Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.54+517.55

ЛИНЕЙНО–ИНВАРИАНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ШАРА, МЕТОД ПОНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ

П. Личберский, В. В. Старков

Аннотация: Понятие линейно-инвариантного семейства отображений шара в $\mathbb{C}$ введено в работе «*Pfaltzgraff J. A.* Distortion of locally biholomorphic maps of the n-ball // Complex Variables. 1997. V. 33. P. 239–253»; оно обобщает классический случай $n = 1$, изучавшийся ранее Х. Поммеренке, а затем и другими авторами. В этой работе Пфальцграфф, в частности, получил и использовал неверное равенство (5.3). Применение этого равенства было положено в основу некоторых утверждений не только в указанной работе. В результате отдельные теоремы оказались недоказанными.

Предлагается метод (понижения размерности), позволяющий спасти доказательства и получить новые результаты в линейно-инвариантных семействах отображений шара. Идея метода проста и заключается в редукции задачи, поставленной для линейно-инвариантных семейств в $\mathbb{C}^n$, к задаче для классического случая круга ($n = 1$). Библиогр. 12.

Введение

Обозначим через B^m единичный шар $\{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle} < 1\}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, а $\mathscr{A}^m$ — множество всех биголоморфных автоморфизмов шара B^m. Пусть $D^k f(z)$ — k-й дифференциал Фреше отображения f в точке z. Тогда $J_f(z) = \det Df(z)$ — якобиан f, а $D^2 f(z)(w, \cdot)$ — линейный ограниченный оператор из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^m$, который является сужением симметричного билинейного оператора $D^2 f(z)$ на $w \times \mathbb{C}^m$. Обозначим через $\mathscr{L}S^m$ множество всех локально биголоморфных отображений $f : B^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ ($J_f(z) \neq 0$ для $z \in B^m$), нормированных условием: $Df(0) = I$ — единичная матрица, $f(0) = 0$.

Понятие линейно-инвариантного семейства (л.-и.с.) голоморфных в круге $B = B^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций впервые было введено и изучалось Поммеренке в [1]. Линейная инвариантность семейства $\mathfrak{M}$ локально однолистных в B функций $f(z) = z + \dots$ означает, что наряду с каждой функцией $f \in \mathfrak{M}$ этому семейству принадлежит и функция

$$\frac{f(\phi(z)) - f(\phi(0))}{f'(\phi(0))\phi'(0)} = z + \dots \tag{1}$$

при любом конформном автоморфизме $\phi(z)$ круга B. Многие известные классы конформных отображений круга B являются л.-и.с.

В дальнейшем понятие линейной инвариантности обобщалось многими авторами в различных направлениях. В 1997 г. в [2] понятие л.-и.с. было перенесено на локально биголоморфные отображения шара B^m, $m > 1$; в [2] изучались л.-и.с. таких отображений. Следует также заметить, что еще ранее подобное обобщение было предпринято в [3] для случая $m = 2$.

По аналогии с (1) для каждого $\varphi \in \mathscr{A}^m$ на множестве $\mathscr{L}S^m$ определим оператор Λ_φ: $\Lambda_\varphi[f](z) = (D\varphi(0))^{-1}(Df(\varphi(0)))^{-1}(f(\varphi(z)) - f(\varphi(0)))$, $z \in B^m$, и дадим необходимые определения.

Определение 1 [2]. Семейство $\mathfrak{M} \subset \mathscr{L}S^m$ называется *линейно-инвариантным*, если для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $\varphi \in \mathscr{A}^m$ значение $\Lambda_\varphi[f]$ принадлежит семейству $\mathfrak{M}$.

Ярким примером л.-и.с. является класс $\mathscr{K}_n$ биголоморфных отображений шара на выпуклые области.

Определение 2 [2]. *Порядком* л.-и.с. $\mathfrak{M}$ называется число

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup_{g\in\mathfrak{M}} \sup_{\|w\|=1} \left| \operatorname{tr}\left\{\frac{1}{2}D^2 g(0)(w,\cdot)\right\}\right| = \sup_{g\in\mathfrak{M}} \sup_{\|w\|=1} \left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} g^j_{jk}(0)w_k\right|,$$

где $g^j_{ik} = \frac{\partial^2 g^j}{\partial z_i \partial z_k}$, g^j — j-я координатная функция отображения g. *Порядком отображения* $f \in \mathscr{L}S^m$ называется порядок л.-и.с. $\{\Lambda_\varphi[f] : \varphi \in \mathscr{A}^m\}$, порожденного отображением f.

Символ tr здесь обозначает след матрицы. Порядок л.-и.с. оказался очень важной числовой характеристикой семейства как в случае $m = 1$, так и при $m > 1$ — многие свойства л.-и.с. зависят только от порядка семейства. В случае $m = 1$ определение 2 является классическим определением порядка л.-и.с. $\mathfrak{M}$ (см. [1]): $\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup\limits_{f\in\mathfrak{M}}\left|\frac{f''(0)}{2}\right|$.

Определение 3. Пусть $\mathscr{F}$ — некоторое множество из $\mathscr{L}S^m$. *Линейно-инвариантной оболочкой множества* $\mathscr{F}$, обозначаемой через $\Lambda[\mathscr{F}] = \{\Lambda_\varphi[f] : f \in \mathscr{F}, \varphi \in \mathscr{A}^m\}$, называется наименьшее л.-и.с., содержащее $\mathscr{F}$.

Определение 4 [2]. Семейство $\mathscr{U}_\alpha(m) = \bigcup\{f \in \mathscr{L}S^m : \operatorname{ord} f \le \alpha\}$ называется *универсальным* л.-и.с. порядка α.

В [2] показано, что $\mathscr{U}_\alpha(m) = \varnothing$ для $\alpha < \frac{m+1}{2}$, а также что

(i) компактное л.-и.с. имеет конечный порядок,

(ii) л.-и.с. всех нормированных в нуле биголоморфных отображений шара B^m имеет бесконечный порядок.

Кроме того, там доказана теорема искажения в $\mathscr{U}_\alpha(m)$: *если* $\operatorname{ord} f = \alpha$, *то*

$$\frac{(1-\|z\|)^{\alpha-\frac{m+1}{2}}}{(1+\|z\|)^{\alpha+\frac{m+1}{2}}} \le |J_f(z)| \le \frac{(1+\|z\|)^{\alpha-\frac{m+1}{2}}}{(1-\|z\|)^{\alpha+\frac{m+1}{2}}}, \quad z \in B^m, \tag{2}$$

и утверждалась точность этого неравенства, исходя из того, что в (2) достигается равенство для отображения

$$K_\alpha(z) = (k_\alpha(z_1), z_2\sqrt{k'_\alpha(z_1)}, \dots, z_m\sqrt{k'_\alpha(z_1)}),$$

где

$$k_\alpha(z_1) = \frac{m+1}{4\alpha}\left[\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right)^{2\alpha/(m+1)} - 1\right] \quad \left(J_{K_\alpha}(z) = \frac{(1+z_1)^{\alpha-(m+1)/2}}{(1-z_1)^{\alpha+(m+1)/2}}\right),$$

$\operatorname{ord} K_\alpha = \alpha$. Однако при доказательстве равенства $\operatorname{ord} K_\alpha = \alpha$ было использовано следующее равенство (5.3) из [2]:

$$\log(|\det Df(w)|(1-\|w\|^2)^{(m+1)/2}) \\ = -\mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}D^2 g(0)\left(\frac{w}{\|w\|},.\right)\right\}\right)\log\left(\frac{1+\|w\|}{1-\|w\|}\right), \quad (5.3)$$

в котором $f \in \mathscr{L}S^m$, $g = \Lambda_\varphi[f](z)$, $w \in B^m$. Это равенство неверно (при переходе к (5.3) интегрированием предыдущего равенства допущена непоправимая ошибка, кроме того, w и g жестко связаны, о чем авторы забывают при использовании (5.3)), об этом свидетельствует хотя бы простой пример: $m = 1$, $f(z) = z$. Тем не менее неравенство (2) действительно является точным и равенство $\operatorname{ord} K_\alpha = \alpha$ справедливо. Это доказано ниже в § 2 применением метода понижения размерности, разработанного в § 1. Более того, в § 2 показано, что множество экстремальных для неравенства (2) отображений огромно — любая голоморфная в B^m функция $h(z) \neq 0$ порождает целое семейство таких экстремальных отображений.

К сожалению, использование заманчивого, но обманчивого равенства (5.3) из [2] вышло за рамки работы [2]. Нам известны результаты нескольких авторов, использовавших (5.3) (часть из них еще не опубликована); так, половина результатов из [4] получена при существенном использовании (5.3). С помощью метода понижения размерности удается спасти те утверждения из [2, 4], доказательство которых получено с использованием равенства (5.3), и прийти к новым результатам.

В § 3 приводятся некоторые новые результаты в $\mathscr{U}_\alpha(m)$, в частности, дана оценка $\|Df(z)\|$, $f \in \mathscr{U}_\alpha(m)$.

В этой работе мы рассматриваем только л.-и.с. конечного порядка.

§ 1. Метод понижения размерности

Определение 2 порядка отображения при $m \geq 2$ выглядит довольно сложным, однако эта числовая характеристика отображения имеет простую и тесную связь с якобианом отображения. Сформулируем соответствующий результат из [5] (полный текст статьи опубликован в [6]):

Теорема А. (а) *Если $f \in \mathscr{L}S^m$, то*

$$\operatorname{ord} f = \inf\left\{\alpha > 0 : |J_{\Lambda_\varphi[f]}(z)| \leq \frac{(1+\|z\|)^{\alpha-\frac{m+1}{2}}}{(1-\|z\|)^{\alpha+\frac{m+1}{2}}},\ \varphi \in \mathscr{A}^m,\ z \in B^m\right\}.$$

(б) *Если $f_1, f_2 \in \mathscr{L}S^m$ и $|J_{f_1}(z)| = |J_{f_2}(z)|$ для всех $z \in B^m$, то* $\operatorname{ord} f_1 = \operatorname{ord} f_2$.

Таким образом, порядок отображения f оказывается зависимым только от якобиана $|J_f(z)|$.

Суть метода понижения порядка состоит в том, чтобы задачу, поставленную для л.-и.с. в B^m, трансформировать в задачу для л.-и.с. в круге B^1 и воспользоваться для решения полученной задачи огромным арсеналом средств теории л.-и.с. аналитических в круге функций. Для формулировки теоремы, устанавливающей такую связь между л.-и.с. в B^m и л.-и.с. в шаре меньшей размерности, дадим необходимые определения.

Будем обозначать через $\mathfrak{M}(m)$ л.-и.с. из $\mathscr{L}S^m$, подчеркивая тем самым размерность шара, в котором определены рассматриваемые отображения. Если

$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, то будем обозначать через $Z = (z, z_{n+1})$ соответствующую точку из $\mathbb{C}^{n+1}$.

Пусть $\mathfrak{M}(n+1)$ — л.-и.с. порядка α. Обозначим

$$\begin{gathered}\mathfrak{J}_*[\mathfrak{M}(n+1)] = \{h : B^n \longrightarrow (0,\infty) : h(z) = |J_F(z,0)|,\ F \in \mathfrak{M}(n+1)\},\\ [\mathfrak{M}(n+1)]^* = \left\{f \in \mathscr{L}S^n : |J_f|^{\frac{n+2}{n+1}} \in \mathfrak{J}_*[\mathfrak{M}(n+1)]\right\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Заметим, что семейство $[\mathfrak{M}(n+1)]^*$ непусто. Действительно, фиксируем какое-либо отображение $F \in \mathfrak{M}(n+1)$ и положим

$$q(z) = (J_F(z,0))^{\frac{n+1}{n+2}}, \quad z \in B^n$$

(q — голоморфная в шаре B^n функция, $q(0) = 1$). Если

$$p(z) = \left(\int_0^{z_1} q(s, z_2, \dots, z_n)\,ds, z_2, \dots, z_n\right), \quad f(z) = (Dp(0))^{-1}p(z), \quad z \in B^n,$$

то $f \in [\mathfrak{M}(n+1)]^*$, поскольку

$$\begin{aligned}|J_f(z)|^{\frac{n+2}{n+1}} = |\det((Dp(0))^{-1}Dp(z))|^{\frac{n+2}{n+1}} &= \left|\frac{q(z)}{q(0)}\right|^{\frac{n+2}{n+1}}\\ &= \left(|J_F(z,0)|^{\frac{n+1}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{n+1}} = |J_F(z,0)|.\end{aligned}$$

Теорема 1. $[\mathfrak{M}(n+1)]^*$ *— л.-и.с. и* $\operatorname{ord}[\mathfrak{M}(n+1)]^* = \alpha\frac{n+1}{n+2}$.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы будет доказана, если мы покажем, что для любых $f \in [\mathfrak{M}(n+1)]^*$ и $\varphi \in \mathscr{A}^n$ значение $g = \Lambda_\varphi[f]$ принадлежит $[\mathfrak{M}(n+1)]^*$. Фиксируем вышеуказанные f и φ. Известно (см. [7, с. 36]), что существуют такие унитарная матрица n-го порядка U^n и точка $a \in B^n$, что $\varphi = U^n\varphi_a$, где

$$\varphi_a(z) = \frac{a - sz + (s-1)P_a(z)}{1 - \langle z, a\rangle}, \quad z \in B^n, \tag{4}$$

и

$$P_a(z) = \begin{cases} a\frac{\langle z,a\rangle}{\|a\|^2} & \text{при} \quad a \neq 0,\\ 0 & \text{при} \quad a = 0,\end{cases} \qquad s = s_a = \sqrt{1 - \|a\|^2}.$$

С другой стороны, существует отображение $F \in \mathfrak{M}(n+1)$, удовлетворяющее условию

$$|J_f(z)| = |J_F(z,0)|^{\frac{n+1}{n+2}}, \quad z \in B^n. \tag{5}$$

Обозначим через U^{n+1} унитарную матрицу $(n+1)$-го порядка, которая получается из матрицы U^n добавлением вектора $(0,\dots,0,1)$ в качестве $(n+1)$-го столбца и $(n+1)$-й строки. Положим $\Phi(z, z_{n+1}) = U^{n+1}\Phi_A(z, z_{n+1})$, где $A = (a, 0) \in B^{n+1}$, $\Phi_A(Z) = \frac{A - SZ + (S-1)P_A(Z)}{1 - \langle Z, A\rangle}$,

$$P_A(Z) = \begin{cases} A\frac{\langle Z,A\rangle}{\|A\|^2} & \text{при} \quad A \neq 0,\\ 0 & \text{при} \quad A = 0,\end{cases} \qquad S = S_A = \sqrt{1 - \|A\|^2}.$$

Обозначим $G(Z) = \Lambda_\Phi[F](Z)$. Поскольку F принадлежит л.-и.с. $\mathfrak{M}(n+1)$, то и G принадлежит $\mathfrak{M}(n+1)$. Поэтому

$$|J_G(z,0)| = \left|\frac{J_F(U^{n+1}\Phi_A(z,0))J_{\Phi_A}(z,0)}{J_F(U^{n+1}\Phi_A(0))J_{\Phi_A}(0)}\right| \in \mathfrak{J}_*[\mathfrak{M}(n+1)].$$

Так как $\|A\| = \|a\|$, $S = s$, $P_A(Z) = (P_a(z), 0)$, $\Phi_A(z,0) = (\varphi_a(z), 0)$, $U^{n+1}\Phi_A(z,0) = (U^n\varphi_a(z), 0)$, то, учитывая (5) и формулу для $|J_{\Phi_A}(Z)|$ (см. [7, с. 36]), запишем

$$|J_G(z,0)| = \left|\frac{J_f(U^n\varphi_a(z))}{J_f(U^n\varphi_a(0))}\right|^{\frac{n+2}{n+1}} \frac{1}{|1-\langle z,a\rangle|^{n+2}}.$$

Отсюда, используя равенство

$$|J_{\varphi_a}(z)| = \left(\frac{s}{|1-\langle z,a\rangle|}\right)^{n+1} = |J_{\Phi_A}(Z)|^{\frac{n+1}{n+2}}$$

(см. [7, с. 36]), получим

$$|J_G(z,0)| = \left|\frac{J_f(\varphi(z))J_\varphi(z)}{J_f(\varphi(0))J_\varphi(0)}\right|^{\frac{n+2}{n+1}} = |J_g(z)|^{\frac{n+2}{n+1}}.$$

Следовательно, $|J_g|^{\frac{n+2}{n+1}} \in \mathfrak{J}_*[\mathfrak{M}(n+1)]$ и $g \in [\mathfrak{M}(n+1)]^*$. Это доказывает линейную инвариантность семейства $[\mathfrak{M}(n+1)]^*$.

Вычислим $\operatorname{ord}[\mathfrak{M}(n+1)]^*$. Если $g \in \mathscr{L}S^n$ и $z = \rho w$, где $w \in \partial B^n$, $\rho \in [0,1)$, то (см. [2, 6])

$$\frac{d}{d\rho}\log J_g(\rho w) = \operatorname{tr}\{(Dg(\rho w))^{-1}D^2g(\rho w)(w,\cdot)\}. \tag{6}$$

Поскольку $\operatorname{ord}\mathfrak{M}(n+1) = \alpha$, по неравенству Пфальцграффа (2) для любого отображения $F \in \mathfrak{M}(n+1)$ имеем

$$|J_F(Z)| \le \frac{(1+\|Z\|)^{\alpha-\frac{n+2}{2}}}{(1-\|Z\|)^{\alpha+\frac{n+2}{2}}}, \quad Z \in B^{n+1}.$$

Поэтому для каждого $g \in [\mathfrak{M}(n+1)]^*$ справедливо неравенство

$$|J_g(z)| \le \left(\frac{(1+\|z\|)^{\alpha-\frac{n+2}{2}}}{(1-\|z\|)^{\alpha+\frac{n+2}{2}}}\right)^{\frac{n+1}{n+2}}, \quad z \in B^n,$$

которое при $\|z\| = 0$ обращается в равенство. Тем самым его можно дифференцировать по $\rho = \|z\|$ в точке $\rho = 0$ (предварительно прологарифмировав) с сохранением знака неравенства:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{d}{d\rho}\log J_g(\rho w)\right\}\Big|_{\rho=0} \le \frac{n+1}{n+2}\left(\alpha - \frac{n+2}{2} + \alpha + \frac{n+2}{2}\right) = 2\alpha\frac{n+1}{n+2}. \tag{7}$$

Теперь из (6) и (7) и линейности функционала $w \longrightarrow \operatorname{tr} D^2g(0)(w,\cdot)$ получим

$$\max_{\|w\|=1} |\operatorname{tr} D^2g(0)(w,\cdot)| \le 2\alpha\frac{n+1}{n+2}.$$

Тогда по определению 2

$$\operatorname{ord}[\mathfrak{M}(n+1)]^* \le \alpha\frac{n+1}{n+2}.$$

Осталось проверить выполнение неравенства

$$\operatorname{ord}[\mathfrak{M}(n+1)]^* \ge \alpha\frac{n+1}{n+2}.$$

Из п. (a) теоремы A и равенства $\operatorname{ord}\mathfrak{M}(n+1)=\alpha$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существуют $F\in\mathfrak{M}(n+1)$ и $Z_\varepsilon\in B^{n+1}$ такие, что

$$|J_F(Z_\varepsilon)|>\frac{(1+\|Z_\varepsilon\|)^{\alpha-\varepsilon-\frac{n+2}{2}}}{(1-\|Z_\varepsilon\|)^{\alpha-\varepsilon+\frac{n+2}{2}}}.$$

Очевидно, существует такая унитарная матрица U^{n+1}, что $(U^{n+1})^{-1}Z_\varepsilon=V_\varepsilon=(v_\varepsilon,0)$, где $v_\varepsilon\in B^n$. Обозначим $G_*(Z)=(U^{n+1})^{-1}F(U^{n+1}Z)$. Ясно, что $G_*\in\mathfrak{M}(n+1)$ в силу линейной инвариантности. Поскольку $J_{G_*}(Z)=J_F(U^{n+1}Z)$, имеем $J_{G_*}(V_\varepsilon)=J_F(Z_\varepsilon)$. Следовательно,

$$|J_{G_*}(V_\varepsilon)|>\frac{(1+\|v_\varepsilon\|)^{\alpha-\varepsilon-\frac{n+2}{2}}}{(1-\|v_\varepsilon\|)^{\alpha-\varepsilon+\frac{n+2}{2}}},$$

так как $\|v_\varepsilon\|=\|Z_\varepsilon\|$. Из определения $[\mathfrak{M}(n+1)]^*$ вытекает существование отображения $f\in[\mathfrak{M}(n+1)]^*$, для которого $|J_f(z)|^{\frac{n+2}{n+1}}=|J_{G_*}(z,0)|$. Поэтому для такого f

$$|J_f(v_\varepsilon)|=|J_{G_*}(V_\varepsilon)|^{\frac{n+1}{n+2}}>\frac{(1+\|v_\varepsilon\|)^{(\alpha-\varepsilon)\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+1}{2}}}{(1-\|v_\varepsilon\|)^{(\alpha-\varepsilon)\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+1}{2}}}.$$

Из последнего неравенства и п. (a) теоремы A имеем $\operatorname{ord}[\mathfrak{M}(n+1)]^*>(\alpha-\varepsilon)\frac{n+1}{n+2}$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем $\operatorname{ord}[\mathfrak{M}(n+1)]^*\ge\alpha\frac{n+1}{n+2}$. Теорема 1 доказана.

Далее мы дадим два обобщения формулировки теоремы 1. Для произвольного фиксированного $k\in\{1,\dots,n+1\}$ и $z=(z_1,\dots,z_n)\in B^n$ обозначим $Z=(z_1,\dots,z_{k-1},0,z_k,\dots,z_n)\in B^{n+1}$. По аналогии с данными выше обозначениями определим

$$\mathfrak{J}_*^k[\mathfrak{M}(n+1)]=\{h:B^n\longrightarrow(0,\infty):h(z)=|J_F(Z)|,\ F\in\mathfrak{M}(n+1)\},$$

$$[\mathfrak{M}(n+1)]_k^*=\left\{f\in\mathscr{L}S^n:|J_f|^{\frac{n+2}{n+1}}\in\mathfrak{J}_*^k[\mathfrak{M}(n+1)]\right\}.$$

В частности, $\mathfrak{J}_*^{n+1}[\mathfrak{M}(n+1)]=\mathfrak{J}_*[\mathfrak{M}(n+1)]$, $[\mathfrak{M}(n+1)]_{n+1}^*=[\mathfrak{M}(n+1)]^*$.

Теорема 2. *Для любого фиксированного $k\in\{1,\dots,n+1\}$ семейство $[\mathfrak{M}(n+1)]_k^*$ является л.-и.с. из $\mathscr{L}S^n$ и его порядок равен $\alpha\frac{n+1}{n+2}$, где $\alpha=\operatorname{ord}\mathfrak{M}(n+1)$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно лишь несколько изменить доказательство теоремы 1.

При доказательстве линейной инвариантности $[\mathfrak{M}(n+1)]_k^*$ нужно заменить точку $(z,0)\in B^{n+1}$, где $z=(z_1,\dots,z_n)\in B^n$, точкой $(z_1,\dots,z_{k-1},0,z_k,\dots,z_n)\in B^{n+1}$, точку A точкой $(a_1,\dots,a_{k-1},0,a_k,\dots,a_n)$, а матрицу U^{n+1} матрицей U_k^{n+1} порядка $n+1$, которая получается из матрицы U^n добавлением к ней в качестве k-го столбца и k-й строки вектора $(0,\dots,1,\dots,0)$ (с единицей на k-м месте).

При вычислении $\operatorname{ord}[\mathfrak{M}(n+1)]_k^*$ вместо матрицы U^{n+1} надо взять такую унитарную матрицу U_k^{n+1}, что $(U_k^{n+1})^{-1}Z_\varepsilon=(v_1,\dots,v_{k-1},0,v_k,\dots,v_n)=V_{\varepsilon,k}$, где $(v_1,\dots,v_n)\in B^n$. В остальном доказательство теоремы 2 повторяет доказательство предыдущей теоремы.

Теперь фиксируем $l \in \{1, \dots, n\}$ и возрастающую конечную последовательность чисел $k_1, \dots, k_l \in \{1, \dots, n+1\}$. Если координаты точек $Z = (Z_1, \dots, Z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ и $z = (z_1, \dots, z_{n+1-l}) \in \mathbb{C}^{n+1-l}$ удовлетворяют соотношению

$$Z_j = \begin{cases} z_j & \text{при } 1 \le j < k_1, \\ z_{j-i} & \text{при } k_{i-1} < j < k_i, \ i = 2, \dots, l-1, \\ z_{j-l} & \text{при } k_l < j \le n+1, \\ 0 & \text{при } \ j = k_i, \ i = 1, \dots, l, \end{cases}$$

то будем писать $Z \underset{k_1,\dots,k_l}{\longleftrightarrow} z$. В частности, если $l = 1$ и $k_1 = k$, то $(z_1, \dots, z_{k-1}, 0, z_k, \dots, z_n) \underset{k}{\longleftrightarrow} (z_1, \dots, z_n)$, а $(z_1, \dots, z_n, 0) \underset{n+1}{\longleftrightarrow} (z_1, \dots, z_n)$. Для любого фиксированного $l \in \{1, \dots, n\}$, любой возрастающей последовательности $k_1, \dots, k_l \in \{1, \dots, n+1\}$ и $Z \underset{k_1,\dots,k_l}{\longleftrightarrow} z$ обозначим

$$\mathfrak{J}_*^{k_1,\dots,k_l}[\mathfrak{M}(n+1)] = \{h : B^{n+1-l} \longrightarrow (0, \infty) : h(z) = |J_F(Z)|, \ F \in \mathfrak{M}(n+1)\},$$

$$[\mathfrak{M}(n+1)]^*_{k_1,\dots,k_l} = \bigl\{f \in \mathscr{L}S^{n+1-l} : |J_f|^{\frac{n+2}{n+2-l}} \in \mathfrak{J}_*^{k_1,\dots,k_l}[\mathfrak{M}(n+1)]\bigr\}.$$

Теорема 3. *Для любого фиксированного $l \in \{1, \dots, n\}$ и любого фиксированного набора чисел $k_1, \dots, k_l \in \{1, \dots, n+1\}$ семейство $[\mathfrak{M}(n+1)]^*_{k_1,\dots,k_l}$ является л.-и.с. из $\mathscr{L}S^{n+1-l}$ и его порядок равен $\alpha\frac{n+2-l}{n+2}$, где $\alpha = \operatorname{ord}\mathfrak{M}(n+1)$.*

Доказательство этой теоремы получается l-кратным последовательным применением теоремы 2.

При $l = n$ из теоремы 3 получаем

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{M}(n+1)$ — л.-и.с. порядка α. Обозначим через 0 нуль в $\mathbb{C}^n$ и*

$$\mathfrak{M}(1) = \bigl\{p(z_1) \in \mathscr{L}S^1 : |p'(z_1)|^{\frac{n+1}{2}} = |J_F(z_1, 0)|, \ F \in \mathfrak{M}(n+1), \ z_1 \in B\bigr\}.$$

Тогда $\mathfrak{M}(1)$ — л.-и.с. и $\operatorname{ord}\mathfrak{M}(1) = \alpha\frac{2}{n+2}$. Более того, если $\operatorname{ord}\mathfrak{M}(n+1) = \frac{n+2}{2}$ (наименьшее возможное значение для непустого л.-и.с.), то $\operatorname{ord}\mathfrak{M}(1) = 1$ и, следовательно, $\mathfrak{M}(1)$ является классом однолистных выпуклых функций в единичном круге B (см. [1]).

Теперь мы дадим еще одно обобщение теоремы 1, заменив в определении множества $\mathfrak{J}_*[\mathfrak{M}(n+1)]$ условие $z_{n+1} = 0$ условием $z_{n+1} = c$, $c \in B$. Пусть $\mathfrak{M}(n+1)$ — л.-и.с. порядка α. Фиксируем $c \in B$. Обозначим $s = \sqrt{1 - |c|^2}$,

$$\mathfrak{J}_{*c}[\mathfrak{M}(n+1)] = \left\{h : B^n \longrightarrow (0, \infty) : h(z) = \left|\frac{J_F(sz, c)}{J_F(0, c)}\right|, \ F \in \mathfrak{M}(n+1)\right\},$$

$$[\mathfrak{M}(n+1)]^{*c} = \bigl\{f \in \mathscr{L}S^n : |J_f|^{\frac{n+2}{n+1}} \in \mathfrak{J}_{*c}[\mathfrak{M}(n+1)]\bigr\}.$$

Теорема 4. *Для любого фиксированного $c \in B$ семейство $[\mathfrak{M}(n+1)]^{*c}$ является л.-и.с. из $\mathscr{L}S^n$ и $\operatorname{ord}[\mathfrak{M}(n+1)]^{*c} = \alpha\frac{n+1}{n+2}$.*

Доказательство. Из определения л.-и.с. следует, что $\mathfrak{M}(n+1) = \{G = \Lambda_\Phi[F] : F \in \mathfrak{M}(n+1)\}$ для любого автоморфизма $\Phi \in \mathscr{A}^{n+1}$. Положим $A = (0, c) \in B^{n+1}$ и $\Phi(Z) = -\Phi_{-A}(Z)$, $Z \in B^{n+1}$. Тогда

$$\Phi(z, 0) = (z, 0)s + A, \quad |J_{\Phi_{-A}}(z, 0)| = |J_{\Phi_{-A}}(0)|, \quad z \in B^n, \quad s = \sqrt{1 - |c|^2}.$$

Поэтому для $G = \Lambda_\Phi(F)$ получим

$$|J_G(z,0)| = \left|\frac{J_F(\Phi(z,0))J_\Phi(z,0)}{J_F(\Phi(0))J_\Phi(0)}\right| = \left|\frac{J_F(\Phi(z,0))}{J_F(\Phi(0))}\right| = \left|\frac{J_F(sz,c)}{J_F(0,c)}\right|.$$

Следовательно, $\mathfrak{J}_{*c}[\mathfrak{M}(n+1)] = \mathfrak{J}_*[\mathfrak{M}(n+1)]$, $[\mathfrak{M}(n+1)]^{*c} = [\mathfrak{M}(n+1)]^*$. Теперь утверждение теоремы 4 непосредственно вытекает из теоремы 1.

Существенным дополнением метода понижения размерности являются теоремы 5 и 6 из § 2 и теорема 7 из § 3.

§ 2. Доказательство некоторых утверждений из [2, 4]

В этом параграфе мы докажем ряд утверждений, ранее опубликованных в работах [2, 4], но (см. введение) снабженных неверными доказательствами. Теорема 5.1 (искажения) [2] является, на наш взгляд, важнейшим результатом в [2], суть которого — доказательство неравенства (2). Это доказательство в [2] использует неверное равенство (5.3) из [2] (см. введение). В доказательстве самого неравенства (2) можно легко обойти использование (5.3): надо, воспользовавшись определением 2 порядка семейства, при интегрировании равенства, предшествующего (5.3), оценить интеграл в правой части. После интегрирования сразу же получим неравенство (5.4) из [2], а из него — нужное неравенство (2). Таким образом, можно сказать, что использование в доказательстве теоремы 5.1 равенства (5.3) несущественно. Однако в § 3 мы дадим простое доказательство теоремы 5.1, опирающееся на метод понижения размерности.

Иначе дело обстоит с доказательством точности неравенства (2). Точность неравенства (2) следует из того, что (2) обращается в равенство при $f(z) = K_\alpha(z)$ ($K_\alpha(z)$ из введения), и того, что $\operatorname{ord} K_\alpha = \alpha$. Последнее же равенство вытекает [2] из следствия 5.2.

Следствие 5.2 [2]. *Пусть $\mathfrak{M}(1)$ — л.-и.с. функций порядка α. Обозначим*

$$(\mathfrak{M}(1))_n = \{F(z) = (p(z_1), z_2\sqrt{p'(z_1)}, \dots, z_n\sqrt{p'(z_1)} : p \in \mathfrak{M}(1)\} \subset \mathscr{L}S^n.$$

Тогда $\operatorname{ord}\Lambda[(\mathfrak{M}(1))_n] = \alpha(n+1)/2$.

Доказательство же следствия 5.2 в [2] существенно опирается на равенство (5.3). Ниже мы приводим теорему 5, более общую, чем следствие 5.2, и доказываем ее, применяя метод понижения размерности (естественно, без использования (5.3)).

Пусть $\mathfrak{M}(1)$ — произвольное л.-и.с. порядка α. Обозначим через $0'$ нуль в $\mathbb{C}^{n-1}$ и $\{\mathfrak{M}(1)\}_n = \left\{f \in \mathscr{L}S^n : |J_f(z_1, 0')| = |p'(z_1)|^{\frac{n+1}{2}},\ p \in \mathfrak{M}(1),\ z_1 \in B\right\}$. Семейство $\{\mathfrak{M}(1)\}_n$ непусто. Действительно, если

$$P(z) = (p(z_1), z_2\sqrt{p'(z_1)}, \dots, z_n\sqrt{p'(z_1)}), \quad p \in \mathfrak{M}(1), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in B^n,$$

то $P \in \{\mathfrak{M}(1)\}_n$. Так как для отображения $F \in (\mathfrak{M}(1))_n$ якобиан $J_F(z)$ равен $(p'(z_1))^{(n+1)/2}$, то $\{\mathfrak{M}(1)\}_n \supset (\mathfrak{M}(1))_n$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_n$ линейно-инвариантную оболочку множества $\{\mathfrak{M}(1)\}_n$.

Теорема 5. $\operatorname{ord}\mathfrak{F}_n = \alpha\frac{n+1}{2}$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{ord}\mathfrak{M}(1) = \alpha$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $p = p_\varepsilon \in \mathfrak{M}(1)$, что $\operatorname{ord} p \geq \alpha - \varepsilon$. Возьмем соответствующее отображение $f \in \{\mathfrak{M}(1)\}_n$ такое, что $|J_f(z_1, 0')| = |p'(z_1)|^{\frac{n+1}{2}}$. Тогда в обозначениях § 1 $p \in [\mathfrak{F}_n]^*_{2,\dots,n}$, следовательно, $\alpha - \varepsilon \leq \operatorname{ord}[\mathfrak{F}_n]^*_{2,\dots,n}$. Если мы обозначим

$\alpha_1 = \operatorname{ord}\mathfrak{F}_n$, то по следствию 1 $\operatorname{ord}[\mathfrak{F}_n]^*_{2,\dots,n} = \alpha_1\frac{2}{n+1}$. Поэтому $\alpha_1 \ge \frac{n+1}{2}(\alpha-\varepsilon)$. Отсюда в силу произвольности ε получаем $\alpha_1 \ge \frac{n+1}{2}\alpha$. Осталось показать, что $\alpha_1 \le \frac{n+1}{2}\alpha$.

Если $f \in \mathscr{L}S^n$ и $F = \Lambda_\Phi[f]$, то

$$|J_F(z_1,0,\dots,0)| = \left|\frac{J_f(\Phi(z_1,0,\dots,0))J_\Phi(z_1,0,\dots,0)}{J_f(\Phi(0))J_\Phi(0)}\right|, \quad \Phi\in\mathscr{A}^n, \quad z_1\in B. \quad (8)$$

Так как автоморфизм Φ можно записать в виде $\Phi = U^n\Phi_a$, где U^n — унитарная матрица n-го порядка с первым столбцом $u = (u_1,\dots,u_n)$, $\|u\| = 1$, Φ_a определяется по формуле (4), $a = (a_1^*,\dots,a_n^*) \in B^n$, то

$$\left|\frac{J_\Phi(z_1,0,\dots,0)}{J_\Phi(0)}\right| = \left|\frac{J_{\Phi_a}(z_1,0,\dots,0)}{J_{\Phi_a}(0)}\right| = \frac{1}{\left|1-z_1\overline{a_1^*}\right|^{n+1}}. \quad (9)$$

Поскольку для произвольных $a, z \in B^n$ и любой унитарной матрицы U^n выполняется равенство $\langle U^n z, U^n a\rangle = \langle z, a\rangle$, то (см. формулу (4)) $\Phi(z_1,0,\dots,0) = \Phi_A(z_1u)$, где $A = U^n a = (a_1,\dots,a_n)$, $\|A\| = \|a\|$ и первая координата вектора

$$\Phi_A(z_1u) = \frac{A - sz_1u + (s-1)Az_1\frac{\langle u,A\rangle}{\|A\|^2}}{1 - z_1\langle u, A\rangle}, \quad s = \sqrt{1-\|a\|^2} = \sqrt{1-\|A\|^2},$$

имеет вид

$$(\Phi_A)_1(z_1u) = \frac{a_1 - sz_1u_1 + (s-1)a_1z_1\frac{\langle u,A\rangle}{\|A\|^2}}{1 - \langle U^n(z_1,0,\dots,0), U^n a\rangle},$$

обозначим ее через $\varphi_1(z_1)$. Далее, обозначим $r = su_1 + (1-s)a_1\frac{\langle u,A\rangle}{\|A\|^2} \in B$. Тогда

$$\varphi_1(z_1) = \frac{a_1 - z_1r}{1 - z_1\overline{a_1^*}}, \quad z_1 \in B. \quad (10)$$

Заметим, что $|\varphi_1(z_1)| < 1$ при $z_1 \in B$, $\varphi_1(0) = a_1$.

Пусть теперь $F \in \mathfrak{F}_n$. Тогда существуют такие отображение $f \in \{\mathfrak{M}(1)\}_n \subset \mathscr{L}S^n$ и автоморфизм $\Phi \in \mathscr{A}^n$, что $F = \Lambda_\Phi[f]$. Из определения семейства $\{\mathfrak{M}(1)\}_n$, с учетом (8) и (9) получаем

$$\begin{aligned}|J_F(z_1,0,\dots,0)| &= \left|\frac{J_f(\Phi(z_1,0,\dots,0))}{J_f(\Phi(0))}\right| \frac{1}{|1-z_1\overline{a_1^*}|^{n+1}} \\ &= \left|\frac{p'(\varphi_1(z_1))}{p'(\varphi_1(0))}\right|^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\left(|1-z_1\overline{a_1^*}|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \left|\frac{p'(\varphi_1(z_1))}{p'(a_1)\left(1-z_1\overline{a_1^*}\right)^2}\right|^{\frac{n+1}{2}},\end{aligned}$$

где $p \in \mathfrak{M}(1)$. Если $r \ne a_1\overline{a_1^*}$, то функция $\varphi_1(z_1)$ однолистна и, обозначив

$$H_a(z_1) = \frac{p(\varphi_1(z_1)) - p(a_1)}{p'(a_1)\left(a_1\overline{a_1^*} - r\right)}, \quad z_1 \in B, \quad (11)$$

получим

$$|J_F(z_1,0,\dots,0)| = |H_a'(z_1)|^{\frac{n+1}{2}}, \quad z_1 \in B.$$

Если $r = a_1\overline{a_1^*}$, то последнее равенство для якобиана справедливо с выпуклой функцией $H_a(z_1) = -\log\left(1 - z_1\overline{a_1^*}\right)/\overline{a_1^*}$. Следовательно, множество всех таких выпуклых функций H_a и функций, определенных формулой (11), содержит л.-и.с. $[\mathfrak{F}_n]^*_{2,\dots,n}$. Покажем, что $\operatorname{ord} H_a \le \alpha$ для любой такой функции H_a. Тогда $\operatorname{ord}[\mathfrak{F}_n]^*_{2,\dots,n} \le \alpha$ и $\alpha\frac{n+1}{2} \ge \alpha_1$.

В случае, когда $H_a(z_1) = -\log\bigl(1 - z_1\overline{a_1^*}\bigr)/\overline{a_1^*}$, верно равенство $\operatorname{ord} H_a = 1$, так как порядок любой выпуклой функции равен 1 (см. [1]). Для $r \neq a_1\overline{a_1^*}$ обозначим

$$\psi(\zeta) = \frac{\zeta + a_1}{1 + \overline{a_1}\zeta}, \quad \zeta \in B;$$

$$\chi(z_1) = \psi^{-1}(\varphi_1(z_1)) = \frac{z_1 C_1}{1 + z_1 C_2} = C_1 z_1 - C_1 C_2 z_1^2 + \dots, \quad z_1 \in B;$$

здесь

$$C_1 = \frac{a_1\overline{a_1^*} - r}{1 - |a_1|^2} = \chi'(0), \quad C_2 = \frac{a_1\overline{a_1^*} - r}{1 - |a_1|^2} = \frac{1}{2}\frac{\chi''(0)}{\chi'(0)},$$

φ_1 определено в (10). Если $p(\zeta) \in \mathfrak{M}(1)$, $\zeta \in B$, то $g(\zeta) = \Lambda_\psi[p](\zeta)$ также принадлежит $\mathfrak{M}(1)$. Поскольку $|\chi(z_1)| \leq 1$ для всех $z_1 \in \overline{B}$, все коэффициенты этой функции по модулю не превосходят 1, в частности, $|C_1| \leq 1$ и $|C_2| \leq 1$. Положим $z_1 = e^{it}$ и подберем $t \in [0, 2\pi)$ так, чтобы $e^{it}C_2 = -|C_2|$; тогда $\frac{|C_1|}{|1 - |C_2||} \leq 1$. Следовательно, $|C_2| \leq 1 - |C_1|$. С другой стороны, из определения функций g, χ и H_a получим

$$H_a(z_1) = \frac{g(\chi(z_1))}{\chi'(0)}, \quad H_a'(z_1) = \frac{g'(\chi(z_1))\chi'(z_1)}{\chi'(0)}, \quad z_1 \in B,$$

$$\frac{1}{2}H_a''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\chi''(0)}{\chi'(0)} + g''(0)\chi'(0)\right).$$

Поскольку $g \in \mathfrak{M}(1)$, то $\operatorname{ord} g \leq \alpha$ и $\frac{1}{2}|g''(0)| \leq \alpha$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\bigl|H_a''(0)\bigr| \leq |C_2| + |C_1|\frac{1}{2}|g''(0)| \leq 1 - |C_1| + \alpha|C_1| = 1 + |C_1|(\alpha - 1),$$

поэтому $\operatorname{ord}[\mathfrak{F}_n]^*_{2,\dots,n} = \sup\limits_{h \in [\mathfrak{F}_n]^*_{2,\dots,n}} \frac{|h''(0)|}{2} \leq \alpha$ и теорема 5 доказана.

Теперь следствие 5.2 из [2] получается как частный случай теоремы 5.

Следствие 2. $\operatorname{ord} K_\alpha = \alpha$.

Последний факт доказывает точность неравенства (2).

Заметим, что кроме K_α существует много других экстремальных для неравенства (2) отображений. Действительно, пусть $n > 1$, и пусть фиксировано $\nu \in \{1, \dots, n\}$. Далее, пусть, например,

$$R_\nu(z) = \left(z_1 h_1(z_\nu), \dots, z_{\nu-1}h_{\nu-1}(z_\nu), \int\limits_0^{z_\nu} h_\nu(s)\,ds, z_{\nu+1}h_{\nu+1}(z_\nu), \dots, z_n h_n(z_\nu)\right),$$

где $h_j(z_\nu)$, $h_j(0) = 1$, $j = 1, \dots, n$, — произвольные голоморфные в B функции, удовлетворяющие условию

$$\prod_{j=1}^{n} h_j(z_\nu) = \frac{(1 + z_\nu)^{\alpha - (n+1)/2}}{(1 - z_\nu)^{\alpha + (n+1)/2}}.$$

Тогда

$$J_{R_\nu}(z) = \prod_{j=1}^{n} h_j(z_\nu), \quad z \in B^n,$$

и по п. (б) теоремы A $\operatorname{ord} R_\nu = \operatorname{ord} K_\alpha = \alpha$. Таким образом, R_ν является экстремальной функцией в неравенстве (2).

Переходим к анализу некоторых утверждений из работы [4]. Эта работа содержит 6 теорем, из которых 3 (теоремы 1, 4 и 5), к сожалению, снабжены доказательствами, существенно использующими все то же равенство (5.3) из [2]. В теореме 1 из [4] это равенство дано под номером (6). В этой теореме рассматриваются отображения $\hat{f} : B^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, определяемые следующим образом. Пусть $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $Z = (z, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Тогда $\hat{f}(Z) = (f(z), z_{n+1}(J_f(z))^{1/(n+1)})$, $f \in \mathfrak{M}(n)$ — л.-и.с. порядка α. Множество таких отображений $\hat{f}$ обозначается через $\widehat{\mathscr{F}}$.

Теорема 1 [4]. $\operatorname{ord}\Lambda[\widehat{\mathscr{F}}] = \alpha\frac{n+2}{n+1}$.

Опять мы дадим доказательство, отличающееся от данного в [4] не только справедливостью, но и общностью.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{M}(n)$ — л.-и.с. порядка α из $\mathscr{L}S^n$. Обозначим*

$$\mathscr{F}_{n+1} = \{F \in \mathscr{L}S^{n+1} : |J_F(z_1, 0)| = |J_f(z_1, 0')|^{(n+2)/(n+1)},\ f \in \mathfrak{M}(n)\};$$

здесь 0 — нуль в $\mathbb{C}^n$, $0'$ — нуль в $\mathbb{C}^{n-1}$. Тогда $\operatorname{ord}\Lambda[\mathscr{F}_{n+1}] = \alpha\frac{n+2}{n+1}$.

Заметим, что ранее определенное семейство $\widehat{\mathscr{F}}$ содержится в $\mathscr{F}_{n+1}$, поэтому теорема 1 из [4] следует из теоремы 6.

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим семейство функций

$$\mathfrak{M}^*(1) = \big\{p \in \mathscr{L}S^1 : |p'(z_1)|^{\frac{n+1}{2}} = |J_f(z_1, 0')|,\ f \in \mathfrak{M}(n)\big\}.$$

По следствию 1 $\mathfrak{M}^*(1)$ — л.-и.с. порядка $\alpha\frac{2}{n+1}$. Как и в теореме 5, рассмотрим множество отображений

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{M}^*(1)\}_{n+1} &= \{F \in \mathscr{L}S^{n+1} : |J_F(z_1, 0)| = |p'(z_1)|^{\frac{n+2}{2}},\ p \in \mathfrak{M}^*(1)\} \\ &= \{F \in \mathscr{L}S^{n+1} : |J_F(z_1, 0)| = |J_f(z_1, 0')|^{\frac{n+2}{n+1}},\ f \in \mathfrak{M}(n)\}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\{\mathfrak{M}^*(1)\}_{n+1} = \mathscr{F}_{n+1}$, и по теореме 5

$$\operatorname{ord}\Lambda[\mathscr{F}_{n+1}] = \operatorname{ord}\Lambda[\{\mathfrak{M}^*(1)\}_{n+1}] = \operatorname{ord}\mathfrak{M}^*(1)\frac{n+2}{2}.$$

Но, как замечено выше, $\operatorname{ord}\mathfrak{M}^*(1) = \alpha\frac{2}{n+1}$. Поэтому $\operatorname{ord}\Lambda[\mathscr{F}_{n+1}] = \alpha\frac{n+2}{n+1}$, и теорема 6 доказана.

Заметим, что теорема 5 получается $(n-1)$-кратным применением теоремы 6.

Ниже мы даем доказательства теорем 4 и 5 из [4]. Эти доказательства снова опираются на теорему A и метод понижения размерности.

В теореме 4 из [4] речь идет об отображениях вида

$$F(z) = z\prod_{j=1}^{n}(f_j(z_j)/z_j)^{\lambda_j}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in B^n, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1,$$

$f_j(\zeta)$ — произвольные конформные и однолистные отображения круга B на звездообразную относительно точки 0 область, $f_j(0) = 0$, $f_j'(0) = 1$ (класс таких звездообразных функций обозначают через S^*). В [4] множество всех таких отображений F обозначается через S^*_π и доказывается, что эти $F(z)$ биголоморфны в B^n и отображают шар B^n на звездообразную область относительно нуля. Как и раньше, обозначаем через $\Lambda[S^*_\pi]$ линейно-инвариантную оболочку класса S^*_π, т. е. наименьшее л.-и.с., содержащее S^*_π.

Теорема 4 [4]. $\operatorname{ord}\Lambda[S^*_\pi] = \frac{3n+1}{2}$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится также

Лемма [8, теорема 2.4]. *Если функция h голоморфно и однолистно отображает круг B на выпуклую область, $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ (класс таких выпуклых функции обозначим через $\mathscr{K}$) и $K \subset B$ — произвольный открытый круг, то $h(K)$ — выпуклая область.*

Доказательство теоремы 4 из [4]. Поскольку функция $\psi(\zeta)$ принадлежит S^* тогда и только тогда, когда существует такая выпуклая функция $h \in \mathscr{K}$, что $\frac{\psi(\zeta)}{z} = h'(\zeta)$ (см., например, [9, с. 204]), то любое отображение $F \in S^*_\pi$ можно записать в виде

$$F(z) = z\prod_{j=1}^{n}(h_j'(z_j))^{\lambda_j}, \quad h_j \in \mathscr{K}, \tag{12}$$

λ_j имеют прежний смысл. Обозначим л.-и.с. $\Lambda[S^*_\pi]$ через $\mathscr{F}_n$, $\alpha = \operatorname{ord}\mathscr{F}_n$. Пусть

$$\mathfrak{M}(1) = [\mathscr{F}_n]^* = \{g(z_1) \in \mathscr{L}S^1 : |g'(z_1)|^{(n+1)/2} = |J_G(z_1, 0, \dots, 0),\ G \in \mathscr{F}_n\}.$$

Тогда по следствию 1 из § 1 $\mathfrak{M}(1)$ — л.-и.с. и $\operatorname{ord}\mathfrak{M}(1) = \alpha\frac{2}{n+1}$. Семейство $\mathscr{F}_n$ состоит из таких отображений $G(z)$, что

$$|J_G(z)| = \left|\frac{J_F(\Phi(z))J_\Phi(z)}{J_F(\Phi(0))J_\Phi(0)}\right|, \quad \Phi \in \mathscr{A}^n, \quad F \in S^*_\pi.$$

Поэтому семейство $\mathfrak{M}(1)$ состоит из таких функций $g(z_1)$, что

$$|J_g(z_1)|^{(n+1)/2} = |g'(z_1)|^{(n+1)/2} = \left|\frac{J_F(\Phi(z_1, 0'))J_\Phi(z_1, 0')}{J_F(\Phi(0))J_\Phi(0)}\right|, \tag{13}$$

здесь $0'$ — нуль в $\mathbb{C}^{n-1}$, F и Φ имеют прежний смысл. Как и в доказательстве теоремы 5, запишем автоморфизм $\Phi(z)$ в виде $\Phi = U^n\Phi_a$ (U^n — унитарная матрица, $a = (a_1^*, \dots, a_n^*) \in B^n$), и обозначим $A = U^n a = (a_1, \dots, a_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ — первый столбец матрицы U^n. Тогда, как и прежде,

$$\Phi(z_1, 0') = \Phi_A(U^n(z_1, 0')) = \Phi_A(z_1 u) = (\phi_1(z_1 u), \dots, \phi_n(z_1 u)),$$

где

$$\phi_k(z_1 u) = \frac{a_k - s z_1 u_k + (s-1)a_k z_1\frac{\langle u, A\rangle}{\|A\|^2}}{1 - z_1\langle u, A\rangle} = \frac{a_k - z_1 r_k}{1 - z_1\overline{a_1^*}},$$

$$r_k = s u_k + (1-s)a_k\frac{\langle u, A\rangle}{\|A\|^2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Заметим, что $r_k \in \overline{B}$, так как $u_k \in \overline{B}$ и $a_k\frac{\langle u, A\rangle}{\|A\|} \in B$ при $A \neq 0$. Действительно,

$$a_k\frac{\langle u, A\rangle}{\|A\|^2} = \frac{\langle U^n(a_k, 0'), U^n a\rangle}{\|A\|^2} = \frac{\langle (a_k, 0'), a\rangle}{\|A\|^2} = \frac{a_k\overline{a_1^*}}{\|A\|^2};$$

если теперь $|a_1^*| \le |a_k|$, то $|a_k\overline{a_1^*}| \le |a_k|^2 \le \|A\|^2$ и $r_k \in \overline{B}$, если $|a_1^*| \ge |a_k|$, то $|a_k\overline{a_1^*}| \le |a_1^*|^2 \le \|a\|^2 = \|A\|^2$.

Для отображения F, определенного формулой (12), вычислим якобиан $J_F(z)$. Обозначим $F = (F_1, \dots, F_n)$,

$$F_k(z) = z_k\prod_{j=1}^{n}(h_j'(z_j))^{\lambda_j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\frac{\partial F_k(z)}{\partial z_j}=\begin{cases}\lambda_j F_k(z)\frac{h_j''(z_j)}{h_j'(z_j)} & \text{при } k\neq j,\\ \frac{F_k(z)}{z_k}+\lambda_k F_k(z)\frac{h_k''(z_k)}{h_k'(z_k)} & \text{при } k=j\end{cases}$$

и

$$\nabla F_k(z)=F_k(z)\biggl(\frac{\lambda_1 h_1''(z_1)}{h_1'(z_1)},\dots,\frac{1}{z_k}+\lambda_k\frac{h_k''(z_k)}{h_k'(z_k)},\dots,\lambda_n\frac{h_n''(z_n)}{h_n'(z_n)}\biggr).$$

Следовательно,

$$J_F(z)=\begin{vmatrix}\nabla F_1\\ \nabla F_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \nabla F_n\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}F_k(z)\begin{vmatrix}\frac{1}{z_1}+\lambda_1\frac{h_1''(z_1)}{h_1'(z_1)} & \lambda_2\frac{h_2''(z_2)}{h_2'(z_2)} & \dots & \lambda_n\frac{h_n''(z_n)}{h_n'(z_n)}\\ -\frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ -\frac{1}{z_1} & 0 & \dots & \frac{1}{z_n}\end{vmatrix}$$

— результат вычитания первой строки определителя J_F из каждой последующей. Расписывая последний определитель по элементам 1-й строки, получим

$$\begin{aligned}J_F(z)&=\biggl(\prod_{k=1}^{n}F_k(z)\biggr)\biggl[\biggl(\frac{1}{z_1}+\lambda_1\frac{h_1''(z_1)}{h_1'(z_1)}\biggr)\frac{1}{z_2\dots z_n}+\lambda_2\frac{h_2''(z_2)}{h_2'(z_2)}\frac{1}{z_1z_3\dots z_n}\\ &\qquad+\lambda_3\frac{h_3''(z_3)}{h_3'(z_3)}\frac{1}{z_1z_2z_4\dots z_n}+\dots+\lambda_n\frac{h_n''(z_n)}{h_n'(z_n)}\frac{1}{z_1z_2\dots z_{n-1}}\biggr]\\ &=\biggl(\prod_{k=1}^{n}\frac{F_k(z)}{z_k}\biggr)\biggl[1+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{z_kh_k''(z_k)}{h_k'(z_k)}\biggr]=\biggl(\prod_{k=1}^{n}(h_k'(z_k))^{\lambda_k}\biggr)^{n}\biggl[1+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{z_kh_k''(z_k)}{h_k'(z_k)}\biggr].\end{aligned}$$

Поэтому из (13) имеем

$$\begin{aligned}|g'(z_1)|^{(n+1)/2}&=\left|\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\bigl(h_k'\bigl(\frac{a_k-z_1r_k}{1-z_1\overline{a_1^*}}\bigr)\bigr)^{\lambda_kn}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(h_k'(a_k))^{\lambda_kn}\bigl(1-z_1\overline{a_1^*}\bigr)^{2n}}\right|\bigl|1-z_1\overline{a_1^*}\bigr|^{n-1}\\ &\times\left|\Biggl(1+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{a_k-z_1r_k}{1-z_1\overline{a_1^*}}\frac{h_k''\bigl(\frac{a_k-z_1r_k}{1-z_1\overline{a_1^*}}\bigr)}{h_k'\bigl(\frac{a_k-z_1r_k}{1-z_1\overline{a_1^*}}\bigr)}\Biggr)\Bigg/\Biggl(1+\sum_{k=1}^{n}\lambda_ka_k\frac{h_k''(a_k)}{h_k'(a_k)}\Biggr)\right|.\end{aligned}\tag{14}$$

Если $\overline{a_1^*}a_k\neq r_k$, то из леммы следует, что функция

$$H_k(z_1)=\frac{h_k\bigl(\frac{a_k-z_1r_k}{1-z_1\overline{a_1^*}}\bigr)-h_k(a_k)}{h_k'(a_k)\bigl(\overline{a_1^*}a_k-r_k\bigr)}=z+\dots$$

выпуклая, причем

$$H_k'(z_1)=\frac{h_k'\bigl(\frac{a_k-z_1r_k}{1-z_1\overline{a_1^*}}\bigr)}{h_k'(a_k)\bigl(1-z_1\overline{a_1^*}\bigr)^2}.$$

Если $\overline{a_1^*}a_k=r_k$, то $H_k'(z_1)$ примет вид $\bigl(1-z_1\overline{a_1^*}\bigr)^{-2}$ и также будет производной выпуклой функции. Следовательно, для рассматриваемых значений λ_k функция $H'(z_1)=\prod\limits_{k=1}^{n}(H_k'(z_1))^{\lambda_k}$ — производная выпуклой функции $H(z_1)$, что следует из условия выпуклости функции H: $\operatorname{Re}\{1+z_1H''(z_1)/H'(z_1)\}>0$ в B (см. [9, с. 165–166]). Из того же условия выпуклости получаем, что числитель и знаменатель в последнем множителе в правой части (14) имеют положительную вещественную часть в B. Поэтому существует такое $\gamma\in(-\pi/2,\pi/2]$, что функция, стоящая под знаком модуля в последнем множителе в правой части (14) (обозначим ее через $p(z_1)=1+\dots$), удовлетворяет условию $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}p(z_1)\}>0$ в B. Следовательно, функция

$$q(z_1)=\frac{e^{i\gamma}p(z_1)-i\sin\gamma}{\cos\gamma}=1+\dots$$

принадлежит классу Каратеодори, т. е. $\operatorname{Re}q(z_1)>0$ в B. Используя известную в классе Каратеодори оценку $|q(z_1)|\le\frac{2|z_1|}{1-|z_1|}$ (она вытекает из интегрального представления в этом классе), получим

$$|p(z_1)|=|i\sin\gamma+q(z_1)\cos\gamma|=|e^{i\gamma}+(q(z_1)-1)\cos\gamma|\le 1+\cos\gamma\frac{2|z_1|}{1-|z_1|}\le\frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}.$$

В новых обозначениях равенство (14) перепишется в виде

$$|g'(z_1)|^{(n+1)/2}=|H'(z_1)|^n\left|1-z_1\overline{a_1^*}\right|^{n-1}|p(z_1)|.$$

Из неравенства для производных выпуклых функций (см. [9, с. 508–510]) имеем $|H'(z_1)|\le\frac{1}{(1-|z_1|)^2}$. Отсюда вытекает оценка в B

$$|g(z_1)|\le\left(\frac{\left|1-z_1\overline{a_1^*}\right|^{n-1}(1+|z_1|)}{(-|z_1|)^{2n+1}}\right)^{\frac{2}{n+1}}\le\frac{(1+|z_1|)^{\frac{2n}{2n+1}}}{(1-|z_1|)^{\frac{4n+2}{2n+1}}}.$$

Из этой оценки и из п. (а) теоремы А получаем $\operatorname{ord}\mathfrak{M}(1)\le\frac{3n+1}{n+1}$. Поскольку, с другой стороны, $\operatorname{ord}\mathfrak{M}(1)=\alpha\frac{2}{n+1}$ по следствию 1, то $\alpha\le\frac{3n+1}{2}$.

Теперь рассмотрим конкретный пример отображения $G\in\mathscr{F}_n$: $\lambda_1=1$, $h_1(z_1)=\frac{z_1}{1+z_1}$, $U=I$ (единичная матрица), $a=A=(a_1,0')$, $a_1<0$, $0'$ — нуль из $\mathbb{C}^{n-1}$ (следовательно, $u_1=1=r_1$). Простые вычисления показывают, что в этом случае $H'(z_1)=(1-z_1)^{-2}$, $p(z_1)=(1+z_1)/(1-z_1)$ (обозначения прежние). Поэтому при $z_1\in(0,1)$

$$|g(z_1)|=\left(\frac{(1+|z_1||a_1|)^{n-1}(1+|z_1|)}{(1-|z_1|)^{2n+1}}\right)^{\frac{2}{n+1}}\xrightarrow[a_1\to-1]{}\frac{(1+|z_1|)^{\frac{2n}{2n+1}}}{(1-|z_1|)^{\frac{4n+2}{2n+1}}}.$$

Значит, ни при каком $\beta<\frac{3n+1}{2}$ не может выполняться неравенство $|g'(z_1)|\le\frac{(1+|z_1|)^{\frac{2\beta}{n+1}-1}}{(1-|z_1|)^{\frac{2\beta}{n+1}+1}}$ в B для всех $g\in\mathfrak{M}(1)$. По п. (а) теоремы А это означает, что $\alpha\ge\frac{3n+1}{2}$. Следовательно, $\alpha=\frac{3n+1}{2}$. Теорема доказана.

В теореме 5 из [4] рассматривается множество отображений $\mathscr{F}=\{f\in\mathscr{L}S^n: J_f(z)\equiv 1\}$ и утверждается, что порядок линейно-инвариантной оболочки $\Lambda[\mathscr{F}]$ минимальный.

Теорема 5 [4]. $\operatorname{ord}\Lambda[\mathscr{F}]=\frac{n+1}{2}$.

Доказательство. Для тождественного отображения $f_0(z)\equiv z$, $z\in B^n$, имеем $\operatorname{ord}f_0=\frac{n+1}{2}$ и $J_{f_0}(z)\equiv 1$. По п. (б) теоремы А отсюда следует, что

$\frac{n+1}{2} = \operatorname{ord} f_0 = \operatorname{ord} f$ для любого $f \in \mathscr{F}$. Значит, $\operatorname{ord}\Lambda[\mathscr{F}] = \frac{n+1}{2}$. Теорема доказана.

Замечание. Аналогично можно доказать более общее утверждение: если для любого фиксированного $a \in B^n$ обозначить $\mathscr{F}_a = \{f \in \mathscr{L}S^n : |J_f(z)| = 1/|1-\langle z,a\rangle|^{n+1}\}$, то $\operatorname{ord}\Lambda[\mathscr{F}_a] = \frac{n+1}{2}$.

Это замечание расширяет представление о множестве отображений, имеющих наименьший порядок $(n+1)/2$. Теорема 5 из [4] получается из нашего замечания при $a = 0$.

Доказательство замечания. Поскольку отображение $f_0(z) \equiv z$ принадлежит множеству $\mathscr{F}$ (обозначения из предыдущей теоремы), то для любого автоморфизма $\Phi = U^n\Phi_a \in \mathscr{A}^n$, $a \in B^n$, Φ_a определяется формулой (4), отображение $f_a = \Lambda_\Phi[f_0]$ имеет порядок $\operatorname{ord} f_a = \operatorname{ord} f_0 = \frac{n+1}{2}$, причем

$$|J_{f_a}(z)| = \left|\frac{J_{\Phi_a}(z)}{J_{\Phi_a}(0)}\right| = \frac{1}{|1-\langle z,a\rangle|^{n+1}}.$$

Отсюда и из п. (б) теоремы А следует, что все отображения из $\mathscr{F}_a$ имеют порядок $(n+1)/2$. Это доказывает наше замечание.

§ 3. Универсальные л.-и.с.

В связи с теоремой 1 естественно возникает вопрос: если в этой теореме $\mathfrak{M}(n+1)$ составить из всех отображений порядка α (т. е. взять $\mathfrak{M}(n+1) = \mathscr{U}_\alpha(n+1)$), то получим ли мы в качестве $[\mathscr{U}_\alpha(n+1)]^*$ все семейство $\mathscr{U}_{\alpha\frac{n+1}{n+2}}(n)$ или только часть этого универсального л.-и.с.? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 7. $[\mathscr{U}_\alpha(n+1)]^* = \mathscr{U}_{\alpha\frac{n+1}{n+2}}(n)$.

Доказательство. Обозначим

$$\mathfrak{M}(n) = [\mathscr{U}_\alpha(n+1)]^* = \left\{f \in \mathscr{L}S^n : |J_f(z)|^{\frac{n+2}{n+1}} = |J_F(z,0)|,\ F \in \mathscr{U}_\alpha(n+1)\right\},$$

$z \in B^n$. По теореме 1 $\mathfrak{M}(n)$ — л.-и.с. порядка $\left(\alpha\frac{n+1}{n+2}\right)$, следовательно, $\mathfrak{M}(n) \subset \mathscr{U}_{\alpha\frac{n+1}{n+2}}(n)$. Предположим, что существует такое $f_* \in \mathscr{U}_{\alpha\frac{n+1}{n+2}}(n)$, что $f_* \notin \mathfrak{M}(n)$. Рассмотрим семейство

$$\mathscr{F}_{n+1} = \{F \in \mathscr{L}S^{n+1} : |J_F(z_1,0)| = |J_f(z_1,0')|^{\frac{n+2}{n+1}},\ f \in \mathscr{U}_{\alpha\frac{n+1}{n+2}}(n)\}, \quad 0' \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

По теореме 6

$$\operatorname{ord}\Lambda[\mathscr{F}_{n+1}] = \frac{n+2}{n+1}\operatorname{ord}\mathscr{U}_{\alpha\frac{n+1}{n+2}}(n) = \alpha.$$

Рассмотрим также подсемейство семейства $\mathscr{F}_{n+1}$:

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{n+1} = \{F \in \mathscr{L}S^{n+1} : |J_F(z,0)| = |J_f(z)|^{\frac{n+2}{n+1}},\ f \in \mathscr{U}_{\alpha\frac{n+1}{n+2}}(n)\}, \quad z \in B^n.$$

Очевидно, $\Lambda[\widetilde{\mathscr{F}}_{n+1}] \subset \Lambda[\mathscr{F}_{n+1}]$. Поэтому $\operatorname{ord}\Lambda[\widetilde{\mathscr{F}}_{n+1}] \le \alpha$, причем существует такое $F_* \in \widetilde{\mathscr{F}}_{n+1} \subset \mathscr{U}_\alpha(n+1)$, что $|J_{F_*}(z,0)| = |J_{f_*}(z)|^{(n+2)/(n+1)}$. Следовательно, по определению $\mathfrak{M}(n)$ отображение f_* принадлежит $\mathfrak{M}(n)$. Противоречие доказывает теорему 7.

Последовательно применяя $n-1$ раз теорему 7, получим (в обозначениях § 2)

Следствие 3. $[\mathscr{U}_\alpha(n)]^*_{2,3,\dots,n} = \mathscr{U}_{\alpha\frac{2}{n+1}}(1)$.

Теперь мы дадим простое доказательство теоремы искажения в $\mathscr{U}_\alpha(n)$, основанное на применении нашего метода понижения размерности.

Доказательство теоремы искажения. Докажем правую часть неравенства (2), левая доказывается аналогично. Предположим противное: пусть существуют $f \in \mathscr{U}_\alpha(n)$ и $z^* \in B^n$, для которых

$$|J_f(z^*)| > \frac{(1+\|z^*\|)^{\alpha-\frac{n+1}{2}}}{(1-\|z^*\|)^{\alpha+\frac{n+1}{2}}}.$$

Подберем такую унитарную матрицу U^n, что $(U^n)^{-1}z^* = (z_1, 0')$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $\|z^*\| = |z_1|$, и рассмотрим автоморфизм $\Phi(z) = U^n z$. Обозначим

$$G(z) = \Lambda_\Phi[f](z) = (U^n)^{-1}(Df(0))^{-1}f(U^n z) = (U^n)^{-1}f(U^n z).$$

Из линейной инвариантности $\mathscr{U}_\alpha(n)$ вытекает, что $G \in \mathscr{U}_\alpha(n)$. Поскольку $DG(z) = (U^n)^{-1}Df(U^n z)U^n$, имеем $J_G(z) \equiv J_f(U^n z)$, следовательно,

$$|J_G(z_1, 0')| = |J_f(z^*)| > \frac{(1+|z_1|)^{\alpha-\frac{n+1}{2}}}{(1-|z_1|)^{\alpha+\frac{n+1}{2}}}.$$

По следствию 3

$$\mathscr{U}_{\alpha\frac{2}{n+1}}(1) = \{p(z_1) \in \mathscr{L}S^1 : |p'(z_1)|^{(n+1/2} = |J_f(z_1, 0')|,\ f \in \mathscr{U}_\alpha(n)\}.$$

Поэтому существует такая функция $g \in \mathscr{U}_{\alpha\frac{2}{n+1}}(1)$, что

$$|g'(z_1)|^{(n+1)/2} = |J_G(z_1, 0')| > \frac{(1+|z_1|)^{\alpha-\frac{n+1}{2}}}{(1-|z_1|)^{\alpha+\frac{n+1}{2}}},$$

т. е.

$$|g'(z_1)| > \frac{(1+|z_1|)^{\frac{2\alpha}{n+1}-1}}{(1-|z_1|)^{\frac{2\alpha}{n+1}+1}}.$$

Это противоречит известной (см. [1]) теореме искажения для функций из $\mathscr{U}_\beta(1)$. Противоречие доказывает теорему искажения.

В следующей теореме дадим обобщение одного известного свойства (см. [1]) универсальных л.-и.с. функций из $\mathscr{L}S^1$ на многомерный случай.

Теорема 8. *Если $f_0, f_1 \in \mathscr{U}_\alpha(m)$ и $\lambda \in [0,1]$, то любое отображение $f_\lambda \in \mathscr{L}S^m$, определяемое формулой $|J_{f_\lambda}(z)| = |J_{f_1}(z)|^\lambda |J_{f_0}(z)|^{1-\lambda}$, также принадлежит $\mathscr{U}_\alpha(m)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\operatorname{ord} f_\lambda \le \alpha$. Для любых $\varphi \in \mathscr{A}^m$ и $\lambda \in [0,1]$ обозначим $g_\lambda = \Lambda_\varphi[f_\lambda](z)$, $z \in B^m$. Из неравенства (2) следует, что

$$|J_{g_0}(z)| \le \frac{(1+\|z\|)^{\alpha-\frac{m+1}{2}}}{(1-\|z\|)^{\alpha+\frac{m+1}{2}}}, \quad |J_{g_1}(z)| \le \frac{(1+\|z\|)^{\alpha-\frac{m+1}{2}}}{(1-\|z\|)^{\alpha+\frac{m+1}{2}}}.$$

Значит,

$$|J_{g_\lambda}(z)| = \left|\frac{J_{f_\lambda}(\varphi(z))J_\varphi(z)}{J_{f_\lambda}(\varphi(0))J_\varphi(0)}\right| = \left|\frac{J_{f_1}(\varphi(z))J_\varphi(z)}{J_{f_1}(\varphi(0))J_\varphi(0)}\right|^\lambda \left|\frac{J_{f_0}(\varphi(z))J_\varphi(z)}{J_{f_0}(\varphi(0))J_\varphi(0)}\right|^{1-\lambda}$$

$$= |J_{g_1}(z)|^\lambda |J_{g_0}(z)|^{1-\lambda} \le \frac{(1+\|z\|)^{\alpha-\frac{m+1}{2}}}{(1-\|z\|)^{\alpha+\frac{m+1}{2}}}, \quad z \in B^n.$$

Теперь отсюда и из п. (а) теоремы А получаем требуемое неравенство: $\operatorname{ord} f_\lambda \leq \alpha$, таким образом, $f_\lambda \in \mathscr{U}_\alpha(m)$.

Было бы интересно и важно для приложений получить двустороннюю оценку $\|Df(z)\|$, аналогичную неравенству (2). Этому вопросу посвящена следующая

Теорема 9. *Для любого отображения $f \in \mathscr{U}_\alpha(n)$ и любого $z \in B^n$ справедливо точное неравенство*

$$\frac{(1-\|z\|)^{\frac{\alpha}{n}-\frac{n+1}{2n}}}{(1+\|z\|)^{\frac{\alpha}{n}+\frac{n+1}{2n}}} \leq \|Df(z)\|; \tag{15}$$

для любого $z \in B^n$, $z \neq 0$, величина $\|Df(z)\|$ не ограничена в $\mathscr{U}_\alpha(n)$.

Доказательство. 1. Поскольку для любой неособенной матрицы A (см. [10]) $|\det A| \leq \|A\|^{n-1} \min\limits_{\|\lambda\|=1} \|A\lambda\|$, то $|\det A| \leq \|A\|^n$. Отсюда и из неравенства (2) получаем, что для любого $f \in \mathscr{U}_\alpha(n)$

$$\frac{(1-\|z\|)^{\alpha-\frac{n+1}{2}}}{(1+\|z\|)^{\alpha+\frac{n+1}{2}}} \leq |J_f(z)| \leq \|Df(z)\|^n \quad \forall z \in B^n.$$

Покажем, что неравенство (15) точное. Рассмотрим отображение

$$F(z) = \left(\int\limits_0^{z_1} \psi(s)\,ds, z_2\psi(z_1), \dots, z_n\psi(z_1)\right) \in \mathscr{L}S^n, \quad \psi(z_1) = \frac{(1+z_1)^{\frac{\alpha}{n}-\frac{n+1}{2n}}}{(1-z_1)^{\frac{\alpha}{n}+\frac{n+1}{2n}}},$$

$J_F(z) = J_{K_\alpha}(z) = \psi^n(z_1)$. Тогда по п. (б) теоремы А $\operatorname{ord} F = \operatorname{ord} K_\alpha$, следовательно, $F \in \mathscr{U}_\alpha(n)$. Заметим, что $DF(z_1, 0, \dots, 0) = \psi(z_1)I$, поэтому для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \partial B^n$

$$\|DF(z_1, 0, \dots, 0)\lambda\|^2 = |\psi(z_1)|^2 \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 = |\psi(z_1)|^2.$$

Значит,

$$\|DF(z_1, 0, \dots, 0)\| = |\psi(z_1)| = \left|\frac{(1+z_1)^{\frac{\alpha}{n}-\frac{n+1}{2n}}}{(1-z_1)^{\frac{\alpha}{n}+\frac{n+1}{2n}}}\right|$$

и равенство в (15) достигается для рассмотренного отображения F при $z = (-r, 0, \dots, 0)$, $r = \|z\|$.

2. Пусть $n \geq 2$. При $L > 0$ рассмотрим отображение

$$F_L(z) = \left(\int\limits_0^{z_1} J_{K_\alpha}(s)\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^L ds, z_2\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right)^{-L}, z_3, z_4, \dots, z_n\right);$$

$$DF_L(z) = \begin{pmatrix} J_{K_\alpha}(z_1)\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right)^L & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2Lz_2\frac{(1-z_1)^{L-1}}{(1+z_1)^{L+1}} & \left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right)^{-L} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $F_L(z) \in \mathscr{L}S^n$ и $J_{F_L}(z) = J_{K_\alpha}(z)$. Снова по п. (б) теоремы A получаем, что для любого положительного L будет $\operatorname{ord} F_L = \operatorname{ord} K_\alpha = \alpha$, т. е. $F_L \in \mathscr{U}_\alpha(n)$. При $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \partial B^n$

$$\|DF_L(z_1, 0, \dots, 0)\lambda\|^2 = \left|\lambda_1 J_{K_\alpha}(z_1)\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right)^L\right|^2 + \left|\lambda_2\left(\frac{1-z_1}{1+z_1}\right)^L\right|^2 + |\lambda_3|^2 + \dots + |\lambda_n|^2.$$

Поэтому

$$\|DF_l(z_1, 0, \dots, 0)\| \geq |J_{K_\alpha}(z_1)|\left|\frac{1+z_1}{1-z_1}\right|^L$$

и $\lim\limits_{L\to\infty} \|DF_L(|z_1|, 0, \dots, 0)\| = \infty$ при $z_1 = |z_1| > 0$. Таким образом, $\|DF_L(z)\|$ не ограничены при любом фиксированном $z = (r, 0, \dots, 0)$, $r \in (0,1)$. Из инвариантности $\mathscr{U}_\alpha(n)$ относительно преобразования вращения с унитарной матрицей U^n: $f \longrightarrow (U^n)^{-1} f(U^n z)$ следует неограниченность $\|Df(z)\|$ в $\mathscr{U}_\alpha(n)$ при любом фиксированном $z \in B^n$.

Теорема доказана.

В случае $n = 1$ семейство $\mathscr{U}_\alpha(1)$ непусто только при $\alpha \geq 1$, причем $\mathscr{U}_1(1) = \mathscr{K}$ — класс выпуклых функций (см. [1]). Известно [11], что $\operatorname{ord} \mathscr{K}_n > \frac{n+1}{2}$ при $n \geq 2$ ($\mathscr{K}_n$ — класс выпуклых отображений). В связи с этим интересно

Следствие 4. *Существуют невыпуклые отображения из* $\mathscr{U}_{\frac{n+1}{2}}(n)$.

Действительно, если $\mathscr{K}_n \supset \mathscr{U}_{\frac{n+1}{2}}(n)$, то для всех $f \in \mathscr{U}_{\frac{n+1}{2}}(n)$ выполняется известное в $\mathscr{K}_n$ неравенство (см. [12, теорема 3.3.12])

$$\|Df(z)\| \leq \frac{1}{(1 - \|z\|)^2},$$

а это противоречит теореме 9.

В качестве иллюстрации работы метода понижения размерности докажем еще одно утверждение — о множестве Кебе в $\mathscr{U}_\alpha(n)$, т. е. о множестве

$$\mathbf{B} = \bigcap \{F(B^n) : F \in \mathscr{U}_\alpha(n)\}.$$

Из инвариантности множества $\mathscr{U}_\alpha(n)$ относительно преобразования вращения $(U^n)^{-1}F(U^n z)$ (U^n —унитарная матрица) следует, что $\mathbf{B}$ — шар с центром в нуле.

Теорема 10. $\mathbf{B}$ — *шар радиуса* $r(n, \alpha) = \frac{n+1}{4\alpha}$.

Доказательство. По сформулированному выше следствию 5.2 из [2] отображения $F(z) = (f(z_1), z_2\sqrt{f'(z_1)}, \dots, z_n\sqrt{f'(z_1)})$ принадлежат $\mathscr{U}_\alpha(n)$, если $f \in \mathscr{U}_{\alpha\frac{2}{n+1}}(1)$. Поскольку проекция шара $\mathbf{B}$ на плоскость $(w_1, 0, \dots, 0)$, $w_1 \in \mathbb{C}$, — круг радиуса $r(n, \alpha)$, то этот круг содержится в каждой из областей $f(B)$, $f \in \mathscr{U}_{\alpha\frac{2}{n+1}}(1)$. Но для функций $f \in \mathscr{U}_\beta(1)$ известно (см. [1]) множество Кебе $\bigcap\{f(B) : f \in \mathscr{U}_\beta(1)\}$, — это круг радиуса $\frac{1}{2\beta}$. Следовательно,

$$r(n, \alpha) \geq \frac{1}{2\alpha\frac{2}{n+1}} = \frac{n+1}{4\alpha}.$$

С другой стороны, пример приведенного выше отображения $K_\alpha \in \mathscr{U}_\alpha(n)$ показывает, что

$$\lim_{r\to 1-} \|K_\alpha(-r, 0, 0, \dots, 0)\| = \frac{n+1}{4\alpha},$$

т. е. $r(n, \alpha) \leq \frac{n+1}{4\alpha}$. Это доказывает теорему 10.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pommerenke Ch.* Linear-invariante Familien analytischer Funktionen. I // Math. Ann. 1964. V. 155. P. 108–154.

2. *Pfaltzgraff J. A.* Distortion of locally biholomorphic maps of the n-ball // Complex Variables. 1997. V. 33. P. 239–253.

3. *Barnard R. V., FitzGerald C. H., Gong S.* A distortion theorem for biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^2$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 344. P. 907–924.

4. *Pfaltzgraff J. A., Suffridge T. J.* An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps // Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A. 1999. V. 53. P. 193–203.

5. *Годуля Я., Личберски П., Старков В. В.* Линейно-инвариантные отображения шара в $\mathbb{C}^n$ // Тр. Петрозаводского ун-та (Математика). 1999. Вып. 6. С. 3–14.

6. *Godula J., Liczberski P., Starkov V. V.* Order of linearly invariant family of mappings in $\mathbb{C}^n$ // Complex Variables. 2000. V. 42. P. 89–96.

7. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. M.: Мир, 1984.

8. *Robertson M. S.* On the theory of univalent functions // Ann. Math. 1936. V. 37. P. 371–408.

9. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

10. *Xiangyang Liu.* Bloch functions of several complex variables // Pacific J. Math. 1992. V. 152, N 2. P. 347–363.

11. *Pfaltzgraff J. A., Suffridge T. J.* Linear invariance, order and convex maps in $\mathbb{C}^n$ // Complex Variables. 1999. V. 40. P. 35–50.

12. *Liczberski P.* Geometric properties of some classes of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$ // Sci. Bull. of Lodz Technical Univ. 1999. V. 826. P. 1–22.

Статья поступила 14 марта 2000 г.

Liczberski Piotr
Institute of Mathematics, Technical University of Łódź, 90-924 Łódź, Poland;
piliczb@ck-sg.p.lodz.pl

Старков Виктор Васильевич
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
Ленина, 33, Петрозаводск 185640
starkov@mainpgu.karelia.ru