Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.988.67

БИФУРКАЦИЯ И СИММЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ О КАПИЛЛЯРНО–ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ

Б. В. Логинов

Аннотация: Изложена общая схема применения методов группового анализа (РЖ Мат 1978 11Б883К) к задачам теории ветвления с нарушением симметрии. Рассмотрено применение к построению и исследованию уравнения разветвления задачи о капиллярно-гравитационных волнах в пространственном слое флотирующей жидкости. Библиогр. 42.

Введение

Первые результаты использования групповой симметрии в теории ветвления решений нелинейных уравнений, полученные в работах В. И. Юдовича [1, 2], были применены его учениками в ряде прикладных задач гидродинамики. Развитие этих результатов было продолжено в [3]. Дальнейшее построение теории ветвления в условиях групповой инвариантности до 1980 г. изложено в [4], где приведена обширная библиография. На основе исследования действия группы в подпространстве нулей линеаризованного оператора и его дефектном подпространстве были предложены различные способы редукции (понижения порядка) уравнения разветвления (УР) при определении многопараметрических семейств решений и доказана теорема [5] о наследовании групповой симметрии нелинейной задачи соответствующим УР, позволившая на основе методов группового анализа [6] решить задачу определения общего вида УР по допускаемой им группе симметрий [7–10]. Эти методы оказались более эффективными по сравнению с применявшимися ранее схемами теории инвариантов [4, 11, 12]. В частности, они значительно упростили вычислительную работу по определению ненулевых коэффициентов УР, что особенно существенно при высоких размерностях n вырождения линеаризованного оператора (например, при $n = 6, 8, 12, 24, 48, 6 + 24, 24 + 48, \dots$ в задаче о фазовых переходах в статистической теории кристалла [4, 7, 13, 14]).

Несколько позднее методы группового анализа были применены автором и его учениками в ряде задач теории капиллярно-гравитационных поверхностных волн (КГВ) в точной постановке [15–21]. Это восходящие к исследованиям А. И. Некрасова [22] и Н. Е. Кочина [23, 24] задачи о КГВ на поверхности пространственного жидкого слоя и границе раздела двух жидкостей над ровным дном, аналогичные задачи о КГВ на поверхности цилиндра с силой гравитации, направленной по радиусам к его оси, близкая по типу задача о рельефе слоя магнитной жидкости при воздействии вертикально направленного магнитного поля и, наконец, задача о КГВ в пространственном слое флотирующей

Работа выполнена при финансовой поддержке Грантового центра НГУ (грант 23–98).

жидкости. Методы теории ветвления применяются в работах [15–21] непосредственно к описывающей явление системе дифференциальных уравнений. Линеаризованный оператор выделяется «распрямлением» свободной границы (специальной заменой переменных), а его фредгольмовость обосновывается наличием слагаемого, учитывающего эффект капиллярности в интеграле Бернулли, и результатами современной теории дифференциальных уравнений в частных производных на многообразиях [25].

Обзор применений методов группового анализа в теории ветвления в условиях групповой симметрии содержится в работе [26].

Задачи о КГВ являются типичными бифуркационными задачами о нарушении симметрии. Поэтому в первой части настоящей работы изложена общая схема применения методов группового анализа в условиях нарушения симметрии. Затем дано ее применение к вычислению асимптотики малых разветвляющихся решений задачи о КГВ в пространственном слое флотирующей жидкости. Использованы терминология и обозначения из [4, 26, 27].

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН В. В. Пухначеву, обратившему в 1975 г. его внимание на этот класс задач, академику РАН Л. В. Овсянникову и профессору Н. Х. Ибрагимову за ценные советы и полезное обсуждение на семинарах и конференциях.

§ 1. Методы группового анализа в бифуркационных задачах с нарушением симметрии

В банаховых функциональных пространствах E_1, E_2 рассмотрим нелинейное уравнение

$$By - A(\lambda)y = R(y,\lambda), \quad \|R(y,\lambda)\| = o(\|y\|), \tag{1}$$

B, $A(\lambda)$ — линейные операторы из E_1 в E_2, $R(\cdot,\lambda)$ — нелинейный оператор, отображающий некоторую окрестность нуля из E_1 в окрестность нуля в E_2, достаточно гладкие по y и бифуркационному параметру $\lambda \in I \subset \mathbb{R}^1$. Предположим, что уравнение (1) допускает группу движений евклидова пространства $\mathbb{R}^s$, $s > 1$. В окрестностях критических значений λ_0 параметра λ (собственных значений задачи $B\varphi - A(\lambda)\varphi = 0$) рождаются периодические решения (инвариантные относительно сдвигов на кратные периодов по переменным $x_1, \dots, x_s$ и преобразующиеся друг в друга под действием дискретной группы симметрий, определяемой группой вращений-отражений, действующей в n-мерном подпространстве нулей $N = N(B - A(\lambda_0))$ фредгольмова или нётерова оператора $B - A(\lambda_0)$)). Они образуют семейства решений, зависящие от параметров непрерывной группы сдвигов в $\mathbb{R}^s$. Таким образом, симметрия относительно группы движений евклидова пространства $\mathbb{R}^s$ сменяется симметрией кристаллографической группы $G = G_1 \rtimes \widetilde{G}^1$, являющейся полупрямым произведением s-параметрической непрерывной группы сдвигов $G_1 = G_1(\alpha), \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_s)$, и дискретной группы $\widetilde{G}^1$, определяемой базисными элементами N и порожденной основными трансляциями $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$, $\mathbf{t}_m = m_1\mathbf{a}_1 + \dots + m_s\mathbf{a}_s$. При этом $n = 2s$ в случае одной решетки периодичности и $n = 2\sum\limits_1^p s_j$ в случае p решеток размерностей $s_j \leqslant s$. Здесь мы следуем схеме, заимствованной из физики твердого тела [28–30] и кристаллографии [31, 32]. Базисные элементы подпространства нулей N имеют вид функций Блоха $\varphi_r = \varphi_{\mathbf{l}_r} = u(x,z)e^{i\langle \mathbf{l}_r, x\rangle}$ (на переменные z группа не действует), где векторы $\mathbf{l}_r$, $r = 1, \dots, n = \dim N$, задаются дисперсионным соотношением, определяющим критические значения бифуркационного параметра и связывающим целые кратные периодов $|\mathbf{a}_k|$, $k=1,\dots,s$, с безразмерными параметрами задачи. Всюду ниже собственные элементы φ_r и отвечающие им векторы $\mathbf{l}_r$ занумерованы так, что если вектору $\mathbf{l}$ дан нечетный номер, то вектору $-\mathbf{l}$ приписывается последующий четный номер. Тогда сдвиги $\mathbf{t}_m$ представляются посредством $e^{i\langle \mathbf{l}_r,\mathbf{t}_m\rangle}$, т. е. $\mathbf{t}_m\varphi_{\mathbf{l}}(q)=e^{i\langle \mathbf{l},\mathbf{t}_m\rangle}\varphi_{\mathbf{l}}(q)$. Инвариантность базисных элементов $\varphi_{\mathbf{l}}\in N$ относительно сдвигов $\mathbf{t}_m$ приводит к соотношению $1=e^{i\langle \mathbf{l},\mathbf{t}_m\rangle}$, показывающему, что векторы $\mathbf{l}$ принадлежат решетке Λ', обратной решетке Λ, порожденной основными трансляциями $\mathbf{a}_k$, $k=1,\dots,s$. Таким образом, в случае одной решетки периодичности размерности s группа $\widetilde{G}^1$ является группой вращений-отражений параллелепипеда Π_0, построенного на основных трансляциях, и прямой суммой соответствующих групп $\widetilde{G}^1_j$ в случае p решеток размерностей s_j, $j=1,\dots,p$. Дискретная подгруппа $\widetilde{G}^1$ группы G выражается подстановками номеров r векторов $\mathbf{l}_r$. Построенная модель подпространства N определяет ячеистую структуру ответвляющихся семейств s-параметрических решений, инвариантных относительно дискретной группы T сдвигов определенных периодов по определенным направлениям $\mathbf{a}_k$ и переходящих друг в друга при преобразованиях группы $\widetilde{G}^1$ симметрии векторов $\mathbf{l}_r$.

Возникает вопрос об исследовании дисперсионного соотношения как уравнения относительно кратностей периодов $|\mathbf{a}_k|$, $k=1,\dots,s$. Нужно доказать существование физических параметров задачи, для которых дисперсионное соотношение удовлетворялось бы при нескольких значениях целых кратных периодов, т. е. определить возможные порядки $n=\dim N$ вырождения оператора $B-A(\lambda_0)$.

Уравнение разветвления в нётеровом случае имеет вид системы m уравнений с n неизвестными:

$$f(\xi,\varepsilon)=\{f_\sigma(\xi,\varepsilon)\}_1^m=0,\quad f_\sigma(\xi,\varepsilon)\equiv\left\langle R\left(u(\xi,\varepsilon)+\sum_{i=1}^n\xi_i\varphi_i,\varepsilon\right),\psi_\sigma\right\rangle,\quad \varepsilon=\lambda-\lambda_0, \tag{2}$$

где (n,m) — d-характеристика нётеровой точки λ_0 оператор-функции $B-A(\lambda)$, $N=\operatorname{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ — подпространство нулей, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ — координаты разложения $N\ni\varphi=\sum\limits_1^n\xi_i\varphi_i$, а $N^*=\operatorname{span}\{\psi_1,\dots,\psi_m\}$ — дефектное подпространство.

По теореме о наследовании групповой симметрии задачи определения параметрических решений соответствующее УР $0=f(\xi,\varepsilon):\Xi^n\to\Xi^m$ допускает s-параметрическую группу вращений $SO(2)\times\dots\times SO(2)$, гомоморфную непрерывной группе сдвигов $G_1(\alpha)$, и дискретную группу вращений-отражений $\widetilde{G}^1$, определяемую базисными элементами φ_r (векторами $\mathbf{l}_r$), т. е.

$$f(\mathscr{A}_g\xi,\varepsilon)=\mathscr{B}_gf(\xi,\varepsilon), \tag{3}$$

где $\mathscr{A}_g$ — представление группы G в Ξ^n, контраградиентное к представлению в N, а $\mathscr{B}_g$ — ее представление в N^*. Аналогичная картина возникает при действии группы $\mathscr{B}_g$ в N^*: базисные элементы $\psi_{\mathbf{k}_\sigma}$ нумеруются векторами решетки K', обратной к решетке периодичности K, объемлемой или совпадающей с решеткой Λ. Уравнения системы разветвления (2) переходят друг в друга при действии подстановок номеров σ векторов $\mathbf{k}_\sigma$. Поэтому при построении УР достаточно выписать уравнения, отвечающие векторам, порождающим траектории в множестве $\{\mathbf{k}_\sigma\}_1^m$. Подстановки $\mathscr{B}_g$, сохраняющие номер некоторого уравнения, дают соотношения симметрии (равенства) между его коэффициентами одного порядка.

Далее УР предполагается аналитическим, т. е. функции f_σ аналитические в окрестности $\xi = 0$, $\varepsilon = 0$, и вещественным, т. е. f коммутирует с операцией $\bar{\jmath}$ комплексного сопряжения. Равенство (3) означает, что для наследуемой УР группы преобразований

$$\widetilde{\xi} = \mathscr{A}_g \xi, \quad \widetilde{f} = \mathscr{B}_g f \tag{4}$$

многообразие $\mathscr{F} = \{\xi, f \mid f - f(\xi, \lambda) = 0\}$ в пространстве Ξ^{n+m} является инвариантным многообразием. Рассматривая s-параметрическую группу преобразований (4), предполагаем, что $\mathscr{F}$ — ее неособое инвариантное многообразие. Это означает, что если $\{X_\nu; F_\nu\}_1^s$ — базис соответствующей алгебры Ли инфинитезимальных операторов, то ранг $r(X_\nu; F_\nu)|_{\mathscr{F}}$ матрицы $M\big(X_\nu^i; F_\nu^i\big)$ их коэффициентов ($\nu = 1, \dots, s$; $i = 1, \dots, n$; $j = n+1, \dots, n+m$; ν — номер строки, i, j — номера столбцов) на многообразии $\mathscr{F}$ совпадает с ее общим рангом r_*. Тогда если

$$I_1(\xi, f), \dots, I_{n+m-r_*}(\xi, f) \tag{5}$$

— базисная система функционально независимых инвариантов группы (4), то по теореме Л. В. Овсянникова [6] инвариантное многообразие $\mathscr{F}$ можно представить в виде

$$\Phi^\sigma(I_1, \dots, I_{n+m-r_*}) = 0, \quad \sigma = 1, \dots, m. \tag{6}$$

Для возможности построения общего вида УР (2) должно быть выполнено условие $\operatorname{rank}\big[\frac{\partial I_k}{\partial f_j}\big] = m$ независимости системы инвариантов (5) относительно f_j, $j = 1, \dots, m$. Оно может быть заменено требованием $r_*(X, F) = r_*(X)$ (см. [6, с. 250). Уравнения (6) в изложенной схеме построения инвариантных многообразий группы дают редукцию УР [4] с помощью полной системы функционально независимых инвариантов.

В аналитическом случае при высоких размерностях вырождения линеаризованного оператора возникают технические трудности, связанные с тем, что при разложении УР по однородным формам не все инвариантные мономы переменных ξ могут быть выражены через степени базисных инвариантов. Привлечение же дополнительных инвариантов приводит к повторению слагаемых в УР. Поэтому, используя инварианты наименьших возможных степеней, мы должны профакторизовать построенное разложение УР по степеням инвариантов по связям между использованными инвариантами. Эта факторизация по отношению к выражению внутри скобок будет обозначаться символом $[\dots]^{\mathrm{out}}$.

Всюду далее рассматривается фредгольмов случай $m = n$. Тогда системы векторов $\{\mathbf{l}_j\}_1^n$ и $\{\mathbf{k}_\sigma\}_1^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии и без ограничения общности можно считать, что они одинаково упорядочены, т. е. $\mathbf{l}_j \cong \mathbf{k}_j$ и $\mathscr{A}_g = \mathscr{B}_g$. Линейные части уравнений $f_j(\xi, \varepsilon) = 0$ имеют вид $a_j(\varepsilon)\xi_j$, поэтому из леммы Шура [33, 34] следует неприводимость относительно $G = G_1 \rtimes \widetilde{G}^1$ подпространств в N (N^*), отвечающих траекториям различных порождающих элементов в множестве $\{\mathbf{l}_j\}_1^n$. Если при действии $\widetilde{G}^1$ базис в N порождается одним элементом φ_1, то оно неприводимо относительно G и все $a_j(\varepsilon)$ равны. Если же таких порождающих векторов $\mathbf{l}$ несколько, то N оказывается приводимым и в УР более одной группы уравнений с равными $a_j(\varepsilon)$. Поскольку во фредгольмовом случае мы считаем, что $\mathscr{B}_g = \mathscr{A}_g$ (именно таково положение для УР, выведенного на основе леммы Шмидта [4]), при построении УР достаточно выписать уравнения с номерами векторов $\mathbf{l}_j$, порождающих траектории в множестве векторов $\{\mathbf{l}_j\}_1^n$. Остальные уравнения определяются подстановками группы $\widetilde{G}^1$. При этом подстановки группы $\widetilde{G}^1$, сохраняющие номер некоторого уравнения, дают соотношения симметрии между его коэффициентами одного порядка.

Замечание 1. Следует различать скалярный и векторный (элементы N — скалярные (векторные) функции) случаи. В первом инвариантность УР относительно отражений и комплексного сопряжения приводит к тому, что коэффициенты УР оказываются вещественными. В векторном случае они, вообще говоря, комплексные. Изложенная теория построения и исследования УР в скалярном случае применена к задаче о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла [7–9, 14, 26].

В работах [35–37] (см. также [4, § III.3; 26, п. 3.1]) для общей задачи о точках бифуркации (2), допускающей некоторую группу G, приведена техника построения решений, инвариантных относительно подгрупп H группы G, и доказана теорема существования таких решений.

1°. Пусть H — подгруппа непрерывной группы G. Тогда при поиске H-инвариантных решений УР редуцируется к системе более низкого порядка; если H — нормальный делитель G, то эта система допускает дальнейшую редукцию.

2°. Если G — конечная группа, то разложениям N (или Ξ_φ^n) и N^* на неприводимые инвариантные подпространства относительно $\mathscr{A}_g$ и $\mathscr{B}_g$ отвечает выделение из УР подсистем, группы инвариантности которых совпадают со всеми нормальными делителями G.

3°. Пусть уравнение (2) инвариантно относительно группы G, λ_0 — фредгольмова точка оператор-функции $B - A(\lambda)$ и существует инвариантное относительно G прямое дополнение $E_1^{\infty-n}(\lambda_0)$ к подпространству N. Пусть подпространство $N(B - A(\lambda_0); H)$ H-инвариантных элементов в N нетривиально и длина полного канонического жорданова набора (корневое число) $k(B - A(\lambda_0); H)$ нечетна. Тогда (1) имеет H-инвариантное решение.

На основе [38] в [4, § III.3] и [35] для случая вполне непрерывных операторов установлен глобальный результат для решений (2), инвариантных относительно подгрупп H. Используя теорему С. М. Никольского [27, с. 241], можно освободиться [26] от ограничения полной непрерывности.

4°. Пусть D — открытое связное подмножество $E_1 \dotplus R^1$, оператор $B - A(\lambda)$ замкнут и выполнены условия теоремы 3°. Если C — содержащая $(0, \lambda_0)$ связная компонента замыкания в D множества нетривиальных H-инвариантных решений (x, λ), $x \neq 0$, то выполнено одно из следующих трех свойств: а) C не ограничена в $E_1 \dotplus R^1$; б) $C \cap \partial D \neq 0$; в) C содержит точки $(0, \lambda^*)$, где $\lambda^* \neq \lambda_0$.

Группа $\widetilde{G}^1$ является подгруппой G. Относительно нее N может быть приводимо, даже если оно неприводимо относительно G. Если H — подгруппа $\widetilde{G}^1$, то подпространство H-инвариантных элементов в N (векторов в Ξ^n) определяется с помощью проекционного оператора $P(H) = \frac{1}{|H|} \sum\limits_{g \in H} \mathscr{A}_g$ [33, 34]. Для построения решений, инвариантных относительно нормальных делителей $\widetilde{G}^1$, нужно перейти в N к базису неприводимых относительно $\widetilde{G}^1$ инвариантных подпространств. Поскольку нормальные делители составлены из классов сопряженных элементов $\widetilde{G}^1$, это приводит к выделению из УР в новом базисе подсистем, группы инвариантности которых совпадают со всеми нормальными делителями $\widetilde{G}^1$. Достаточно в УР в новом базисе считать отличными от нуля только те неизвестные, которые отвечают указанным классам сопряженных элементов в $\widetilde{G}^1$. В скалярном случае эта процедура в подробностях проведена в [4,13,14] для задачи о кристаллизации в статистической теории кристалла.

§ 2. Капиллярно-гравитационные волны в пространственном слое флотирующей жидкости

Определяются периодические с периодами $\frac{2\pi}{a}$, $\frac{2\pi}{b}$ по x и y потенциальные течения флотирующей тяжелой капиллярной жидкости в пространственном слое со свободной верхней границей $z = f(x,y)$, близкой к горизонтальной плоскости $z = 0$, ответвляющиеся от основного движения с постоянной скоростью V в направлении оси Ox. Потенциал скорости имеет вид $\varphi(x,y,z) = Vx + \Phi(x,y,z)$, h — толщина слоя, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность несущей жидкости, ρ_0 — поверхностная плотность флотируемого вещества, g — ускорение свободного падения. Описывающая ответвляющиеся течения система дифференциальных уравнений в безразмерных переменных ($k = \frac{\rho_0}{\rho h}$, $F = \frac{\sqrt{hg}}{V}$ — величина, обратная числу Фруда, $\gamma = \frac{\sigma}{\rho g h^2}$ — число Бонда) записывается в виде

$$\Delta\Phi = 0, \quad -1 < z < f(x,y); \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,-1) = 0 \quad (\text{непротекание на дне } z = -1);$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = (\nabla f, \nabla_{xy}\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{при} \quad z = f(x,y); \tag{7}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + F^2 f + \frac{k}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\left[F^2 + \left(-\nabla f\cdot\nabla_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right)\right]$$

$$-\gamma F^2 \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = \text{const} \quad \text{при} \quad z = f(x,y) \quad (\text{интеграл Бернулли}).$$

Существование решений соответствующей плоской задачи методом интегральных уравнений доказано в [39, 40].

Система (7) инвариантна относительно двухпараметрической группы сдвигов $L_\beta g(x,y) = g(x+\beta_1, y+\beta_2)$ и отражений

$$s_1: x \to -x, \quad \Phi(x,y,z) \to -\Phi(-x,y,z), \quad f(x,y) \to f(-x,y),$$
$$s_2: y \to -y, \quad \Phi(x,y,z) \to \Phi(x,-y,z), \quad f(x,y) \to f(x,-y).$$

Выполняя распрямляющую свободную границу замену переменных

$$\zeta = (z - f(x,y))/(1 + f(x,y)), \quad \Phi(x,y,f(x,y) + \zeta(1+f(x,y))) = u(x,y,\zeta)$$

и полагая $F^2 = F_0^2 + \varepsilon$, где F_0 — критическое значение числа Фруда, получаем эквивалентную систему

$$\Delta u = w^{(0)}(u,f),\ -1 < \zeta < 0; \quad \frac{\partial u}{\partial\zeta}(x,y,-1) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial\zeta} - \frac{\partial f}{\partial x} = w^{(1)}(u,f),\ \zeta = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\zeta} + F_0^2 f - \gamma F_0^2\Delta f = w^{(2)}(u,f,\varepsilon) \quad \text{при } \zeta = 0, \tag{8}$$

где $w^{(j)}(u,f)$, $j = 0,1,2,$ — малые нелинейности [21]. Система (7) записывается в виде нелинейного функционального уравнения $BX = R(X,\varepsilon)$, $R(0,\varepsilon) \equiv 0$, $X = (u,f)$ — задачи о точках бифуркации с линейным фредгольмовым оператором

$B : C^{2+\alpha}(\Pi_0 \times [-1,0]) \dotplus C^{2+\alpha}(\Pi_0) \to C^{\alpha}(\Pi_0 \times [-1,0]) \dotplus C^{\alpha}(\Pi_0) \dotplus C^{\alpha}(\Pi_0)$, $0 < \alpha < 1$, где Π_0 — прямоугольник периодов в плоскости x, y со сторонами $a_1 = \frac{2\pi}{a}$ и $b_1 = \frac{2\pi}{b}$. Действительно, поскольку мы ищем периодические по x, y решения, система (8) может рассматриваться как функциональное уравнение на торе, и тогда фредгольмовость оператора B следует из результатов [25]. Требование эллиптичности интеграла Бернулли (последнее равенство (8)) в сочетании со вторым дифференциальным соотношением на границе приводит к ограничению на безразмерные параметры

$$k < \gamma F_0^2. \tag{9}$$

Рассмотрим однородную систему $BX = 0$. Прямоугольник периодов Π_0 со сторонами a_1 и b_1 вдоль осей координат определяет целочисленную решетку $\Lambda_{mn} = (ma_1, nb_1)$. Обратная решетка Λ'_{mn} также является прямоугольной [28–32] с основными векторами $\mathbf{l}^{(1)} = a\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}^{(2)} = b\mathbf{l}_2$ и общим вектором $\mathbf{l} = m\mathbf{l}^{(1)} + n\mathbf{l}^{(2)}$. Представляя $f(x,y)$ отрезком двойного ряда Фурье $a_{mn} \cos max \cos nby + b_{mn} \cos max \sin nby + c_{mn} \sin max \cos nby + d_{mn} \sin max \sin nby$ и решая задачу Неймана, отвечающую первым трем уравнениям системы $BX = 0$, находим

$$u(x,y,\zeta) = ma \frac{\operatorname{ch}[s_{mn}(\zeta+1)]}{s_{mn} \operatorname{sh} s_{mn}} [c_{mn} \cos max \cos nby + d_{mn} \cos max \sin nby \\ - a_{mn} \sin max \cos nby - b_{mn} \sin max \sin nby],$$

где $s_{mn}^2 = m^2a^2 + n^2b^2$. Тогда последнее уравнение системы $BX = 0$ дает пару чисел (m_j, n_j), связанных дисперсионным соотношением (ДС)

$$m_j^2 a^2 \left(\frac{\operatorname{ch} s_{m_j n_j}}{s_{m_j n_j} \operatorname{sh} s_{m_j n_j}} + k \right) = F_0^2 \left(1 + \gamma s_{m_j n_j}^2\right), \quad s_j^2 = s_{m_j n_j}^2 = m_j^2 a^2 + n_j^2 b^2. \tag{10}$$

При реализации (10) подпространство нулей $N(B) = \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $\varphi_k = \{\Phi_k, f_k\}$, имеет базис

$$\begin{aligned} \varphi_{1j} &= \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), -iv_2\} e^{i(m_j ax + n_j by)} = \varphi_{\mathbf{l}_{1j}} = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), -iv_2\} e^{i\langle \mathbf{l}_{1j}, q\rangle}, \\ \varphi_{3j} &= \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), -iv_2\} e^{i(m_j ax - n_j by)} = \varphi_{\mathbf{l}_{3j}} = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), -iv_2\} e^{i\langle \mathbf{l}_{3j}, q\rangle}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\varphi_{2j} = \varphi_{\mathbf{l}_{2j}} = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), iv_2\} e^{-i\langle \mathbf{l}_{1j}, q\rangle}, \quad \varphi_{4j} = \varphi_{\mathbf{l}_{4j}} = \frac{1}{2}\{v_{1j}(\zeta), iv_2\} e^{-i\langle \mathbf{l}_{3j}, q\rangle},$$

где

$$q = (x,y), \ v_{1j}(\zeta) = \frac{m_j a \sqrt{ab} \operatorname{ch}[s_j(\zeta+1)]}{\pi s_j \operatorname{sh} s_j}, \ v_2 = \frac{\sqrt{ab}}{\pi}, \ \mathbf{l}_{2j} = -\mathbf{l}_{1j}, \ \mathbf{l}_{4j} = -\mathbf{l}_{3j}$$

и j — номер решетки периодичности. В качестве вещественного базиса в $N(B)$ выбираются элементы

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{1_j} &= \{-v_{1_j}(\zeta) \sin m_j ax \cos n_j by, v_2 \cos m_j ax \cos n_j by\}, \\ \widehat{\varphi}_{2_j} &= \{-v_{1_j}(\zeta) \sin m_j ax \sin n_j by, v_2 \cos m_j ax \sin n_j by\}, \\ \widehat{\varphi}_{3_j} &= \{v_{1_j}(\zeta) \cos m_j ax \cos n_j by, v_2 \sin m_j ax \cos n_j by\}, \\ \widehat{\varphi}_{4_j} &= \{v_{1_j}(\zeta) \cos m_j ax \sin n_j by, v_2 \sin m_j ax \sin n_j by\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Если $n_j \neq 0$, то j-я решетка периодичности двумерна и ей отвечает четырехмерное подпространство $N(B)$, при $n_j = 0$ она одномерна, и соответствующее подпространство в $N(B)$ двумерно. Из (9) и (10) следует ограничение

$$k < \frac{\gamma m_j^2 a^2}{1 + \gamma n_j^2 b^2} \frac{\operatorname{ch} s_j}{s_j \operatorname{sh} s_j}. \tag{13}$$

Значительно упрощающий вычисление коэффициентов УР переход от вещественного базиса (12) к комплексному (11) осуществляется с помощью матрицы C с диагональными блоками C_j, если j-я решетка двумерная:

$$\varphi = C'\widehat{\varphi}, \quad C_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & i & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -i & -i & i \end{pmatrix}, \quad C_j^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & i \\ i & -1 & 1 & i \\ -i & -1 & 1 & -i \end{pmatrix} \tag{14}$$

или

$$C_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_j^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$$

(если j-я решетка одномерная). Если $\hat{t}(\eta, \varepsilon) = 0$ — УР в вещественных переменных η, то при переходе к комплексному базису (11) получаем эквивалентное УР в комплексных переменных ξ [4]:

$$t(\xi, \varepsilon) \equiv (C^{-1}\hat{t})(C\xi, \varepsilon) = 0, \quad \eta = C\xi. \tag{15}$$

Стандартными методами [41] при учете условия (9) проверяется самосопряженность по Лагранжу однородной системы (8) $BX = 0$. Аналогичные построения, примененные к неоднородной системе (8), приводят к условиям ее разрешимости, на основе которых вычисляются коэффициенты УР. Формулы для коэффициентов первого уравнения системы разветвления, отвечающего двумерной j-й решетке периодичности, имеют вид

$$t_{\alpha;k}^{(1_j)} = -\int\limits_{\Pi_0\times[-1,0]} w_{\alpha;k}^{(0)} u_{2_j}\, dxdyd\zeta + \int\limits_{\Pi_0} w_{\alpha;k}^{(1)}\left[u_{2_j}(x,y,0) + k\frac{\partial f_{2_j}}{\partial x}\right] dxdy + \int\limits_{\Pi_0} w_{\alpha;k}^{(2)} f_{2_j}\, dxdy, \tag{16}$$

где $w_{\alpha;k}^{(j)}$ — коэффициенты при $\xi^\alpha \varepsilon^k$ правых частей системы (8) в их разложении по $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и ε при применении метода неопределенных коэффициентов Некрасова — Назарова (см. [27, § 11]). Их вычисление выполнено для $n = 4$ (одна двумерная решетка) в [42] и для $n = 2 + 2$ (две одномерные) — в [21].

При принятой нумерации базисных элементов подпространства N и отвечающих им вершин прямоугольника $\widetilde{\Pi}_0$ в обратной решетке действие группы $\widetilde{G}^1$ в переменных ξ j-й решетки периодичности выражается подстановками индексов переменных ξ_{k_j}: $P_1 = (1_j, 2_j)(3_j, 4_j)$, $P_2 = (1_j, 3_j)(2_j, 4_j)$, $P_3 = (1_j, 4_j)(2_j, 3_j)$, а групповая симметрия УР в комплексном базисе — равенствами

$$(P_k t)_r(\xi, \varepsilon) = t_r(P_k\xi, \varepsilon), \quad k = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Действительно, преобразования векторных базисных элементов в N при действии группы $\widetilde{G}^1$ определяются формулами $P_1\varphi = \{P_1 u, -P_1 f\}$, $P_2\varphi = \{P_2 u, P_2 f\}$, $P_3\varphi = \{P_3 u, -P_3 f\}$, где $P_1 g(x,y) = g(-x,-y)$, $P_2 g(x,y) = g(x,-y)$, $P_3 g(x,y) = g(-x,y)$. Система (8) вещественна и потому инвариантна относительно операции $\bar{\jmath}$ комплексного сопряжения, что также наследуется УР.

Симметрия (8) относительно 2-параметрической группы сдвигов наследуется УР как инвариантность относительно 2-параметрической группы $\mathscr{A}_{g(\beta)} \cong SO(2) \times SO(2)$ вращений:

$$e^{i\langle \mathbf{l}_r, \beta\rangle} t_r(\xi, \varepsilon) = t_r(\dots, \xi_{1_j} e^{i\langle \mathbf{l}_{1_j}, \beta\rangle}, \dots, \xi_{4_j} e^{i\langle \mathbf{l}_{4_j}, \beta\rangle}, \dots; \varepsilon), \quad r = \overline{1, n}.$$

Группе $\mathscr{A}_{g(\beta)}$ отвечает базисная система инфинитезимальных операторов ($\partial\xi_k = \partial/\partial\xi_k$, j — номер решетки симметрии)

$$\begin{aligned} X_1 = \sum_j m_j a[-\xi_{1_j}\partial\xi_{1_j} + \xi_{2_j}\partial\xi_{2_j} - \xi_{3_j}\partial\xi_{3_j} + \xi_{4_j}\partial\xi_{4_j} \\ -t_{1_j}\partial t_{1_j} + t_{2_j}\partial t_{2_j} - t_{3_j}\partial t_{3_j} + t_{4_j}\partial t_{4_j}], \\ X_2 = \sum_j n_j b[-\xi_{1_j}\partial\xi_{1_j} + \xi_{2_j}\partial\xi_{2_j} + \xi_{3_j}\partial\xi_{3_j} - \xi_{4_j}\partial\xi_{4_j} \\ -t_{1_j}\partial t_{1_j} + t_{2_j}\partial t_{2_j} + t_{3_j}\partial t_{3_j} - t_{4_j}\partial t_{4_j}]. \end{aligned} \tag{18}$$

Общий ранг $r_*(M)$ матрицы $M = [\Xi^s_\nu, T^s_\nu]$ коэффициентов X_1 и X_2 равен 2, если $n_j \neq 0$ хотя бы для одного j, и 1, если $n_j \equiv 0$. Полная система функционально независимых инвариантов, определяемая уравнениями $X_s I(\xi,t) = 0$, $s = 1,2$, содержит n инвариантов вида $I_k(\xi,t) = \frac{t_k}{\xi_k}$, $k = \overline{1,n}$, и $\frac{n}{2}$ инвариантов вида $I_{n+k}(\xi) = \xi_{2k-1}\xi_{2k}$, $k = \overline{1,\frac{n}{2}}$. Остальные $2n - r_*(M) - n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - r_*(M) = \nu_0$ инвариантов выбираются в виде инвариантных мономов наименьших возможных степеней от ξ. Из вида матрицы M следует, что $T = \{\xi, t \mid t - t(\xi) = 0\}$ является неособым инвариантным многообразием действия группы в пространстве Ξ^{2n} векторов (ξ,t) и может быть представлено в виде (6), где $m = n$. Так как $r_*(\Xi,T) = r_*(\Xi)$, выполнено условие разрешимости $r\bigl[\frac{\partial I_k}{\partial t_j}\bigr] = n$ системы (6) относительно переменных t, и мы получаем общий вид УР, выраженный через степени инвариантов $I_{n+\sigma}(\xi)$, $1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 = n - r_*(M)$. Однако в общем случае аналитического УР размерности $n > 4$ необходимо использование дополнительных инвариантов с последующей факторизацией по связям между использованными мономиальными инвариантами. Симметрия УР относительно комплексного сопряжения и дискретной группы прямоугольника позволяет выразить все уравнения системы разветвления через их части: достаточно выписать первое уравнение, соответствующее каждой решетке периодичности.

A. $n = 4$, одна решетка периодичности, $j = 1$ [42]. Здесь $I_5(\xi) = \xi_1\xi_2$, $I_6(\xi) = \xi_3\xi_4$ и УР имеет вид

$$t_k(\xi,\varepsilon) \equiv a_0^{(k)}(\varepsilon)\xi_k + \sum a_q^{(k)}(\varepsilon)\xi_k(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2} = 0, \quad k = \overline{1,4},$$

где соотношения симметрии между коэффициентами определяются преобразованиями (17) группы прямоугольника: $a_q^{(k)}$ вещественны, $a_0^{(k)} \equiv a_0$, $a_q^{(1)} = a_q^{(2)}$, $a_q^{(3)} = a_q^{(4)}$, $a_{q_1q_2}^{(1)} = a_{q_2q_1}^{(3)}$. В [26] доказана потенциальность главной части соответствующего УР в вещественном базисе (12):

$$\hat{t}_k(\eta,\varepsilon) \equiv a_0^{(k)}(\varepsilon)\eta_k + \sum a_q^{(k)}(\varepsilon)\eta_k\bigl(\eta_1^2+\eta_2^2\bigr)^{q_1}\bigl(\eta_3^2+\eta_4^2\bigr)^{q_2} = 0, \quad k = \overline{1,4}.$$

Главная часть УР имеет вид

$$\begin{gathered} t_1(\xi,\varepsilon) \equiv A\xi_1\varepsilon + \widetilde{B}\xi_1^2\xi_2 + \widetilde{C}\xi_1\xi_3\xi_4 + \cdots = 0, \quad t_k(\xi,\varepsilon) \equiv P_{k-1}t_1(\xi,\varepsilon) = 0, \\ A = t^{(1)}_{\mathbf{e}_1;1} = -(1+\gamma s^2_{mn}) < 0, \quad \widetilde{B} = t^{(1)}_{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2;0}, \quad \widetilde{C} = t^{(1)}_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4;0}, \\ (\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0), \ldots, \mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)). \end{gathered}$$

Инвариантность задачи относительно L_β позволяет провести редукцию УР $\hat{t}(\eta,\varepsilon) = 0$ в вещественном базисе, положив $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$ [4]. Редуцированная система разветвления состоит из двух уравнений с двумя неизвестными (коэффициенты $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ вычислены в [21, 42] по формулам (16)):

$$A\eta_1\varepsilon + B\eta_1^3 + C\eta_1\eta_4^2 + \dots = 0, \quad A\eta_4\varepsilon + C\eta_1^2\eta_4 + B\eta_4^3 + \dots = 0,$$
$$B = \frac{1}{4}(\widetilde{B} + \widetilde{C}), \quad C = \frac{1}{4}(3\widetilde{B} - \widetilde{C}), \quad B + C = \widetilde{B},$$

исследование которой приводит к следующему утверждению.

Теорема 1. *Задача* (8) *в окрестности точки бифуркации* $F_0^2 = F_{mn}^2$ — *четырехкратного собственного значения, определяемого* ДС (10), — *при выполнении* (9) *имеет с точностью до преобразования* $y \to -y$ *два двупараметрических семейства периодических решений:*

$$\{\Phi^{(1)}, f^{(1)}\} = \left(-\frac{A}{B+C}\varepsilon\right)^{1/2} \left\{-\frac{ma\sqrt{ab}}{\pi}\,\frac{\operatorname{ch}[s_{mn}(\zeta+1)]}{s_{mn}\operatorname{sh}s_{mn}}\sin[ma(x+\beta_1) - nb(y+\beta_2)],\ \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\cos[ma(x+\beta_1) - nb(y+\beta_2)]\right\} + O(|\varepsilon|), \quad \operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign}(B+C);$$

$$\{\Phi^{(2)}, f^{(2)}\} = \left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2} \left\{\frac{ma\sqrt{ab}}{\pi}\,\frac{\operatorname{ch}[s_{mn}(\zeta+1)]}{s_{mn}\operatorname{sh}s_{mn}}\cos[ma(x+\beta_1)]\sin[nb(y+\beta_2)],\ \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\sin[ma(x+\beta_1)]\sin[nb(y+\beta_2)]\right\} + O(|\varepsilon|), \quad \operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign}B.$$

Замечание 2. При $k = 0$ (отсутствие флотируемого вещества) получаем результаты [4, 15]. Однако знак ε, т. е. характер ветвления, при $k \neq 0$ определить не удалось (при $k = 0$ см. [4, 15]).

Следствие. *Задача* (8) *в окрестности точки бифуркации* F_{m0}^2 — *двукратного собственного значения, определяемого* (10), — *при выполнении* (9) *имеет однопараметрическое семейство решений*

$$\{\Phi, f\} = \left(-\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{ma\sqrt{ab}}{\pi}\,\frac{\operatorname{ch}[s_{m0}(\zeta+1)]}{s_{m0}\operatorname{sh}s_{m0}}\sin[ma(x+\beta_1)],\ \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\cos[ma(x+\beta_1)]\right\} + O(|\varepsilon|), \quad \operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign}\widetilde{B}.$$

Для доказательства следует положить $n = 0$ в теореме 1, тогда $\widetilde{A} = A|_{n=0} = -(1 + m^2a^2)$, $\widetilde{B} = B|_{n=0}$. Величина b в нормирующем множителе сохранена с целью использования результатов п. А. На деле решение не зависит от b, происходит сокращение.

B. $n = 4$, две вырожденные решетки периодичности, $n_1 = n_2 = 0$. Пусть $m_2 > m_1$. Выписав ДС (10) для двух пар $(m_1, 0)$ и $(m_2, 0)$ и исключив F_0^2, находим

$$k = \frac{\left(1 + \gamma m_1^2a^2\right)\left(1 + \gamma m_2^2a^2\right)}{a^2\left(m_2^2 - m_1^2\right)}[f(am_1) - f(am_2)], \quad f(x) = \frac{x\operatorname{cth}x}{1 + \gamma x^2}.$$

Тогда $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{2(1+\gamma x^2)\operatorname{sh}^2 x}$, где

$$\varphi(x) = (1 - \gamma x^2)\operatorname{sh}2x - 2x(1 + \gamma x^2) = \frac{8 - 24\gamma}{3!}x^3 + \frac{32 - 20\gamma}{5!}x^5 + \cdots,$$

т. е. при $\gamma < \frac{1}{3}$ и малых a $f(x)$ возрастает и k отрицательно в противоречие с физическим смыслом. Если же $\gamma > \frac{1}{3}$, то $f(x)$ убывает и $k > 0$. Следовательно, возможно существование решения типа плоской волны с двумя вырожденными решетками периодичности.

Дифференциальное уравнение $XI(\xi,t) = 0$, отвечающее группе $\mathscr{A}(\beta_1)$, определяет полную систему функционально независимых инвариантов $I_s(\xi,t) = \frac{t_s}{\xi_s}$, $s = \overline{1,4}$, $I_5(\xi) = \xi_1\xi_2$, $I_6(\xi) = \xi_3\xi_4$, $I_7(\xi) = \xi_1^{\frac{N}{m_1}}\xi_2^{\frac{N}{m_2}}$, где $N = \frac{m_1m_2}{(m_1,m_2)}$ — наименьшее общее кратное (НОК) чисел m_1 и m_2. Необходимо привлечь дополнительный инвариант $I_8(\xi) = \xi_2^{\frac{N}{m_1}}\xi_3^{\frac{N}{m_2}}$ и в разложении УР провести факторизацию по (стандартной) связи $I_7(\xi)I_8(\xi) = I_5^{\frac{N}{m_1}}(\xi)I_6^{\frac{N}{m_2}}(\xi)$. Таким образом, УР принимает вид

$$t_k(\xi,\varepsilon)\equiv a_0^{(k)}(\varepsilon)\xi_k+\sum_q a_q^{(k)}(\varepsilon)\xi_k(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2}\left[\xi_k\left(\xi_1^{\frac{N}{m_1}}\xi_4^{\frac{N}{m_2}}\right)^{q_1}\left(\xi_2^{\frac{N}{m_1}}\xi_3^{\frac{N}{m_2}}\right)^{q_2}\right]^{\mathrm{out}} = 0,$$

$k = 1,2,3,4$, где символ $[\dots]^{\mathrm{out}}$ означает, что в выражении внутри скобок сомножители вида $\xi_{2k-1}\xi_{2k}$ должны быть опущены. В частности, для взаимно простых m_1 и m_2 главная часть УР следующая:

$$A\xi_1\varepsilon + B\xi_2^{m_2-1}\xi_3^{m_1} + \dots = 0, \quad A\xi_2\varepsilon + B\xi_1^{m_2-1}\xi_4^{m_1} + \dots = 0,$$
$$C\xi_3\varepsilon + D\xi_1^{m_2}\xi_4^{m_1-1} + \dots = 0, \quad C\xi_4\varepsilon + D\xi_2^{m_2}\xi_3^{m_1-1} + \dots = 0,$$

и определяет при конкретных m_1, m_2 асимптотику малых однопараметрических семейств решений.

Замечание 3. В [21] рассмотрен случай $m_1 = 2$, $m_2 = 3$. Доказана возможность такого вырождения, вычислены коэффициенты B и D (они оказались чисто мнимыми) и построена асимптотика единственного семейства разветвляющихся решений.

C. $n = 6$.

1. Лемма 1. *Не существует решения типа плоской волны, порожденного взаимодействием трех вырожденных решеток периодичности.*

Действительно, принимая $m_1 < m_2 < m_3$, исключим F_0 из каждой пары ДС (10). Полагая $am_k = s_k$, находим

$$\left(1+\gamma s_2^2\right)\frac{s_1\operatorname{cth}s_1}{s_2^2-s_1^2} - \left(1+\gamma s_1^2\right)\frac{s_2\operatorname{cth}s_2}{s_2^2-s_1^2} = \left(1+\gamma s_3^2\right)\frac{s_1\operatorname{cth}s_1}{s_3^2-s_1^2} - \left(1+\gamma s_1^2\right)\frac{s_3\operatorname{cth}s_3}{s_3^2-s_1^2}$$
$$= \left(1+\gamma s_3^2\right)\frac{s_2\operatorname{cth}s_2}{s_3^2-s_2^2} - \left(1+\gamma s_2^2\right)\frac{s_3\operatorname{cth}s_3}{s_3^2-s_2^2}.$$

Пользуясь равенствами первой и второй частей, получаем два выражения γ в виде дробей с одинаковыми числителями. Приравнивая знаменатели, приходим к целочисленной линейной комбинации гиперболических котангенсов кратных дуг $m_1\left(m_2^2-m_3^2\right)\operatorname{cth}m_1a + m_2\left(m_3^2-m_1^2\right)\operatorname{cth}m_2a + m_3\left(m_1^2-m_2^2\right)\operatorname{cth}m_3a = 0$. Невозможность такой линейной комбинации доказывает лемму.

2. При $n = 6 = 4+2$ имеем два прямоугольника периодов, один из которых вырождается в отрезок. Возможность вырождения с векторами $\mathbf{l}_1 = m_1a\mathbf{l}_1 + n_1b\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_3 = m_1a\mathbf{l}_1 - n_1b\mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_5 = m_2\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_{2k} = -\mathbf{l}_{2k-1}$ может быть получена как следствие 12-кратного вырождения (обоснование, по существу, повторяет соответствующее доказательство для $k = 0$ [15]) и непрерывной зависимости ДС относительно k. Доказательство в [15] не использует значение n, поэтому отсюда следует дополнительное обоснование возможности $4+2+2 = 8$-кратных и $4+4+2 = 10$-кратных вырождений.

В общем случае произвольных m_1 и m_2 система (18) определяет мономиальные инварианты наименьших степеней $I_7 = \xi_1\xi_2$, $I_8 = \xi_3\xi_4$, $I_9 = \xi_5\xi_6$, $I_{10} = (\xi_1\xi_3)^{\frac{N}{2m_1}}\xi_6^{\frac{N}{m_2}}$, $N = \text{НОК}(2m_1, m_2)$. Необходимо привлечь дополнительный инвариант $I_{11} = (\xi_2\xi_4)^{\frac{N}{2m_1}}\xi_5^{\frac{N}{m_2}}$. При этом функционально независимыми оказываются I_7, I_8, I_9, I_{10}. Имеется одна стандартная связь $I_{10}I_{11} = (I_7I_8)^{\frac{N}{2m_1}}I_9^{\frac{N}{m_2}}$. Достаточно выписать первое и пятое уравнения, остальные выражаются через них с помощью подстановок группы прямоугольника (17)

$$t_1(\xi,\varepsilon) \equiv a_0^{(1)}(\varepsilon)\xi_1 + \sum_{q,k} a_{q,k}^{(1)}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2}(\xi_5\xi_6)^{q_3}\left[\xi_1 I_{10}^{q_4}(\xi)I_{11}^{q_5}(\xi)\right]^{\text{out}} = 0,$$

$$t_5(\xi,\varepsilon) \equiv a_0^{(2)}(\varepsilon)\xi_5 + \sum_{q,k} a_{q,k}^{(2)}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2}(\xi_5\xi_6)^{q_3}\left[\xi_5 I_{10}^{q_4}(\xi)I_{11}^{q_5}(\xi)\right]^{\text{out}} = 0,$$

где символ $[\dots]^{\text{out}}$ означает факторизацию по единственной связи между использованными инвариантами. Рассматривая отдельно случаи $q_4 = q_5 + k$ и $q_5 = q_4 + k$, перепишем первое и пятое уравнения (раскрытие символа $[\dots]^{\text{out}}$) в виде

$$\begin{aligned} t_1(\xi,\varepsilon) \equiv a_0^{(1)}(\varepsilon)\xi_1 &+ \sum_{|q|=0,k=1} a_{q_1q_2q_3}^{(1;1)}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2}(\xi_5\xi_6)^{q_3}\xi_2^{\frac{Nk}{2m_1}-1}\xi_4^{\frac{Nk}{2m_1}}\xi_5^{\frac{Nk}{m_2}} \\ &+ \sum_{|q|=1,k=0} a_{q_1q_2q_3}^{(1;2)}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2}(\xi_5\xi_6)^{q_3}\xi_2^{\frac{Nk}{2m_1}+1}\xi_3^{\frac{Nk}{2m_1}}\xi_6^{\frac{Nk}{m_2}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_5(\xi,\varepsilon) \equiv a_0^{(1)}(\varepsilon)\xi_5 &+ \sum_{|q|=0,k=1} a_{q_1q_2q_3}^{(2;1)}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2}(\xi_5\xi_6)^{q_3}(\xi_1\xi_3)^{\frac{Nk}{2m_1}}\xi_6^{\frac{Nk}{m_2}-1} \\ &+ \sum_{|q|=1,k=0} a_{q_1q_2q_3}^{(2;2)}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2}(\xi_5\xi_6)^{q_3}(\xi_2\xi_4)^{\frac{Nk}{2m_1}}\xi_5^{\frac{Nk}{m_2}+1} = 0. \end{aligned}$$

Мы рассмотрим здесь подробнее такой случай шестимерного вырождения, когда взаимодействие решеток происходит на первом шаге, т. е. предполагается выполнение соотношений

$$\begin{gathered} \mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_4 + \mathbf{l}_5, \quad \mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_5, \quad \mathbf{l}_5 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_3, \\ \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_6, \quad \mathbf{l}_4 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_6, \quad \mathbf{l}_6 = \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_4, \quad m_2 = 2m_1. \end{gathered} \tag{19}$$

Исключая F_0^2 из двух соответствующих ДС (10), получаем значение k:

$$k = \frac{m_1a\big(1 + 4\gamma m_1^2a^2\big)\operatorname{ch}s_1\operatorname{sh}2m_1a - 2s_1\big(1+\gamma s_1^2\big)\operatorname{sh}s_1\operatorname{ch}2m_1a}{s_1m_1a\big(3+4\gamma n_1^2b^2\big)\operatorname{sh}s_1\operatorname{sh}2m_1a}.$$

Знаменатель положителен, поэтому и числитель должен быть положителен:

$$m_1a\operatorname{ch}s_1\operatorname{sh}2m_1a + 4\gamma m_1^3a^3\operatorname{ch}s_1\operatorname{sh}2m_1a > 2s_1\operatorname{sh}s_1\operatorname{ch}2m_1a + 2\gamma s_1^3\operatorname{sh}s_1\operatorname{ch}2m_1a.$$

При $b = 0$ и малых a это неравенство выполнено, поэтому оно сохранится и при малых $b \neq 0$. Следовательно, при малых a и b действительно возможно указанное соотношение векторов обратной решетки.

В рассматриваемом частном случае (19) главная часть УР содержит мономы второго порядка по ξ и ε:

$$A\xi_1\varepsilon + iB\xi_4\xi_5 = 0, \quad A\xi_2\varepsilon - iB\xi_3\xi_6 = 0, \quad A\xi_3\varepsilon + iB\xi_2\xi_5 = 0,$$
$$A\xi_4\varepsilon - iB\xi_1\xi_6 = 0, \quad C\xi_5\varepsilon + iD\xi_1\xi_3 = 0, \quad C\xi_6\varepsilon - iD\xi_2\xi_4 = 0,$$

где $A = a_{01}^{(1)}$, $C = a_{01}^{(2)}$, $iB = a_{0;1}^{(1;1)}$, $iD = a_{0;1}^{(2;1)}$, A, B, C, D вещественны. Переходя к вещественному базису (12) по формулам (14) и выполняя редукцию УР, т. е. принимая $\eta_2 = 0 = \eta_3$, приходим к системе разветвления

$$\eta_1(A\varepsilon + B\eta_5) = 0, \quad B\eta_4\eta_6 = 0, \quad B\eta_1\eta_6 = 0, \quad \eta_4(A\varepsilon - B\eta_5) = 0,$$
$$C\eta_5\varepsilon + \frac{1}{4}D\bigl(-\eta_1^2 + \eta_4^2\bigr) = 0, \quad C\eta_6\varepsilon = 0,$$

имеющей 4 решения

$$\eta(\varepsilon) = \left(\pm 2\sqrt{-\frac{AC}{BD}}\varepsilon, 0, 0, 0, -\frac{A}{B}\varepsilon, 0\right) + o(\varepsilon),$$
$$\eta(\varepsilon) = \left(0, 0, 0, \pm 2\sqrt{-\frac{AC}{BD}}\varepsilon, \frac{A}{B}\varepsilon, 0\right) + o(\varepsilon).$$

Комбинации сдвигов по координате x на $\frac{\pi}{2m_1a}$, $\frac{\pi}{m_1a}$ и по координате y на $\frac{\pi}{2n_1b}$, $\frac{\pi}{n_1b}$ группы сдвигов L_β индуцируют преобразования $\{\eta_1 \to \eta_4, \eta_4 \to \eta_1, \eta_5 \to -\eta_5\}$, $\{\eta_1 \to -\eta_1, \eta_5 \to \eta_5\}$, $\{\eta_4 \to -\eta_4, \eta_5 \to \eta_5\}$, которые из четырех решений оставляют только одно $\bigl(2\sqrt{-\frac{AC}{BD}}\varepsilon, 0, 0, 0, -\frac{A}{B}\varepsilon, 0\bigr) + o(\varepsilon)$. Учитывая, что $A, C < 0$, и существование значений m_1, n_1, $m_2 = 2m_1$, при которых $\operatorname{sign} BD < 0$, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Задача* (8) *в рассматриваемом случае* (19) *в окрестности точки бифуркации $F_0^2 = F_{m_1n_1}^2 = F_{m_20}^2$ с шестикратным вырождением линеаризованного оператора имеет одно двупараметрическое семейство периодических решений вида*

$$\{\Phi, f\} = 2\left(-\frac{AC}{BD}\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon\biggl\{-\frac{m_1a\sqrt{ab}}{\pi}\,\frac{\operatorname{ch}[s_{m_1n_1}(\zeta+1)]}{s_{m_1n_1}\operatorname{sh}s_{m_1n_1}}\sin[m_1a(x+\beta_1)]$$
$$\times\cos[n_1b(y+\beta_2)], \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\cos[m_1a(x+\beta_1)]\cos[n_1b(y+\beta_2)]\biggr\}$$
$$-\frac{A}{B}\varepsilon\biggl\{-\frac{m_2a\sqrt{ab}}{\pi}\,\frac{\operatorname{ch}[s_{m_20}(\zeta+1)]}{s_{m_20}\operatorname{sh}s_{m_20}}\sin[m_2a(x+\beta_1)], \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\cos[m_2a(x+\beta_1)]\biggr\} + o(\varepsilon),$$
$$\operatorname{sign} BD < 0.$$

D. $n = 4 + 4$. Возможность общего случая $n = 8$ обсуждалась в п. C.

Лемма 2. *Существует решение с симметрией двойного прямоугольника и, в частности, двойного квадрата.*

Действительно, пусть $s_2 = 2s_1$. Исключая F_0^2 из двух ДС (10), получаем квадратное уравнение $(1 + \gamma s_1^2)\operatorname{th}^2 s_1 + 3ks_1\operatorname{th}s_1 - 3\gamma s_1^2 = 0$, откуда находим

$$\operatorname{th}s_1 = \frac{-3ks_1 + \sqrt{9k^2s_1^2 + 12\gamma s_1^2\bigl(1 + \gamma s_1^2\bigr)}}{2\bigl(1 + \gamma s_1^2\bigr)}.$$

Для существования таких решений должно выполняться неравенство $0 < \operatorname{th} s_1 < 1$, из которого следует $0 < s_1 < \frac{3\gamma+\sqrt{9k^2+8\gamma}}{4\gamma}$. При $k = 0$ будет $0 < s_1 < \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$, а при $k \neq 0$ область существования таких решений только расширяется.

В системе уравнений (18) $n = 8$, $r = 2$, $\sigma_0 = 6$, $\nu_0 = 2$. Она определяет восемь инвариантов вида $I_k(\xi, t) = \frac{t_k}{\xi_k}$, четыре инварианта $I_{8+k}(\xi) = \xi_{2k-1}\xi_{2k}$, $k = \overline{1,4}$, и два инварианта $I_{13}(\xi) = (\xi_1\xi_3)^{\frac{N_1}{m_1}}(\xi_6\xi_8)^{\frac{N_1}{m_2}}$, $I_{14}(\xi) = (\xi_1\xi_4)^{\frac{N_2}{n_1}}(\xi_6\xi_7)^{\frac{N_2}{n_2}}$, $N_1 = \text{НОК}(m_1, m_2)$, $N_2 = \text{НОК}(n_1, n_2)$. Вводя дополнительные инварианты $I_{15}(\xi) = \overline{I_{13}(\xi)} = (\xi_2\xi_4)^{\frac{N_1}{m_1}}(\xi_5\xi_7)^{\frac{N_1}{m_2}}$ и $I_{16}(\xi) = \overline{I_{14}(\xi)} = (\xi_2\xi_3)^{\frac{N_2}{n_1}}(\xi_5\xi_8)^{\frac{N_2}{n_2}}$, выпишем общий вид УР

$$
\begin{aligned}
t_k(\xi, \varepsilon) \equiv a_0^{(k)}(\varepsilon)\xi_k \\
&+ \sum_q a_q^{(k)}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{q_1} \dots (\xi_7\xi_8)^{q_4} \left[\xi_k I_{13}^{q_5}(\xi) I_{14}^{q_6}(\xi) I_{15}^{q_7}(\xi) I_{16}^{q_8}(\xi)\right]^{\text{out}} = 0,
\end{aligned}
$$

$k = \overline{1,8}$, где символ $[\dots]^{\text{out}}$ означает факторизацию разложения по связям

$$
I_{13}I_{15} = I_9^{\frac{N_1}{m_1}} I_{10}^{\frac{N_1}{m_1}} I_{11}^{\frac{N_1}{m_2}} I_{12}^{\frac{N_1}{m_2}}, \quad I_{14}I_{16} = I_9^{\frac{N_2}{n_1}} I_{10}^{\frac{N_2}{n_1}} I_{11}^{\frac{N_2}{n_2}} I_{12}^{\frac{N_2}{n_2}}.
$$

Равенства (17) — симметрия относительно группы прямоугольника

$$
P_1 = (12)(34)(56)(78),\ P_2 = (13)(24)(57)(68),\ P_3 = (14)(23)(58)(67)
$$

— позволяют выразить все уравнения системы разветвления через первое и пятое и дают также симметрию коэффициентов УР.

На основе изложенного могут быть построены УР 1) с симметрией произвольных двух прямоугольных решеток, 2) с симметрией двойного прямоугольника и 3) двойного квадрата. В [21] проведено исследование последнего случая: построено УР в вещественных переменных и на основе исследования редуцированного УР выписана асимптотика четырех семейств разветвляющихся решений.

E. $n = 8 = 4 + 2 + 2$, три решетки периодичности. В [21] в отличие от [15] детально исследован общий случай решеток (m_1, n_1), $(m_2, 0)$, $(m_3, 0)$. При факторизации разложения УР по связям между использованными инвариантами одна из них нестандартна [7], т. е. имеет общий вид и не связана с опусканием сомножителей вида $\xi_{2k-1}\xi_{2k}$. Исследование УР и построение асимптотики разветвляющихся решений выполнены в [21] для вырождения вида (m_1, n_1), $(2m_1, 0)$, $(4m_1, 0)$. Предварительно обоснована возможность соответствующего вырождения линеаризованного оператора B.

F. $n = 10 = 4 + 4 + 2$.

Лемма 3. *Пусть две невырожденные решетки образуют двойной прямоугольник, т. е. $s_2 = 2s_1$, и для вырожденной решетки $s_3 = pm_1a$, где p — достаточно большое целое число. Существуют значения физических параметров, при которых осуществляется указанное вырождение.*

Действительно, исключая F_0^2 из первых двух ДС (10), находим значение $k = \frac{3\gamma s_1^2 - \left(1+\gamma s_1^2\right)\operatorname{th}^2 s_1}{3s_1 \operatorname{th} s_1}$. Следовательно, для положительности k достаточно выполнения неравенства $2\gamma s_1^2 > 1$. Исключение F_0^2 из первого и третьего ДС

(10) с последующей подстановкой в результирующее соотношение приводят к равенству

$$\frac{\left(3+3\gamma s_1^2-\left(1+\gamma s_1^2\right)\operatorname{th}^2 s_1\right)m_1 a\operatorname{th} pm_1 a}{3s_1 p\operatorname{th} s_1+((3-\operatorname{th}^2 s_1)\gamma s_1^2-\operatorname{th}^2 s_1)p^2 m_1 a\operatorname{th} pm_1 a}=\frac{1+\gamma s_1^2}{1+p^2\gamma m_1^2 a^2}.$$

Умножая обе части на p^2 и переходя к пределу при $p\to\infty$, получаем

$$\frac{3-\operatorname{th}^2 s_1}{(3-\operatorname{th}^2 s_1)\gamma s_1^2-\operatorname{th}^2 s_1}=\frac{1}{\gamma m_1^2 a^2}\Rightarrow\gamma$$
$$=\frac{\operatorname{th}^2 s_1}{(3-\operatorname{th}^2 s_1)\left(s_1^2-m_1^2 a^2\right)}=\frac{\operatorname{th}^2 s_1}{(3-\operatorname{th}^2 s_1)n_1^2 b^2}>0.$$

Таким образом, при достаточно больших p и $2\gamma s_1^2>1$ возможно вырождение указанного вида.

Замечание 4. В [21] выписана система мономиальных инвариантов наименьших возможных степеней, используемых при построении УР, определены связи между ними, среди которых две нестандартные. Однако исследовать УР и выписать асимптотику разветвляющихся семейств решений можно только в каждом конкретном случае решеток периодичности.

G. $n=12$, три двумерные решетки. Здесь также выполнена [21] программа замечания 4.

Лемма 4. *Не существует безразмерных параметров, при которых* УР *допускает симметрию тройного прямоугольника. Однако возможна симметрия 3-кратного прямоугольника и, в частности, 3-кратного квадрата.*

1. Пусть $s_2=2s_1$, $(m_2,n_2)=(2m_1,2n_1)$; $s_3=3s_1$, $(m_3,n_3)=(3m_1,3n_1)$. Исключение F_0^2 из первого и второго ДС (10), а затем из первого и третьего (см. лемму 2) приводит к соотношениям

$$\left(1+\gamma s_1^2\right)\operatorname{th}^2 s_1+3s_1(k\operatorname{th} s_1-\gamma s_1)=0,\quad (1+ks_1\operatorname{th} s_1)\operatorname{th}^2 s_1+3s_1(k\operatorname{th} s_1-\gamma s_1)=0,$$

из которых следуют два противоречивых условия $k\operatorname{th} s_1<\gamma s_1$ и $k\operatorname{th} s_1=\gamma s_1$.

2. Пусть теперь $s_2=ps_1$, $s_3=qs_1$, p и q — целые числа. Исключение F_0^2 из первого и второго, а затем из первого и третьего ДС (10) приводит к двум выражениям для k. Их равенство дает соотношение

$$\frac{(p^2-1)\operatorname{th} ps_1}{(q^2-1)\operatorname{th} qs_1}=\frac{\left(1+p^2\gamma s_1^2\right)\operatorname{th} ps_1-p\left(1+\gamma s_1^2\right)\operatorname{th} s_1}{\left(1+q^2\gamma s_1^2\right)\operatorname{th} qs_1-q\left(1+\gamma s_1^2\right)\operatorname{th} s_1}.\tag{20}$$

Отметим, что при $s_1\to 0$ пределы левой и правой частей (20) равны $\frac{(p^2-1)p}{(q^2-1)q}$. Надо показать, что для некоторых целых p и q при фиксированном γ найдется интервал изменения s_1, в котором числитель и знаменатель правой части положительны, и в этом интервале найти корень $s_1^*>0$ уравнения (20). В первой части мы показали, что для $p=2$, $q=3$ такой окрестности нуля не существует. Но при $p=2$, $q=4$ мы определим малую окрестность нуля, содержащую корень s_1^*, и дадим оценку снизу соответствующих значений γ. Действительно, осуществляя исключения F_0^2 аналогично первой части леммы, находим

$$\begin{gathered}\left(1+\gamma s_1^2\right)\operatorname{th}^2 s_1+3s_1(k\operatorname{th} s_1-\gamma s_1),\\ 15s_1 k\operatorname{th} 4s_1\operatorname{th} s_1=\left(1+16\gamma s_1^2\right)\operatorname{th} 4s_1-4\left(1+\gamma s_1^2\right)\operatorname{th}\sigma_1.\end{gathered}\tag{21}$$

Отсюда в силу положительности k следует, что γ должно удовлетворять неравенствам

$$\gamma > \frac{\operatorname{th}^2 s_1}{s_1^2(3-\operatorname{th}^2 s_1)}, \quad \gamma > \frac{5\operatorname{th}^2 s_1 + \operatorname{th}^4 s_1}{s_1^2(15+10\operatorname{th}^2 s_1 - \operatorname{th}^4 s_1)}. \tag{22}$$

Исключение k из равенств (21) дает соотношение

$$\operatorname{th}^2 s_1\bigl[-5\bigl(1+\gamma s_1^2\bigr)\operatorname{th}^4 s_1 + \bigl(1+16\gamma s_1^2\bigr)\operatorname{th}^2 s_1 - 15\gamma s_1^2\bigr] = 0.$$

Тогда мы приходим к связи

$$10\bigl(1+\gamma s_1^2\bigr)\operatorname{th}^2 s_1 = 1+16\gamma s_1^2 - \bigl[\bigl(1+16\gamma s_1^2\bigr)^2 - 300\gamma s_1^2\bigl(1+\gamma s_1^2\bigr)\bigr]^{1/2},$$

справедливой при $0 < \gamma s_1^2 < 0{,}00148886$. Из неравенств (22) следует, что $\gamma > \frac{1}{3}$ при $s \to 0$. Таким образом, при $\gamma > \frac{1}{3}$ существует малая окрестность нуля, в которой (20) имеет корень $s_1^* > 0$. При этом γ должно удовлетворять неравенству (13) для $j = 1$, необходимому для эллиптичности интеграла Бернулли.

Замечание 5. 1. В [15] при $k = 0$ доказана возможность вырождения оператора B с тремя двумерными решетками периодичности. Используя непрерывность ДС (10) по параметру k и теорему о неявной функции, можно установить эту возможность и при $k \neq 0$, т. е. для флотирующей жидкости.

2. Имеются основания считать, что кратные ячейки с неправильной гексагональной симметрией отсутствуют.

Н. Решения, инвариантные относительно нормальных делителей группы прямоугольника. Для упрощения изложения приведем здесь результаты только для случаев А) одной прямоугольной решетки периодичности и В) одной квадратной решетки.

А) В принятых обозначениях группа вращений-отражений прямоугольной решетки выражается подстановками T: $P_0 = e = (1)(2)(3)(4)$, $P_1 = (12)(34)$, $P_2 = (13)(24)$, $P_3 = (14)(23)$. Нормальные делители состоят из классов сопряженных элементов: $M_1 = \{e\}$, $M_2 = \{P_1\}$, $M_3 = \{P_2\}$, $M_4 = \{P_3\}$. Следовательно, нормальными делителями являются $N_1 = M_1 + M_2$, $N_2 = M_1 + M_3$, $N_3 = M_1 + M_4$. Так как сумма квадратов степеней неприводимых представлений равна порядку группы, возможны два случая: 1°) $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ (четыре неприводимых представления), 2°) $n_1 = 2$ (одно двумерное представление). Поскольку число попарно неизоморфных представлений равно числу классов сопряженных элементов, осуществляется первый случай. На основе формул теории характеров [30, с. 76] справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Для одной прямоугольной решетки* $T = T_1 \dot{+} T_2 \dot{+} T_3 \dot{+} T_4$, $N(B) = N_1^{(1)} \dot{+} N_2^{(1)} \dot{+} N_3^{(1)} \dot{+} N_4^{(1)}$. *Базис в* $N(B)$, *преобразующийся по соответствующим одномерным неприводимым представлениям, имеет вид*

$$\begin{array}{llll} N_1^{(1)}: & e_1^{(1)} = \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4, & N_3^{(1)}: & e_3^{(1)} = \varphi_1-\varphi_2+\varphi_3-\varphi_4, \\ N_2^{(1)}: & e_2^{(1)} = \varphi_1+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4, & N_4^{(1)}: & e_4^{(1)} = \varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+\varphi_4, \end{array} \tag{23}$$

где нижний индекс указывает номер неприводимого представления, а верхний — его размерность.

Пусть $\breve{P}_k(g)$ — операторы группы прямоугольника в базисе (23). Тогда проектор $P(N_k)$ на инвариантное подпространство относительно нормального делителя N_k выражается формулой [30, 34] $P(N_k) = \frac{1}{|N_k|}\sum\limits_{g\in N_k}\breve{P}_g$. Для выражения подстановок операторами в базисе неприводимых инвариантных подпространств нужно в пространстве Ξ_φ^n воспользоваться формулой $\xi = C_0\zeta$, где C_0 —

матрица перехода от базиса $\{\varphi\}$ в $N(B)$ к базису $\{e\}$, полученная в лемме 5. Тогда для построения УР решений, инвариантных относительно нормальных делителей, надо в УР в переменных ζ принять $\zeta_3 = \zeta_4 = 0$ для N_1, $\zeta_2 = \zeta_4 = 0$ для N_2 и $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$ для N_3. Для построения ζ-УР нужно сделать подстановку $\eta = CC_0\zeta$, где C — матрица (15) перехода от переменных ξ к переменным η. Однако для наших целей достаточно в формулах $(\eta \to \zeta)$-перехода положить соответствующие ζ равными нулю, т. е. знать координатные гиперплоскости N_k-инвариантных векторов ζ. Тем самым определятся N_k-инвариантные подпространства в переменных η и можно не выполнять замену $\eta = CC_0\zeta$ в УР: для N_1 (решения, инвариантные при отражении относительно центра прямоугольника) $\eta_1 = \eta_4 = 0$, для N_2 (инвариантность при отражении относительно оси Ox) $\eta_2 = \eta_4 = 0$, для N_3 (отражение относительно Oy) $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Исследование соответствующих редуцированных УР приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. *Решения, инвариантные относительно нормальных делителей группы прямоугольника, имеют вид*

$$N_1\colon \{\Phi, f\} = \{v_1(\zeta)(-\eta_{20}\sin \max \sin nby + \eta_{30}\cos \max \cos nby),\\ v_2(\eta_{20}\cos \max \sin nby + \eta_{30}\sin \max \cos nby)\} + o(|\varepsilon|^{1/2}),$$

где $\eta_{20} = 0$, $\eta_{30} = \pm\sqrt{-\frac{A\varepsilon}{B}}$, $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign} B$ *или* $\eta_{20} = \pm\sqrt{-\frac{A\varepsilon}{B}}$, $\eta_{30} = 0$, $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign} B$, *или* $\eta_{20} = \pm\eta_{30} = \pm\sqrt{-\frac{A\varepsilon}{B+C}}$, $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign}(B + C)$;

$$N_2\colon \{\Phi, f\} = \{v_1(\zeta)(-\eta_{10}\sin \max + \eta_{30}\cos \max)\cos nby,\\ v_2(\eta_{10}\cos \max + \eta_{30}\sin \max)\cos nby\} + o(|\varepsilon|^{1/2}),$$

где $\eta_{10}^2 + \eta_{30}^2 = -\frac{A\varepsilon}{B}$, $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign} B$;

$$N_3\colon \{\Phi, f\} = \{v_1(\zeta)(\eta_{30}\cos nby + \eta_{40}\sin nby)\cos \max,\\ v_2(\eta_{30}\cos nby + \eta_{40}\sin nby)\sin \max\} + o(|\varepsilon|^{1/2}),$$

где $\eta_{30}^2 + \eta_{40}^2 = -\frac{A\varepsilon}{B}$, $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign} B$.

В) В принятой нумерации вершин квадрата в обратной решетке группа $\widetilde{G}^1$ записывается в виде

$$T\colon P_0 = e,\ P_1 = (1324),\ P_2 = (12)(34),\ P_3 = (1423),\ P_4 = (14)(23),\\ P_5 = (13)(24),\ P_6 = (12)(3)(4),\ P_7 = (1)(2)(34).$$

Выпишем классы сопряженных элементов группы квадрата D_4: $M_1 = \{e\}$, $M_2 = \{P_1, P_3\}$, $M_3 = \{P_2\}$, $M_4 = \{P_4, P_5\}$, $M_5 = \{P_6, P_7\}$. Нормальными делителями являются $N_1 = M_1 + M_3$, $N_2 = M_1 + M_3 + M_5$, $N_3 = M_1 + M_2 + M_3$, $N_4 = M_1 + M_3 + M_4$. Согласно теореме Бернсайда $\sum\limits_{k=1}^{5} n_k^2 = 8$. Следовательно, имеются четыре одномерных и одно двумерное неприводимые представления T_5 (2×2-матрицы вращений-отражений векторов $\mathbf{l}$). На основе теории характеров доказывается следующее утверждение.

Лемма 6. *В случае одной квадратной решетки* $T = T_1 \dotplus T_4 \dotplus T_5$, $N(B) = N_1^{(1)} \dotplus N_4^{(1)} \dotplus N_5^{(2)}$. *Базис в* $N(B)$, *преобразующийся по соответствующим одномерным неприводимым представлениям, имеет вид*

$$\begin{array}{ll} N_1^{(1)}\colon & e_1^{(1)} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4, \\ N_4^{(1)}\colon & e_4^{(1)} = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4, \end{array} \quad N_5^{(2)}\colon \begin{cases} e_5^{(1)} = a_0\varphi_1 - a_0\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4, \\ e_5^{(2)} = b_0\varphi_1 - b_0\varphi_2 - c_0\varphi_3 + c_0\varphi_4, \end{cases}$$

где $a_0 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_0 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c_0 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Действуя по схеме п. A), находим, что для отыскания N_1-инвариантных решений (инвариантных при отражении относительно центра квадрата) и N_2-инвариантных решений (отражение относительно центра и диагоналей) следует принять $\eta_1 = \eta_4 = 0$. Для N_3-инвариантных (относительно группы вращений квадрата) и N_4-инвариантных (при отражении относительно центра и осей координат) нужно положить $\eta_1 = \eta_2 = \eta_4 = 0$.

Теорема 4. *Пусть* $a = b$ *и* $m = n$. *Решения, инвариантные относительно нормальных делителей группы квадрата, имеют вид*

$$\begin{aligned} N_1, N_2\colon \{\Phi, f\} = \{&v_1(\zeta)(-\eta_{20} \sin \max \sin may + \eta_{30} \cos \max \cos may), \\ &v_2(\eta_{20} \cos \max \sin may + \eta_{30} \sin \max \cos may)\} + o(|\varepsilon|^{1/2}), \end{aligned}$$

где $\eta_{20} = 0$, $\eta_{30} = \pm 2\sqrt{-\frac{A\varepsilon}{B+C}}$, $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign}(B + C)$, *или* $\eta_{20} = \pm 2\sqrt{-\frac{A\varepsilon}{B+C}}$, $\eta_{30} = 0$, $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign}(B + C)$, *или* $\eta_{20} = \pm\eta_{30} = \pm\sqrt{-\frac{A\varepsilon}{B}}$, $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign} B$;

$$N_3, N_4\colon \{\Phi, f\} = \{v_1(\zeta)\eta_{30} \cos \max \cos may, v_2\eta_{30} \sin \max \cos may\} + o(|\varepsilon|^{1/2}),$$

где $\eta_{30} = \pm 2\sqrt{-\frac{A\varepsilon}{B+C}}$, $\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign}(B + C)$, $v_1(\zeta) = \frac{a}{\pi}\frac{\operatorname{ch}[ma\sqrt{2}(\zeta+1)]}{\sqrt{2}\operatorname{sh}[ma\sqrt{2}]}$, $v_2 = \frac{a}{\pi}$ *и предполагается, что* $B \neq C$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В. И.* Свободная конвекция и ветвление // Прикл. математика, механика. 1967. Т. 31, № 1. С. 101–111.
2. *Овчинникова С. Н., Юдович В. И.* Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами // Прикл. математика, механика. 1968. Т. 32, № 5. С. 858–868.
3. *Логинов Б. В., Треногин В. А.* Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений // Мат. сб. 1971. Т. 85, № 3. С. 440–454.
4. *Логинов Б. В.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: Фан, 1985.
5. *Логинов Б. В., Треногин В. А.* Об использовании групповой инвариантности в теории ветвления // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 8. С. 1518–1521.
6. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. *Логинов Б. В., Рахматова Х. Р., Юлдашев Н. Н.* О построении уравнения разветвления по его группе симметрий // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Ташкент: Фан, 1987. С. 183–195.
8. *Loginov B. V.* On the construction of the general form of branching equation by its group symmetry // Equadiff–VII. Enlarged Absracts. Praha, 1989. P. 48–50.
9. *Loginov B. V.* Group analysis methods for constructions and investigation of the bifurcation equation // Appl. Math. 1992. V. 37, N 4. P. 241–248.
10. *Логинов Б. В.* Групповой анализ в задачах теории ветвления с нарушением симметрии // Материалы I Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения» Саранск, 20–22 декабря 1994 г. Саранск, 1995. С. 103–119.

11. *Логинов Б. В.* О применении векторных инвариантов для определения общего вида уравнения разветвления в условиях групповой инвариантности // Докл. АН СССР. 1981. Т. 29, № 5. С. 1045–1050.

12. *Sattinger D. H.* Group theoretic methods in bifurcation theory. Berlin: Springer-Verl., 1979. (Lecture Notes in Math; 762).

13. *Логинов Б. В., Рахматова Х. Р.* Применение теории ветвления с групповой инвариантностью при построении уравнения разветвления периодических решений задачи о фазовых переходах в статистической теории кристалла // Дифференциальные уравнения и их применение в механике. Ташкент: Фан, 1985. С. 114–136.

14. *Юлдашев Н. Н.* Построение общего вида уравнения разветвления по его группе симметрии: Дис. ... к. ф.-м. н. Ташкент (Ин-т математики им. В. И. Романовского, АН УзССР), 1991. 140 с.

15. *Loginov B. V., Kuznetsov A. O.* Capillary-gravity waves over the flat surface // European J. Mech. B/Fluids. 1996. V. 15, N 2. P. 259–280.

16. *Логинов Б. В., Трофимов Е. В.* Вычисление асимптотики капиллярно-гравитационных волн на границе раздела двух жидкостей // Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 57–66.

17. *Логинов Б. В., Эргашбаев Т.* Многомерное ветвление и задача о капиллярно-гравитационных волнах на поверхности цилиндра // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: Фан, 1993. Вып. 95. С. 89–100.

18. *Абдуллаева Ф. Дж.* Ветвление и устойчивость решений системы дифференциальных уравнений для определения свободной поверхности магнитной жидкости. Дис. ... к. ф.-м. н. Ташкент (Ин-т математики им. В. И. Романовского АН УзССР), 1993. 82 с.

19. *Loginov B. V.* Bifurcation theory methods in the problem about capillary-gravity waves in spatial layer of floating fluid // Internat. Congr. of Mathematicians (August 18–27, 1998). Abstracts. P. 29.

20. *Логинов Б. В., Карпова С. А.* Ветвление и симметрия в задаче о капиллярно-гравитационных волнах на поверхности флотирующей жидкости // Междунар. конф. «Симметрия в естествознании» 23–29 авг. 1998: Тез. докл. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН. С. 86–87.

21. *Логинов Б. В., Гришина С. А.* Бифуркационная задача о капиллярно-гравитационных волнах на поверхности пространственного слоя флотирующей жидкости / УлГТУ. Ульяновск, 1999. Деп. в ВИНИТИ, № 2456–В99.

22. *Некрасов А. И.* Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: АН СССР, 1951.

23. *Kochin N. E.* Determination regoreuse des ondes irrotationelles periodiques dans une canal profondeur finie // Math. Ann. 1928. Bd 95. S. 595–634.

24. *Kochin N. E.* Über den Einfluss des Bondenprofils auf die Wellen an der Grenzfläche von zwei Flüssigkeiten verschiedener Dichten // Изв. АН СССР. ОМЕН. Сер. геогр. и геофиз. 1937. N 3. P. 357–381.

25. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 63. С. 5–129.

26. *Логинов Б. В.* Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия // Вестн. Самарского гос. ун-та. 1998. № 4. С. 15–70.

27. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

28. *Хейне В.* Теория групп в квантовой механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1969.

29. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.

30. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применения в физике. М.: ГИТТЛ, 1958.

31. *Делоне Б. Н., Александров А. Д., Падуров Н. Н.* Математические основы структурного анализа кристаллов. Л.; М.: ОНТИ, 1934.

32. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Ч. I. М.: Наука, 1986.

33. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.

34. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.

35. *Логинов Б. В.* Инварианты и инвариантные решения в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их применения. Ташкент: Фан, 1978. С. 117–133.

36. *Логинов Б. В.* Об инвариантных решениях в теории ветвления // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 5. С. 1048–1051.

37. *Владимиров С. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с дискретной группой симметрии // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 12, № 7. С. 1180–1189.

38. *Rabinovitz P.* Some aspects of nonlinear eigenvalue problems // Rocky Mountain J. Math. 1973. V. 12. P. 161–202.

39. *Габов С. А.* О существовании установившихся волн конечной амплитуды на поверхности флотирующей жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 10. С. 1507–1519.

40. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Математические задачи динамики флотирующей жидкости // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1990. (Итоги науки и техники. Т. 28). С. 3–86.

41. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

42. *Логинов Б. В., Карпова С. А.* Вычисление асимптотики периодических решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах в пространственном слое флотирующей жидкости // Вестн. Самарского гос. ун-та. 1997. № 4. С. 69–80.

Статья поступила 22 декабря 1999 г.

Логинов Борис Владимирович
Ульяновский гос. технический университет, кафедра высшей математики,
ул. Северный Венец, 32, Ульяновск 432027
loginov@ulstu.ru