстрактных распределений $\mathscr{D}'(X)$, которая, как и в невырожденном случае [18, 19], тесно связана с n-корректностью локальной задачи (3).

По определению пространство абстрактных распределений $\mathscr{D}'(X)$ (или пространство распределений на некотором банаховом пространстве X) является пространством линейных непрерывных операторов из $\mathscr{D}$ в X , т. е. $\mathscr{D}'(X) := \mathscr{L}(\mathscr{D}, X)$, $\mathscr{D}'{}_0(X)$ — подпространство распределений, равных нулю на $(-\infty, 0)$, $\mathscr{D}$ — пространство Л. Шварца бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathbb{R}$, $\mathscr{D}_0$ — с носителем в $[0, \infty)$.

Пояснить связь n-корректности задачи (3) и существования локальной интегрированной полугруппы с корректностью задачи в пространстве абстрактных распределений можно с точки зрения абстрактной структурной теоремы, согласно которой любое (абстрактное) распределение локально имеет непрерывную первообразную некоторого порядка [19]. Такой первообразной от распределения операторов решения и является интегрированная полугруппа соответствующего порядка.

Рассмотрим классическое решение задачи (3) $u(t)$, $t \geq 0$, продолженное нулем при $t < 0$, как элемент $U \in \mathscr{D}_0'(X)$ в пространстве распределений. Имеем

$$\int_0^\infty \varphi(t) u'(t)\, dt = -\langle U, \varphi' \rangle - \varphi(0) x \ \in \mathscr{A} \int_0^\infty \varphi(t) u(t)\, dt = \mathscr{A} \langle U, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Отсюда следует определение обобщенного решения: абстрактное распределение $U \in \mathscr{D}_0'([D(\mathscr{A})])$ называют *решением задачи Коши* (3) *в смысле распределений*, если для любой $\varphi \in \mathscr{D}$

$$\langle U, \varphi' \rangle + \mathscr{A} \langle U, \varphi \rangle \ni -\langle \delta, \varphi \rangle x, \quad x \in X, \tag{26}$$

или, в терминах свертки, $P * U \ni \delta \otimes x$, где

$$P := \delta' \otimes I - \delta \otimes \mathscr{A} \ \in \ \mathscr{D}_0'(\mathscr{L}([D(\mathscr{A})], X)), \quad [D(\mathscr{A})] := \{D(\mathscr{A}), \ \|\cdot\|_{\mathscr{A}}\},$$

$$\langle \delta \otimes x, \varphi \rangle := \langle \delta, \varphi \rangle x, \quad \langle \delta' \otimes I, \varphi \rangle := \langle \delta', \varphi \rangle I, \quad \langle \delta \otimes A, \varphi \rangle := \langle \delta, \varphi \rangle \mathscr{A}.$$

Определение 8. Задача Коши (3) называется *корректной в смысле распределений*, если для любого $x \in X$ существует $U \in \mathscr{D}_0'([D(\mathscr{A})])$ (единственное решение задачи (26)) и для любой последовательности $x_n \to 0$ соответствующая последовательность решений U_n сходится к нулю в пространстве $\mathscr{D}_0'([D(\mathscr{A})])$.

Продемонстрированная в теоремах 1–6 техника включений и вырожденных полугрупп позволяет подобно задаче Коши с однозначным оператором получить условия корректности задачи (3) в смысле распределений. В предположении разложения пространства докажем критерий корректности в пространстве распределений и тесно связанный с ним критерий n-корректности.

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{A}$ — линейный замкнутый многозначный на X оператор и при некотором $n \in \mathbb{N}$ имеет место разложение $X = X_{n+1} \oplus \ker R^{n+1}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны условию $(\mathscr{R}_m)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$.*

(I) *Задача Коши* (3) *корректна в смысле распределений, при этом обобщенное решение является вырожденным для $x \in \mathscr{A}^{n+1} 0 = \ker R^{n+1}$.*

(II) *Существует распределение операторов решения задачи* (26)*:*

$$S \in \mathscr{D}_0'(\mathscr{L}(X, [D(\mathscr{A})]),$$

вырожденное на $\ker R^{n+1}$ и такое, что

$$P * S \ni \delta \otimes I_X, \quad S * P = \delta \otimes I_{[D(\mathscr{A})]}. \tag{27}$$

(III) *Для любого* $T > 0$ *существует* $p \in \mathbb{N}$ *такое, что задача Коши* (3) p-*корректна на* $D(\mathscr{A}^{p+1})$.

Доказательство. (I) $\Longleftrightarrow$ (II). Эквивалентность этих утверждений подобно невырожденному случаю [18] основана на равенстве, связывающем решение задачи (26) $U \in \mathscr{D}_0'([D(\mathscr{A})])$ с распределением $S \in \mathscr{D}_0'(\mathscr{L}(X, [D(\mathscr{A})])$:

$$\langle U, \varphi\rangle = \langle S, \varphi\rangle x = \langle Sx, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}, \quad x \in X.$$

(II) $\Longrightarrow$ $(\mathscr{R}_m)$. Абстрактное распределение $S \in \mathscr{D}_0'(\mathscr{L}(X, [D(\mathscr{A})])$, как и любое распределение из $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, локально на любом отрезке может быть продолжено с пространства $\mathscr{D}$ на пространство j раз непрерывно дифференцируемых функций, где порядок j зависит от отрезка. На этом основано построение для S первообразной порядка $j+2$ [19]:

$$V(t) := \langle S, \psi_{t,j}\rangle, \quad \text{где } \psi_{t,j}(s) = \chi(s)\eta_j(t-s) \in \mathscr{D}^j[-1, T],$$

$$\chi(s) = \begin{cases} 0, & s \le -1, \\ 1, & s \ge 0, \end{cases}, \quad \chi(s) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \eta_j(t) = \begin{cases} t^{j+1}/(j+1)!, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Подобно невырожденному случаю [18, 19] из соотношений (27) для S вытекают соотношения (13), (14) при $k = j+2$ для $V(t)$, $t \in [0, T)$. Следовательно, V является локальной $j+2$ раз интегрированной полугруппой, порожденной $\mathscr{A}$. Как показано в предложении 1, для резольвенты генератора этой полугруппы выполнено условие $(\mathscr{R}_m)$ с $m = j+2$.

$(\mathscr{R}_m) \Longrightarrow$ (III). По резольвенте, удовлетворяющей условию $(\mathscr{R}_m)$, для любого $p > m+1$ строим оператор-функцию $V_p(t)$, $t \in [0, \tau_p)$, определенную на X, по формуле (25). Как показано в теореме 6, она является локальной p раз интегрированной полугруппой, порожденной генератором $\mathscr{A}$. Через V_p, где p выбрано так, что $\tau_p \ge T$, строится решение локальной задачи (3):

$$u(t) := V_p^{(p)}(t)x, \quad t \in [0, T), \ x \in R^{p+1}X_1.$$

Это решение единственно и устойчиво относительно x по норме $\|\cdot\|_p$. В силу разложения (6) при $p \ge n$ имеем

$$R^{p+1}X = R^{p+1}X_{p+1} = R^{p+1}X_1.$$

Отсюда следует p-корректность локальной задачи (3) на $R^{p+1}X = D(\mathscr{A}^{p+1})$.

(III) $\Longrightarrow$ (I). Решение $U \in \mathscr{D}_0'([D(\mathscr{A})])$ задачи Коши (26) с начальным условием

$$x \in X = X_{n+1} \oplus \ker R^{n+1} \quad (X = X_{p+1} \oplus \ker R^{n+1} \text{ при } p \ge n)$$

строим через семейство операторов $\{U_p(t), t \in [0, T)\}$, определенных в теореме 5 и продолженных нулем для $t < 0$, следующим образом:

$$\langle U, \varphi\rangle = \langle Sx, \varphi\rangle := \big\langle U_p^{(p)}x, \varphi\big\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{28}$$

Здесь для любого $\varphi \in \mathscr{D}$ за счет увеличения p можно T выбрать так, что $\operatorname{supp}\varphi \in [0, T)$. При этом

$$\big\langle U_p^{(p)}, \varphi\big\rangle = \big\langle U_{p'}^{(p')}, \varphi\big\rangle, \quad p' \ge p.$$

Семейство $\{U_p(t)\}$ с учетом разложения пространства построено в теореме 5 на X_{p+1} и на $\ker R^{n+1}$, т. е. на X. В теореме 6 показано, что исходя из включения для $U_0(\cdot)x$, равного $u(\cdot)$ на D_{p+1} и нулю на $\mathscr{A}0$, для операторов $U_p(t)$, определенных на X, получаем (13) и (14) с $k = p$ на

$$D_{p+1} \oplus \ker R^{n+1} \quad \text{и} \quad X = X_{p+1} \oplus \ker R^{n+1}, \ p \ge n,$$

соответственно. Отсюда вытекают соотношения (27) для $S := U_p^{(p)}$. По построению $U_p(t)x$, $x \in X$, принадлежат $D(\mathscr{A})$, следовательно, $U := Sx \in \mathscr{D}_0'([D(\mathscr{A})])$. При этом распределение $U = Sx$ для $x \in X_{p+1}$ является пределом классических решений в пространстве распределений, а для $x \in \ker R^{n+1}$ в силу (24) равно сумме δ-функций и их производных в нуле:

$$U = \sum_{j=1}^{p} \delta^{(j)} x_j$$

с некоторыми x_j, равными линейным комбинациям из элементов $R^i x$. Следовательно, решение $U \in \mathscr{D}_0'([D(\mathscr{A})])$ вырожденно на $\mathscr{A}^{n+1}0$, т. е.

$$\langle U, \varphi \rangle = 0 = \langle Sx, \varphi \rangle$$

для любых $\varphi \in \mathscr{D}_0$, $x \in \ker R^{n+1}$.

Устойчивость построенного решения U вытекает из свойств полугруппы $\{U_p(t)\}$ и формулы (28). Единственность решения следует из уравнения для S и ассоциативности свертки: $U = (\delta \otimes I) * U = S * P * U = S * (\delta \otimes x) = Sx$. $\square$

В заключение отметим, что проведенное исследование корректности позволяет для некорректных вырожденных задач Коши строить приближенное решение, устойчивое относительно изменения исходных данных из пространства X с помощью регуляризующих операторов. Как следует из доказанных теорем, первым шагом в построении таких операторов для некорректных задач Коши является операция проектирования на подпространство X_{n+1}. Рассматривая на X_{n+1} уже невырожденную задачу Коши, можно использовать известные регуляризующие операторы, учитывающие дифференциальную специфику задачи (см., например, [20–22]).

Автор искренне признательна В. В. Иванову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1990 Т. 21. С. 130–264. (Итоги науки и техники).
2. *Carrol R., Showalter R. E.* Singular and degenerate Cauchy problems. New York: Acad. Press, 1976.
3. *Abdelasis N. H., Neubrander F.* Degenerate abstract Cauchy problem // Seminar notes in funct. analysis and PDE. Baton Rouge: Louisiana State Univ., 1991–1992. P. 1–12.
4. *Zaidman S.* Well-posed Cauchy problem and related semigroups of operators for the equation $Bu'(t) = Au(t)$, $t \geq 0$, in Banach spaces // Libertas Math. 1992. V. 12. P. 147–159.
5. *Yagi A.* Generation theorems of semigroups for multivalued linear operators // Osaka J. Math. 1991. V. 28, N 2. P. 385–410.
6. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999.
7. *Knuckles C., Neubrander F.* Remarks on the Cauchy problem for multi-valued linear operators // Math. Res. Berlin: Academie-Verl. 1994. V. 82. P. 174–187.
8. *Мельникова И. В., Альшанский М. А.* Корректность вырожденной задачи Коши в банаховом пространстве // Докл. РАН. 1994. Т. 336, № 1. С. 17–24.
9. *Мельникова И. В., Гладченко А. В.* Корректность задачи Коши для включений в банаховых пространствах // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 6. С. 736–739.
10. *Arendt W.* Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems // Israel J. Math. 1987. V. 59. P. 327–352.
11. *Thieme H. R.* Integrated semigroups and integrated solutions to abstract Cauchy problems // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 152, N 2. P. 416–447.
12. *Arendt W., El-Mennaoui O., Keyantuo V.* Local integrated semigroups: evolution with jumps of regularity // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 186, N 2. P. 572–595.

13. *Cioranescu I., Lumer G.* Regularizations of evolution equations via kernels $K(t)$, K-evolution operators and convoluted semigroups, generation theorems // Seminar notes in funct. analysis and PDE. Baton Rouge: Louisiana State Univ., 1994. P. 45–52.
14. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
15. *Melnikova I. V., Alshansky M. A.* Well-posedness of the Cauchy problem in Banach space: regular and degenerate cases // J. Math. Sci. 1997. V. 87, N 4. P. 3732–3777.
16. *Tanaka N., Okazawa N.* Local C-semigroups and local integrated semigroups // Proc. London Math. Soc. 1990. V. 61, N 1. P. 63–90.
17. *Kellermann H., Hieber M.* Integrated semigroups // J. Funct. Anal. 1989. V. 84, N 1. P. 160–180.
18. *Мельникова И. В.* Свойства d-полугрупп Лионса и обобщенная корректность задачи Коши // Функцион. анализ и его прил. 1997. Т. 31, № 3. С. 23–37.
19. *Fattorini H. O.* The Cauchy problem. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1983 (Encyclop. Math. Appl., 18).
20. *Лаврентьев М. М.* Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1973.
21. *Мельникова И. В.* Регуляризация некорректных дифференциальных задач // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 125–134.
22. *Melnikova I. V.* General theory of the ill-posed Cauchy problem // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1995. V. 3, N 2. P. 149–171.

Статья поступила 15 марта 1999 г., окончательный вариант — 1 февраля 2001 г.

Мельникова Ирина Валерьяновна
Уральский гос. университет, математико-механический факультет
просп. Ленина, 51, Екатеринбург 620083
`Irina.Melnikova@usu.ru`