Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.9+532.59

ЗАДАЧА О ВОЗМУЩЕНИИ СПЕКТРА И ПРИЛОЖЕНИЕ ЕЕ К ВОЛНАМ НАД ПОДВОДНЫМ ХРЕБТОМ

Д. С. Кузнецов

Аннотация: В пространствах функций типа Харди рассмотрена задача о возмущении спектра одномерного псевдодифференциального оператора малым по норме вполне непрерывным оператором. При некоторых общих требованиях к операторам доказана теорема существования однократной собственной функции; доказана фредгольмовость поставленной задачи в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. В качестве иллюстрации изложенной теории приведена линейная задача о бегущих вдоль подводного хребта поверхностных гравитационно-капиллярных волнах. В предположении, что жидкость идеальная, несжимаемая и безвихревая, показано, что вдоль подводного гребня распространяются волны, амплитуда которых экспоненциально затухает с малым положительным показателем в поперечном к хребту направлении. При этом в линейном приближении капиллярные эффекты существенной роли не играют. Библиогр. 10.

Введение

В специальных банаховых пространствах рассматривается задача о возмущении спектра самосопряженного оператора T:

$$(\lambda + T)u = qPLu. \tag{1}$$

Здесь λ — собственное число, $q \in \mathbb{R}$ — малый параметр, T и P — одномерные псевдодифференциальные операторы, L — линейный ограниченный самосопряженный оператор. Функция $u(x)$ задана на всей числовой прямой.

Из условий (п. 3), налагаемых на оператор T, следует, что при $q = 0$ точечный спектр T отсутствует. Цель работы — доказать существование собственных функций оператора $T - qPL$ при отличных от нуля q.

Ранее [1] была подробно изучена задача о возмущении спектра оператора $-\Delta$ вещественнозначной функцией $h(x)$. В одномерном случае ($\Delta = d^2/dx^2$) оператор $-\Delta - qh$, где $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, имеет отрицательное собственное значение $\lambda = O(q^2)$ при всех положительных q тогда и только тогда, когда $\int h(x)\,dx > 0$; собственное число аналитически зависит от q в окрестности $q = 0$ [1, гл. XIII].

Уравнение типа (1) также исследовалось в весовых пространствах $C(k)$ [2], где k — показатель степенного убывания функции. Было доказано существование простого собственного числа и собственной функции, единственной с точностью до мультипликативной постоянной. В качестве примера авторами [2]

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета ведущих научных школ (проект № 00–15–96163) и Интеграционного проекта СО РАН (№ 1–2000).

рассмотрена линеаризованная задача о волноводе поверхностных гравитационных волн. При этом наличие капиллярности значения не имело. Сама возможность существования волновода была показана в работе [3]. Для жидкости без капиллярности задача о волноводе (в рамках линейной теории) изучалась в [4–6].

Для иллюстрации изложенной в статье теории приведена линейная задача о поверхностных гравитационно-капиллярных волнах малой амплитуды, бегущих вдоль подводного хребта. Жидкость считается идеальной несжимаемой и безвихревой. Параметр $q > 0$ характеризует отклонение формы дна от горизонтальной плоскости; операторы T и L суть нулевой и первый члены разложения оператора «нормальная производная» по q. Показано, что амплитуда волны экспоненциально затухает в поперечном к хребту направлении с малым, порядка q, показателем. Доказывается фредгольмовость этой задачи в $L_2(\mathbb{R})$. Полученные результаты создают основу для исследования задачи о волноводе поверхностных волн в точной нелинейной постановке.

1. Функциональные пространства

Преобразование Фурье

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x)\, dx, \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

финитных бесконечно дифференцируемых функций — целая аналитическая функция комплексного переменного ξ, убывающая быстрее любой степени $|\xi|^{-1}$ в каждой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im}\xi| \le \rho < \infty$ (теорема Пэли — Винера [7]). Поэтому для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ величина

$$\|\varphi\|^2_{E^s(\rho)} = \sup_{|\operatorname{Im}\xi| \le \rho} \int |\lambda^s(\xi)\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\operatorname{Re}\xi$$

с функцией $\lambda(\xi) = (1+\xi^2)^{1/2}$ определена и конечна для $s \in \mathbb{R}$, $0 \le \rho < \infty$. Здесь и далее подразумевается, что интегралы без обозначения пределов интегрирования берутся по всей действительной оси. Замыкание множества основных функций по введенной норме является банаховым пространством $E^s(\rho)$ [8].

Через $\|\cdot\|_p$ будем обозначать норму в пространстве $L_p(\mathbb{R})$; скобки $(\cdot,\cdot)$ будут означать скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$. Для замкнутых шаров из пространства $L_2(\mathbb{R})$ радиуса $\mathscr{R}$ с центром в нуле будем использовать запись $B(\mathscr{R})$. Символом C с индексом или без будем обозначать все несущественные постоянные.

2. Псевдодифференциальные операторы

Оператор свертки $K(D_x)$ с символом $k(\xi)$ определяется через преобразование Фурье функции $u(x)$ по формуле $\widehat{Ku}(\xi) = k(\xi)\hat{u}(\xi)$. Далее будем рассматривать операторы с аналитическими символами в горизонтальной полосе Π_ρ комплексной плоскости конечной ширины, содержащей действительную ось: $\Pi_\rho = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}\xi| \le \rho\}$.

Пусть величина $\left|K\right|_{E^p(\rho)} = \sup\limits_{|\operatorname{Im}\xi| \le \rho} \left|\lambda^{-p}(\xi)k(\xi)\right|$ конечна для некоторого $p \in \mathbb{R}$. Тогда оператор K действует из пространства $E^{s+p}(\rho)$ в $E^s(\rho)$ [8]. Нижняя грань всех таких p называется *истинным порядком* K и обозначается через $\deg(K)$.

Если символ псевдодифференциального оператора удовлетворяет двойному неравенству $C^{-1}|\lambda^p(\xi)| \leq |k(\xi)| \leq C|\lambda^p(\xi)|$, $\xi \in \Pi_\rho$, то K^{-1} существует, ограничен и имеет порядок $-p$.

3. Постановка задачи

Предположим, что процесс распространения волн описывается уравнением

$$(\lambda + T)u = P\{qLu + q^2 Mu\}, \tag{3.1}$$

где T и P — одномерные псевдодифференциальные операторы конечных порядков с символами $t(\xi)$ и $p(\xi)$ соответственно, $\lambda \in \mathbb{R}$ — собственное число, $q > 0$ — малый параметр, L и M — линейные интегральные операторы.

От функций t и p потребуем выполнения нижеперечисленных свойств.

1. Функции $t(\xi)$, $p(\xi)$ регулярные аналитические в полосе комплексной плоскости Π_{ρ_0} с некоторым $0 < \rho_0 < \infty$.

2. Функции $t(\xi)$, $p(\xi)$ принимают действительные значения на множестве

$$\{\operatorname{Im}\xi = 0\} \cup \{\operatorname{Re}\xi = 0\}, \quad \xi \in \Pi_{\rho_0}.$$

3. Для всякого $\rho \in (0, \rho_0)$ уравнение $t(\xi) = t(i\rho)$ имеет только решения $\xi = \pm i\rho$. Корни этого уравнения простые.

Требуется показать, что при определенных требованиях к операторам L и M уравнение (3.1) имеет нетривиальное решение в пространстве $E^s(\rho)$ с некоторым $\rho > 0$ и любым $s \geq 0$.

4. Основная теорема

Пусть операторы L и M (M может быть равен нулю) представимы в виде

$$\widehat{Lu}(\xi) = l_1(\xi) \int l_1(\eta) l_2(\xi, \eta) \hat{u}(\eta)\, d\eta, \quad \widehat{Mu}(\xi) = m_1(\xi) \int m_2(\xi, \eta) \widehat{Nu}(\eta)\, d\eta, \tag{4.1}$$

где N — линейный оператор, свойства которого будут описаны ниже. На функции l_i, m_i накладываются следующие условия:

(a) l_i, m_i — регулярные аналитические функции комплексных переменных $\xi, \eta \in \Pi_{\rho_0}$;

(b) функции $l_1(\xi)$ и $m_1(\xi)$ убывают быстрее любой степени $|\xi|^{-1}$ в полосе Π_{ρ_0} при $|\operatorname{Re}\xi| \to \infty$;

(c) для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ имеют место равенства $\overline{l_1(\xi)} = l_1(\xi)$, $\overline{l_2(\xi, \eta)} = l_2(\eta, \xi)$;

(d) найдется число $l \in \mathbb{R}$ такое, что равномерно по $\eta \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|l_2(\xi, \eta) - l_2(0, \eta)| \leq C|\xi||\lambda^l(\xi)|; \tag{4.2}$$

(e) для некоторого $k \in \mathbb{R}$ и всех $\xi \in \Pi_{\rho_0}$, $\eta \in \mathbb{R}$ верны неравенства

$$|\widehat{Nu}(\eta)| \leq C|\lambda^k(\eta)| \mathscr{N}(u), \tag{4.3}$$

где

$$\mathscr{N}(u) = \min\{\|\hat{u}\|_1, \|u\|_2\}; \tag{4.4}$$

$$\int |\lambda^k(\eta) m_2(\xi, \eta)|\, d\eta \leq C|\lambda^m(\xi)|. \tag{4.5}$$

Свойства (a)–(d) гарантируют, что результат действия оператора L на константу является экпоненциально убывающей функцией. Определим функцию $\zeta(x)$ равенством

$$\sqrt{2\pi}\zeta(x) = L\langle 1\rangle(x).$$

В дальнейшем такая запись будет использоваться (при необходимости) для обозначения действия линейного оператора на функцию, стоящую в угловых скобках.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* (a)–(e) *и*

$$\frac{p(0)\hat{\zeta}(0)}{t''(0)} > 0. \tag{4.6}$$

Тогда существует $q_* > 0$ такое, что для всех $q \in (0, q_*)$ уравнение (3.1) *имеет нетривиальное, определяемое с точностью до мультипликативной постоянной решение $u \in E^s(\rho)$, $s \geq 0$, $\rho = O(q)$. Собственное число $\lambda \in \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемо по параметру q.*

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Главная часть оператора $(\lambda + T)^{-1}PL$. Пусть a — параметр, изменяющийся на отрезке $[0, a_*]$, где $a_* > 0$ достаточно мало. Нули символа оператора $\lambda + T$ должны быть расположены не на действительной оси, иначе обратный оператор $(\lambda + T)^{-1}$ станет неограниченным и потребуются дополнительные условия разрешимости. Поэтому собственное число λ задачи (3.1) определяется значением функции $t(\xi)$ в точке ia. Обозначим

$$t_1(\xi, a) = \frac{t(\xi) + \lambda(a)}{\xi^2 + a^2}, \tag{4.7}$$

где $\lambda(a) = -t(ia)$. Из свойств функции $t(\xi)$ следует, что $t_1(\xi, a)$ аналитична по совокупности аргументов в области $\Pi_{\rho_0} \times (0, \rho_0)$.

Покажем, что $|t_1(\xi, a)| \geq C > 0$ равномерно по $\xi \in \Pi_{\rho_0}$, $a \in [0, a_*]$. Действительно, согласно (4.7) функция $t_1(\xi, a)$ может обращаться в нуль только в точках $\xi = \pm ia$. Ясно, что

$$t_1(a, a) = \frac{t'(ia)}{2ia}.$$

По свойству 3 у функции $t(\xi) - t(0)$ в точке $\xi = 0$ нуль второго порядка. Из тейлоровского разложения следует, что $t'(ia) = iat''(0) + O(a^2)$. Выберем a_* так, что $O(a_*^2) \leq |t''(0)|/4$. Тогда $|t_1(a, a)| \geq |t''(0)|/4 \geq C > 0$ в силу условий теоремы 1. Из вышесказанного следует требуемая равномерная оценка $|t_1(\xi, a)|^{-1} \leq C < \infty$.

Оператор $(\lambda + T)^{-1}$ задается символом

$$[t(\xi) + \lambda(a)]^{-1} = \frac{1}{(\xi^2 + a^2)t_1(\xi, a)}.$$

Эта функция не принимает нулевых значений в Π_ρ, если $0 \leq \rho \leq a/2$, откуда $\|(\lambda + T)^{-1}\|_{E^{-2}(\rho)} \leq C_a$. Иными словами, оператор $(\lambda + T)^{-1}$ сглаживающий на 2 порядка. Можно показать, что у последнего будет порядок $-\deg(T)$, но при рассмотрении линейной задачи это непринципиально.

Нули символа оператора $(\lambda + T)^{-1}$ располагаются в точках $\pm ia$. В силу равномерной по a ограниченности снизу модуля функции $t_1(\xi, a)$, максимум в полосе Π_ρ модуля аналитической функции $(t(\xi) + \lambda(a))^{-1}$, где $0 \leq \rho \leq a/2$ и a

достаточно мало, принимается в точках $\xi = \pm i\rho$ и является величиной порядка $1/a^2$.

Точка a, где обращается в нуль символ оператора $(\lambda + T)^{-1}$, должна находиться на достаточно близком расстоянии от действительной оси и быть согласованной с малым параметром q, иначе при уменьшении последнего оператор $q(\lambda + T)^{-1}PL$ становится сжимающим, и по теореме Неймана решением уравнения (3.1) будет только нуль. Поэтому полагается, что $a = q\mu$, где $\mu = \mu(q)$ — новая искомая величина, аналог собственного числа.

Для $\psi \in E^s(\rho)$ определим операторы T_0, T_1 по формулам

$$\begin{gathered} T_0(q,\mu)\psi = \frac{q(\lambda+T)^{-1}P\zeta}{\hat{\zeta}(0)}(\psi,\zeta), \\ T_1(q,\mu)\psi = \{q(\lambda+T)^{-1}PL - T_0(q,\mu)\}\psi + q^2(\lambda+T)^{-1}PM\psi. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Свойства оператора T_1 содержит

Лемма 1. *Пусть функция $u(x)$ зависит от q как от параметра, причем величина $\mathscr{N}(u)$ равномерно по q ограничена и $\mu_- \le \mu \le \mu_+$, $\mu_\pm > 0$. Тогда при $\rho \in [0, q\mu_-/2]$ верна оценка*

$$\|T_1(q,\mu)u\|_{E^s(\rho)} \le C\sqrt{q}\mathscr{N}(u).$$

Постоянная C зависит от показателя s, собственного числа μ и функций p, ζ.

Доказательство. При оценке E^s-норм различных функций часто будет использоваться вспомогательное

Предложение 1. *Пусть функция $r(x)$ такова, что для почти всех $\xi \in \Pi_\rho$ с некоторыми $\beta, \gamma \ge 0$ выполняется неравенство*

$$|\lambda^s(\xi)\hat{r}(\xi)| \le C_s \frac{\rho^\alpha |\xi|^\beta}{|\xi^2 + 4\rho^2|^\gamma}.$$

Тогда при условии $\beta < 2\gamma - 1/2$ справедлива оценка

$$\|r(x)\|_{E^s(\rho)} \le C_s \rho^{\alpha+\beta-2\gamma+1/2}.$$

Доказательство. При $\xi \in \Pi_\rho$ верны неравенства

$$|\xi|^2 \le (\operatorname{Re}\xi)^2 + \rho^2, \quad |\xi^2 + 4\rho^2|^2 \ge (\operatorname{Re}\xi)^4 + 8(\operatorname{Re}\xi)^2\rho^2 + \rho^4.$$

Поскольку показатели β и γ неотрицательны, для почти всех $\xi \in \Pi_\rho$ справедлива оценка

$$|\lambda^s(\xi)\hat{r}(\xi)|^2 \le C_s \frac{\rho^{2\alpha}(\kappa^2+\rho^2)^\beta}{(\kappa^4 + 8\kappa^2\rho^2 + \rho^4)^\gamma},$$

где $\kappa = \operatorname{Re}\xi$. По определению нормы в $E^s(\rho)$ имеем

$$\|r(x)\|^2_{E^s(\rho)} = \sup_{|\operatorname{Im}\xi| \le \rho} \int |\lambda^s(\xi)\hat{r}(\xi)|^2 \, d\operatorname{Re}\xi \le C_s \int \frac{\rho^{2\alpha}(\kappa^2+\rho^2)^\beta}{(\kappa^4 + 8\kappa^2\rho^2 + \rho^4)^\gamma} \, d\kappa.$$

После замены переменных $\kappa = \rho\kappa_1$ получим

$$\|r(x)\|^2_{E^s(\rho)} \le C_s \rho^{2(\alpha+\beta-2\gamma+1/2)} \int \frac{(\kappa_1^2+1)^\beta}{(\kappa_1^4 + 8\kappa_1^2 + 1)^\gamma} \, d\kappa_1.$$

Требуемая оценка следует из сходимости последнего интеграла при указанных в формулировке β, γ. Предложение доказано.

Переходим к доказательству леммы. Введем обозначение

$$\mathscr{A} = q(\lambda+T)^{-1}PL - T_0(q,\mu).$$

Согласно формулам (4.1) имеем (напомним, что преобразованием Фурье единицы является δ-функция, умноженная на $\sqrt{2\pi}$)

$$\widehat{\mathscr{A}u}(\xi) = \frac{qp(\xi)l_1(\xi)}{(\xi^2+q^2\mu^2)t_1(\xi,q\mu)} \times \left\{ \int l_1(\eta)l_2(\xi,\eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta - \frac{l_2(\xi,0)}{l_2(0,0)}\int l_1(\eta)l_2(0,\eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta \right\}.$$

Выражение в фигурных скобках можно представить в виде

$$\int [l_2(\xi,\eta)-l_2(0,\eta)]l_1(\eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta + \frac{l_2(0,0)-l_2(\xi,0)}{l_2(0,0)}\int l_2(0,\eta)l_1(\eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta.$$

Неравенство (4.6) гарантирует, что $l_2(0,0)\neq 0$.

Пусть $\mathscr{N}(u)=\|u\|_2$. Тогда в силу (b)

$$\int |l_1(\eta)\hat{u}(\eta)|\,d\eta \le \|l_1\|_2\mathscr{N}(u) \le C\mathscr{N}(u).$$

Если же $\mathscr{N}(u)=\|\hat{u}\|_1$, то $\int |l_1(\eta)\hat{u}(\eta)|\,d\eta \le C\mathscr{N}(u)$, что вместе с (4.2) дает оценку

$$|\lambda^s(\xi)\widehat{\mathscr{A}u}(\xi)| \le C\mathscr{N}(u)\frac{q|\xi|}{|\xi^2+q^2\mu^2|}\left|\frac{\lambda^{s+l+\deg(P)}(\xi)l_1(\xi)}{t_1(\xi,q\mu)}\right| \le C\mathscr{N}(u)\frac{q|\xi|}{|\xi^2+q^2\mu_-^2|}.$$

Далее, из представления (4.1) и оценок (4.3), (4.5) следует, что

$$|\lambda^s(\xi)\widehat{PMu}(\xi)| \le C\mathscr{N}(u)|\lambda^{s+m+\deg(P)}(\xi)m_1(\xi)| \le C\mathscr{N}(u), \quad \xi\in\Pi_\rho. \tag{4.9}$$

Таким образом, для всех $\xi\in\Pi_\rho$ получено неравенство

$$|\lambda^s(\xi)\widehat{T_1u}(\xi)| \le C\mathscr{N}(u)\frac{q|\xi|+q^2}{|\xi^2+q^2\mu_-^2|}.$$

Заключение леммы вытекает из предложения 1.

2. Приближенное решение. Подействуем оператором $(\lambda+T)^{-1}$ на обе части уравнения (3.1):

$$u = T_0(q,\mu)u + T_1(q,\mu)u. \tag{4.10}$$

Ввиду малости параметра q и оценки нормы оператора T_1 приближенное решение (4.10) определяется уравнением

$$v = T_0(q,\nu)v. \tag{4.11}$$

Функция $v=Cq(\lambda+T)^{-1}P\zeta$ обращает (4.11) в тождество при любом $C\in\mathbb{R}$, и других решений у последнего уравнения нет. Приближенное «собственное число» ν находится из скалярного уравнения

$$\hat{\zeta}(0) = q((\lambda+T)^{-1}P\zeta,\zeta), \tag{4.12}$$

которое в развернутом виде выглядит так:

$$\hat{\zeta}(0) = \int \frac{qp(\xi)|\hat{\zeta}(\xi)|^2}{(\xi^2+q^2\nu^2)t_1(\xi, q\nu)}\,d\xi. \tag{4.13}$$

Устремляя q к нулю в этом равенстве, находим «предельное» значение параметра ν:

$$\nu_* = 2\pi\frac{p(0)\hat{\zeta}(0)}{t_1(0,0)} = 4\pi\frac{p(0)\hat{\zeta}(0)}{t''(0)}. \tag{4.14}$$

По условию теоремы $\nu_* > 0$.

Дифференцируя почленно (4.13), в пределе при $q \to 0$, $\nu \to \nu_*$ получаем

$$\lim_{\substack{q\to 0\\ \nu\to\nu_*}} \frac{\partial}{\partial\nu}\int \frac{q|\hat{\zeta}(\xi)|^2}{(\xi^2+q^2\nu^2)t_1(\xi, q\nu)}\,d\xi = \frac{-t''(0)}{32\pi^2p^2(0)\hat{\zeta}(0)} \neq 0.$$

Из теоремы о неявной функции для отображения

$$f(q,\nu) = q((\lambda+T)^{-1}P\zeta, \zeta) - \hat{\zeta}(0)$$

следует существование некоторого интервала $0 < q < q_1$, где определена непрерывно дифференцируемая функция $\nu(q)$, обращающая (4.13) в тождество для всех $q \in (0, q_1)$. При этом выполнено предельное соотношение $\lim\limits_{q\to 0}\nu(q) = \nu_*$.

3. Точное решение. Применим к уравнению (4.10) метод возмущения: функцию $u(x)$ и «собственное число» μ будем искать в виде $u = v + w$, $\mu = \nu + \tau$. Запишем уравнение на w в виде

$$w - T_0(q,\nu)w = Aw + \Psi, \tag{4.15}$$

где линейный оператор A и функция Ψ определены равенствами

$$Aw = [T_0(q,\mu) - T_0(q,\nu)]w + T_1(q,\mu)w, \quad \Psi = Av. \tag{4.16}$$

Оператор T_0 действует в конечномерное подпространство пространства $L_2(\mathbb{R})$, откуда следует фредгольмовость отображения $I - T_0(q,\nu)$. Согласно общей теории для разрешимости (4.15) правая часть $Aw + \Psi$ должна быть ортогональна решениям однородной двойственной задачи. В силу предположений относительно функций l_i оператор L самосопряжен. Решениями двойственной задачи являются функции вида $C\zeta$, C — произвольная постоянная, поэтому уравнение (4.15) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$(Aw + \Psi, \zeta) = 0. \tag{4.17}$$

Для единственности решения потребуем выполнения условия $(w,\zeta) = 0$, откуда будет следовать, в частности, $T_0w = 0$, и задача (4.15)–(4.17) примет вид

$$w = T_1(q,\mu)w + \Psi, \tag{4.18}$$

$$(T_1(q,\mu)w, \zeta) + (\Psi, \zeta) = 0. \tag{4.19}$$

Схема решения уравнений (4.18), (4.19) такова: сначала устанавливается существование функции $\tau(q,w)$, обращающей (4.19) в тождество при всех достаточно малых q и $w \in B(\mathscr{R})$, где $\mathscr{R} < \infty$ не зависит от q; затем извлекается главная часть решения уравнения (4.18), а «остаток» находится методом сжимающих отображений.

3.1. Уравнение на «собственное число». В силу гладкости функции $\nu(q)$, можно при необходимости уменьшить q_1 так, чтобы $\nu \in (3\nu_*/4, 5\nu_*/4)$. «Поправку» τ к собственному числу будем искать из интервала $(-\nu_*/4, \nu_*/4)$.

Для оценки функции Ψ потребуется

Лемма 2. *Действие оператора $R_0(q,\tau) = T_0(q,\mu) - T_0(q,\nu)$ на функцию v — решение уравнения (4.11) — представимо в виде*

$$R_0(q,\tau)v = \tau V_q^{(1)}(x) + \tau V_{q,\tau}^{(2)}(x). \tag{4.20}$$

Для функций $V_q^{(1)}$, $V_{q,\tau}^{(2)}$ при $q \in (0,q_1)$ и $\rho \le q\nu_*/4$ справедливы оценки
1) $\|V_q^{(1)}\|_{E^s(\rho)} \le \frac{C}{\sqrt{q}}$, $\|V_{q,\tau}^{(2)}\|_{E^s(\rho)} \le \frac{C|\tau|}{\sqrt{q}}$;
2) $\|V_{q,\tau_1}^{(2)} - V_{q,\tau_2}^{(2)}\|_{E^s(\rho)} \le \frac{C|\tau_1-\tau_2|}{\sqrt{q}}$.

Доказательство. При $q \in (0,q_1)$ уравнение (4.12) обращается в тождество. Имеем $\widehat{R_0 v}(\xi) = Cqr(q,\nu,\mu,\xi)p(\xi)\hat{\zeta}(\xi)$ с функцией

$$r(q,\nu,\mu,\xi) = \frac{1}{t(\xi)-t(ia)} - \frac{1}{t(\xi)-t(ib)},$$

где $a = q\mu$, $b = q\nu$. По формуле Тейлора (здесь $\alpha \in (q\nu_*/2, 3q\nu_*/2)$ — некоторая промежуточная точка)

$$\begin{aligned} r(q,\nu,\mu,\xi) = {}& \frac{it'(ib)(a-b)}{(\xi^2+b^2)^2 t_1^2(\xi,b)} \\ & - \frac{(a-b)^2}{2}\left[\frac{t''(i\alpha)}{(\xi^2+\alpha^2)^2 t_1(\xi,\alpha)} - \frac{2[t'(i\alpha)]^2}{(\xi^2+\alpha^2)^3 t_1^3(\xi,\alpha)}\right]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Как отмечалось, у функции $t(\xi)-t(0)$ в точке $\xi=0$ нуль второго порядка, поэтому $t'(0)=0$, $t''(0)\ne 0$, и в силу аналитичности этой функции справедливы неравенства $|t'(\xi)| \le C|\xi|$ и $|t''(\xi)| \le C$ для всех достаточно малых $\xi \in \mathbb{C}$.

Положим

$$\begin{aligned} \widehat{V_q^{(1)}}(\xi) &= \frac{iq^2 t'(iq\nu)p(\xi)\hat{\zeta}(\xi)}{(\xi^2+q^2\nu^2)^2 t_1^2(\xi,q\nu)} \\ \widehat{V_{q,\tau}^{(2)}}(\xi) &= -\frac{q^3\tau p(\xi)\hat{\zeta}(\xi)}{2}\left[\frac{t''(i\alpha)}{(\xi^2+\alpha^2)^2 t_1(\xi,\alpha)} - \frac{2[t'(i\alpha)]^2}{(\xi^2+\alpha^2)^3 t_1^3(\xi,\alpha)}\right]. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Из оценок производных первого и второго порядков функции $t(\xi)$, ограниченности величины $\deg(P)$ и быстрого убывания функции $\hat{\zeta}(\xi)$ на бесконечности следуют неравенства

$$\big|\lambda^s(\xi)\widehat{V_q^{(1)}}(\xi)\big| \le \frac{Cq^3}{|\xi^2+\alpha_*|^2}, \quad \big|\lambda^s(\xi)\widehat{V_{q,\tau}^{(2)}}(\xi)\big| \le C\tau\left[\frac{q^3}{|\xi^2+\alpha_*|^2} + \frac{q^5}{|\xi^2+\alpha_*|^3}\right], \tag{4.23}$$

где $\alpha_* = q\nu_*/2$. Ссылка на предложение 1 доказывает первое утверждение. Второе доказывается с использованием неравенства

$$\big|\widehat{V_{q,\tau_1}^{(2)}}(\xi) - \widehat{V_{q,\tau_2}^{(2)}}(\xi)\big| \le Cq^3|\tau_1-\tau_2|\,|\hat{\zeta}(\xi)|Z(\xi)$$

с функцией

$$\begin{aligned} Z(\xi) = {}& \max_{\frac{q\nu_*}{2}\le\alpha\le\frac{3q\nu_*}{2}}\left[\frac{t''(i\alpha)}{(\xi^2+\alpha^2)^2 t_1(\xi,\alpha)} + \frac{2[t'(i\alpha)]^2}{(\xi^2+\alpha^2)^3 t_1^3(\xi,\alpha)}\right] \\ & \le C\left|\frac{1}{(\xi^2+\alpha_*^2)^2} + \frac{q^2}{(\xi^2+\alpha_*^2)^3}\right|. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Следовательно,

$$\left|\lambda^s(\xi)[\widehat{V^{(2)}_{q,\tau_1}}(\xi)-\widehat{V^{(2)}_{q,\tau_2}}(\xi)]\right| \le C|\tau_1-\tau_2|\left[\frac{1}{|\xi^2+\alpha_*^2|^2}+\frac{q^2}{|\xi^2+\alpha_*^2|^3}\right].$$

Снова используя предложение 1, приходим к требуемой оценке:

$$\left\|V^{(2)}_{q,\tau_1}-V^{(2)}_{q,\tau_2}\right\|_{E^s(\rho)} \le \frac{C|\tau_1-\tau_2|}{\sqrt{q}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если величина $\mathscr{N}(u)$ равномерно по q ограничена (предполагается, что функция $u(x)$ зависит от параметра q), то для оператора*

$$R_1(q,\mu_1,\mu_2)=T_1(q,\mu_1)-T_1(q,\mu_2)$$

справедлива оценка

$$\|R_1u\|_{E^s(\rho)} \le C\mathscr{N}(u)\sqrt{q}|\mu_1-\mu_2|.$$

Доказательство. Операторы L и M не зависят от q,μ. Заключение леммы следует из неравенства

$$|\lambda^s(\xi)\widehat{R_1u}(\xi)| \le C(q^4+q^3|\xi|)|\mu_1-\mu_2|Z(\xi)\mathscr{N}(u), \quad \xi\in\Pi_\rho,$$

оценки (4.24) и предложения 1. Лемма доказана.

Введем обозначение $f(q,\tau,w)=(T_1(q,\mu)w,\zeta)+(\Psi,\zeta)$, где $\mu=\nu+\tau$. Условие «ортогональности» (4.19) принимает вид

$$f(q,\tau,w)=0. \tag{4.25}$$

Разрешимость этого уравнения относительно τ гарантирует

Теорема 2. *Существует число $q_2\in(0,q_1)$ такое, что для $q\in(0,q_2)$ и $w\in B(\mathscr{R})$ ($\mathscr{R}$ — некоторое не зависящее от q число) определена непрерывно дифференцируемая функция*

$$\tau:(0,q_2)\times B(\mathscr{R})\to\mathbb{R}$$

со свойствами:

(а) *$f(q,\tau(q,w),w)\equiv 0$ при $q\in(0,q_2)$, $w\in B(\mathscr{R})$;*

(б) *$|\tau(q,w)|\le C\left(\sqrt{q}+\|T_1w\|_2\right)$;*

(в) *для производной Фреше $D_w\tau$ верна оценка*

$$|D_w\tau\langle\psi\rangle| \le C\|T_1\psi\|_2, \quad \psi\in E^s(\rho).$$

Здесь q_2 зависит от $\mathscr{R}$; постоянная C не зависит от $q,\mathscr{R}$.

Доказательству теоремы предшествуют три вспомогательных утверждения.

Предложение 2. *Для функции* $T_1 v$, *где* v *— решение уравнения* (4.11), *справедлива оценка* $\|T_1 v\|_{E^s(\rho)} \le C\sqrt{q}$.

Доказательство. Вычислим $\mathscr{N}(v)$. Поскольку $v = Cq(\lambda + T)^{-1}P\zeta$, где C — произвольная постоянная, $\lambda = \lambda(q\nu)$, $\nu = \nu(q)$ — функция, определяемая уравнением (4.12), имеем

$$\|v\|_2^2 = C\int \frac{q|p(\xi)\hat{\zeta}(\xi)|^2}{\big|(\xi^2 + q^2\nu^2)t_1(\xi, q\nu)\big|^2}\, d\xi.$$

После замены $\xi = q\nu\kappa$ получаем $\|v\|_2 \le C/\sqrt{q}$. Далее,

$$\|\hat{v}\|_1 = C\int \frac{q|p(\xi)\hat{\zeta}(\xi)|}{|(\xi^2 + q^2\nu^2)t_1(\xi, q\nu)|}\, d\xi \le C.$$

Постоянная C не зависит от q. Следовательно, $\mathscr{N}(v) = \|\hat{v}\|_1 \le C < \infty$. Далее утверждение предложения следует из леммы 1. Предложение доказано.

Предложение 3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\substack{q\to 0\\ \tau\to 0}} (R_0 v, \zeta) = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (4.20). Положив в (4.23) $s = 0$ находим

$$\big|\big(V_q^{(1)}, \zeta\big)\big| \le C\int \frac{q|p(\xi)\hat{\zeta}(\xi)|}{|\xi^2 + \alpha_*^2|}\, d\xi.$$

После замены $\xi = \alpha_*\kappa$ получаем, что $\big|\big(V_q^{(1)}, \zeta\big)\big| \le C$ равномерно по q, откуда $\tau\big(V_q^{(1)}, \zeta\big) \to 0$ при $q, \tau \to 0$. Аналогично $\tau\big(V_{q,\tau}^{(2)}, \zeta\big) \to 0$. Предложение доказано.

Предложение 4. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\substack{q\to 0\\ \tau\to 0}} \frac{\partial f}{\partial \tau} \ne 0.$$

Доказательство. Зная точные выражения для оператора T_1 и функции v, при помощи техники преобразования Фурье легко устанавливается равенство

$$\lim_{\substack{q\to 0\\ \tau\to 0}} \frac{\partial}{\partial \tau}(T_1(q,\mu)\langle v + w\rangle, \zeta) = 0$$

(напомним, v от τ не зависит). Далее,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(T_0(q,\mu)v, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \tau}\int \frac{qp(\xi)\big|\hat{\zeta}(\xi)\big|^2\, d\xi}{(\xi^2 + q^2\mu^2)t_1(\xi, q\mu)}. \tag{4.26}$$

Оценка (4.24) функции $Z(\xi)$ позволяет почленно дифференцировать (4.26). Делая стандартную замену $\xi = q\mu\kappa$, в пределе при $q, \tau \to 0$ получаем

$$\lim_{\substack{q\to 0\\ \tau\to 0}} \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{-t''(0)}{32\pi^2 p^2(0)\hat{\zeta}(0)} \ne 0.$$

Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2. Существование функции $\tau(q,w)$. Покажем, что к уравнению (4.25) применима теорема о неявной функции.

Из предложений 2 и 3 следует, что $(\Psi,\zeta)\to 0$ при $q,\tau\to 0$.

Функция w принадлежит $B(\mathscr{R})$, откуда $\mathscr{N}(w)\le\mathscr{R}$. Применив неравенство Коши — Шварца к слагаемому (T_1w,ζ), получим $f\to 0$ при $q\to 0$, $\tau\to 0$.

Согласно этому факту и предложению 4 для уравнения (4.25) выполнены условия теоремы о неявной функции, откуда вытекает, что отображение $\tau:(0,q_2)\times B(\mathscr{R})\to\mathbb{R}$ определено, непрерывно дифференцируемо и обращает (4.25) в тождество.

Оценки функции τ. Перепишем (4.25) с учетом формул (4.20):

$$-\tau\big(V_q^{(1)}+V_{q,\tau}^{(2)},\zeta\big)=(T_1(q,\mu)\langle v+w\rangle,\zeta).$$

Здесь $\mu=\nu(q)+\tau(q,w)$. Легко показать, что

$$\big(V_q^{(1)},\zeta\big)\underset{q\to 0}{\longrightarrow}V_*^{(1)}\ne 0,\quad \big(V_{q,\tau}^{(2)},\zeta\big)\underset{q\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Константа $V_*^{(1)}$ зависит от функций $t(\xi)$, $\zeta(\xi)$ и числа ν_*. Очевидно, что для достаточно малых q справедливо неравенство

$$\big|\big(V_q^{(1)}+\tau V_{q,\tau}^{(2)},\zeta\big)\big|\ge\frac{\big|V_*^{(1)}\big|}{2}>0.$$

Отсюда

$$|\tau(q,w)|\le C_0\{\sqrt{q}+\|T_1w\|_2\},\tag{4.27}$$

что доказывает (б).

Далее, по правилу дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial\tau}{\partial w}\langle\psi\rangle=-\left(\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)^{-1}(T_1(q,\mu)\psi,\zeta).$$

Производная $\partial f/\partial\tau$ непрерывна. Ее значение при $q,\tau\to 0$ отлично от нуля. Следовательно, существует некоторая область $q\in(0,q_2)$, $w\in B(\mathscr{R})$, где абсолютная величина этой производной больше некоторого положительного числа. Тогда

$$\left|\frac{\partial\tau}{\partial w}\langle\psi\rangle\right|\le C\,|(T_1\psi,\zeta)|\le C\|T_1\psi\|_2,$$

что и требовалось. Теорема доказана.

3.2. Главная часть решения уравнения (4.18). Существование и оценки функции $\tau(q,w)$ гарантируют выполнение условия разрешимости (4.19). Положив в уравнении (4.18) $\tau=\tau(q,w)$, последнее можно решать независимо от (4.19).

Представим $w=w_1+w_2$. Функцию w_1 будем искать как решение уравнения

$$w_1=\tau(q,w_1+w_2)V_q^{(1)}.\tag{4.28}$$

Из (4.28) ясно, что w_1 имеет вид $w_1=\mathscr{C}V_q^{(1)}$. При этом постоянная $\mathscr{C}$ находится из скалярного уравнения

$$\mathscr{C}=\tau\big(q,\mathscr{C}V_q^{(1)}+w_2\big).\tag{4.29}$$

Лемма 4. *Существует* $q_3 \in (0, q_2)$ *такое, что при* $q \in (0, q_3)$ *и* $w_2 \in B(1)$ *отображение*

$$\Gamma(q, w_2, \mathscr{C}) = \tau(q, \mathscr{C} V_q^{(1)} + w_2)$$

(a) сжимающее по $\mathscr{C}$*;*

(б) *переводит множество* $(0, q_3) \times B(1) \times [-\beta\sqrt{q}, \beta\sqrt{q}]$ *с некоторым* $\beta > 0$ *(*β *зависит от функций* t, ζ*) в отрезок* $[-\beta\sqrt{q}, \beta\sqrt{q}]$.

Доказательство. Пусть $\beta > 0$ — некоторое (конечное) число, не зависящее от q. Из представления $w = w_1 + w_2$ и леммы 2 следует оценка

$$\|w\|_2 \leq \mathscr{C} \big\| V_q^{(1)} \big\|_2 + 1 \leq C\beta + 1.$$

Согласно теореме 2 существует число q_2, зависящее теперь от β, такое, что функция $\tau(q, w)$ определена и обладает перечисленными в теореме 2 свойствами.

Неравенство (4.27) с учетом оценок из леммы 2 принимает вид

$$|\tau(q, w)| \leq C_0 \left(\sqrt{q} + \|T_1 w_1\|_2 + \|T_1 w_2\|_2 \right) \leq C_0 \sqrt{q} \left[1 + C_1 (1 + \beta\sqrt{q}) \right]. \qquad (4.30)$$

Здесь C_0 — константа из оценки (4.27); C_1 — константа из оценки оператора T_1 (лемма 1). Эти постоянные зависят только от функций t и ζ.

Положим $\beta = 2C_0(1 + 2C_1)$. Из (4.30) следует, что при $0 < q < \min\{q_2, \frac{1}{\beta^2}\}$ значения функции Γ принадлежат отрезку $[-\beta\sqrt{q}, \beta\sqrt{q}]$.

Сжатие по $\mathscr{C}$ вытекает из оценки для производной Фреше функции τ. Действительно,

$$\begin{aligned} |\Gamma(q, w_2, \mathscr{C}_1) - \Gamma(q, w_2, \mathscr{C}_2)| &= \big| \tau\big(q, \mathscr{C}_1 V_q^{(1)} + w_2\big) - \tau\big(q, \mathscr{C}_2 V_q^{(1)} + w_2\big) \big| \\ &\leq |\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2| \left| \frac{\partial \tau}{\partial w} \big\langle V_q^{(1)} \big\rangle \right| \leq C\sqrt{q} |\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2| \mathscr{N}\big(V_q^{(1)}\big) \leq C_\zeta \sqrt{q} |\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2|. \end{aligned}$$

Остается положить $q_3 = \min\big\{q_2, \frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{4C_\zeta^2}\big\}$. Лемма доказана.

Таким образом, к уравнению (4.29) примени́м метод последовательных приближений: для всякого $q \in (0, q_3)$ решение задачи (4.29) существует и однозначно определяется парой (q, w_2). При этом отображение $(q, w_2) \mapsto \mathscr{C}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $C_\zeta \sqrt{q}$.

Также определено отображение $(q, w_2) \mapsto w_1$, обращающее (4.28) в тождество для указанных q и w_2; кроме того, w_1 как функция от (q, w_2) непрерывна по w_2 с равномерной оценкой:

$$\|w_1(q, w_2) - w_1(q, \widetilde{w}_2)\|_2 \leq C \|w_2 - \widetilde{w}_2\|_2. \qquad (4.31)$$

3.3. Уравнение на w_2. Полученные результаты позволяют перейти к заключительному этапу построения решения уравнения (3.1), а именно к нахождению функции w_2.

После подстановки $w = w_1(q, w_2) + w_2$ в (4.18) с учетом (4.28) получаем

$$w_2 = T_1(q, \mu) w_2 + T_1(q, \mu) w_1(q, w_2) + T_1(q, \mu) v + \tau V_{q,\tau}^{(2)}, \qquad (4.32)$$

где $\tau = \tau(q, w_1(q, w_2) + w_2)$, $\mu = \nu(q) + \tau$.

Лемма 5. *Для достаточно малых q отображение*

$$\Upsilon_q(w_2) = T_1(q,\mu)w_2 + T_1(q,\mu)w_1(q,w_2) + T_1(q,\mu)v + \tau V^{(2)}_{q,\tau}$$

(а) *сжимающее в* $L_2(\mathbb{R})$;

(б) *переводит единичный шар* $B(1)$ *в себя.*

Доказательство. Разность $\Upsilon_q(w_2) - \Upsilon_q(\widetilde{w}_2)$ представима в виде

$$\Upsilon_q(w_2) - \Upsilon_q(\widetilde{w}_2) = \sum_{i=1}^{7} \Upsilon_q^{(i)}(w_2, \widetilde{w}_2),$$

со слагаемыми $\Upsilon_q^{(i)}(w_2, \widetilde{w}_2)$, определяемыми по формулам

$$\Upsilon_q^{(1)}(w_2,\widetilde{w}_2) = T_1(q,\mu)\langle w_2 - \widetilde{w}_2\rangle, \quad \Upsilon_q^{(2)}(w_2,\widetilde{w}_2) = R_1(q,\mu,\tilde{\mu})\widetilde{w}_2,$$
$$\Upsilon_q^{(3)}(w_2,\widetilde{w}_2) = T_1(q,\mu)\langle w_1 - \widetilde{w}_1\rangle, \quad \Upsilon_q^{(4)}(w_2,\widetilde{w}_2) = R_1(q,\mu,\tilde{\mu})w_1,$$
$$\Upsilon_q^{(5)}(w_2,\widetilde{w}_2) = R_1(q,\mu,\tilde{\mu})v, \quad \Upsilon_q^{(6)}(w_2,\widetilde{w}_2) = (\tau - \tilde{\tau})V^{(2)}_{q,\tau},$$
$$\Upsilon_q^{(7)}(w_2,\widetilde{w}_2) = \tau[V^{(2)}_{q,\tau} - V^{(2)}_{q,\tilde{\tau}}],$$

где $\tau = \tau(q, w_1 + w_2)$, $\tilde{\tau} = \tau(q, \widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2)$, $\mu = \nu(q) + \tau$, $\tilde{\mu} = \nu(q) + \tilde{\tau}$, $w_1 = w_1(q, w_2)$, $\widetilde{w}_1 = w_1(q, \widetilde{w}_2)$.

Для сокращения выкладок целесообразно ввести классы $C(\alpha)$.

Будем говорить, что функция $f_q(u_1, u_2)$ со значениями из $L_2(\mathbb{R})$ и областью определения $B(1) \times B(1)$, где $q \in (0, q_3)$, *принадлежит классу* $C(\alpha)$, если для всех допустимых q, u_1, u_2 выполняется неравенство

$$\|f_q(u_1,u_2)\|_2 \leq Cq^\alpha \|u_1 - u_2\|_2$$

с не зависящей от q постоянной C.

Таким образом, для доказательства того, что отображение Υ_q сжимающее, достаточно проверить справедливость включений $\Upsilon_q^{(i)} \in C(\alpha_i)$ с некоторыми положительными α_i, $i = 1 \div 7$.

Поскольку $w_2, \widetilde{w}_2 \in B(1)$, по свойствам оператора T_1 (лемма 1) и отображения $w_1(q, w_2)$ слагаемые $\Upsilon_q^{(1)}, \Upsilon_q^{(3)}$ принадлежат $C(1/2)$. Далее, по теореме 2, лемме 3 и неравенству (4.31)

$$\big\|\Upsilon_q^{(2)}(w_2,\widetilde{w}_2)\big\|_2 \leq C\sqrt{q}|\mu - \tilde{\mu}| \leq Cq\|w_2 - \widetilde{w}_2\|_2,$$

т. е. $\Upsilon_q^{(2)} \in C(1)$. Аналогично $\Upsilon_q^{(4)} \in C(1)$.

Как было установлено, $\mathcal{N}(v) \leq C$ равномерно по q, поэтому согласно теореме 2 и лемме 3 $\Upsilon_q^{(5)} \in C(1)$.

Слагаемые $\Upsilon_q^{(6)}, \Upsilon_q^{(7)}$ согласно лемме 2 и теореме 2 принадлежат $C(1/2)$. Замечая, что $C(1/2) \supset C(1)$, получаем окончательно

$$\sum_{i=1}^{7} \Upsilon_q^{(i)} \in C(1/2). \tag{4.33}$$

Для доказательства второго утверждения леммы достаточно положить $\widetilde{w}_2 = 0$. Из (4.33) вытекает $\|\Upsilon_q(w_2)\|_2 \leq Cq^{1/2}\|w_2\|_2$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Существует* $q_4 > 0$ *такое, что при всех* $q \in (0, q_4)$ *уравнение* (4.32) *имеет единственное решение из единичного шара пространства* $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство немедленно следует из леммы 5 и принципа сжимающих отображений.

Таким образом, решение уравнения (3.1) имеет вид $u = v + w$, где $v = Cq(\lambda(q\nu) + T)^{-1}P\zeta$, а w однозначно находится из уравнений (4.28) и (4.32).

В силу того, что $L_2(\mathbb{R})$-нормы составляющих u слагаемых суть величины порядка $O(q^{-1/2})$ и $O(1)$ соответственно, собственная функция u отлична от нуля. Однократность собственного числа следует из принципа сжимающих отображений.

Для доказательства принадлежности функции u пространству $E^s(\rho)$ покажем, что линейный оператор $(\lambda + T)^{-1}P\{qL + q^2M\}$ переводит функции из $L_2(\mathbb{R})$ в $E^s(\rho)$ с любым $s \geq 0$ и $\rho \leq q\nu_*/4$ с оценкой

$$\|(\lambda + T)^{-1}P\{qL + q^2M\}w\|_{E^s(\rho)} \leq \frac{C_s}{\sqrt{q}}\|w\|_2.$$

Действительно, имеет место представление

$$(\lambda + T)^{-1}P\{qL + q^2M\} = T_0(q, \mu) + T_1(q, \mu).$$

Заметим, что $\mathscr{N}(w) \leq \|w\|_2$. Согласно лемме 1

$$\|T_1 w\|_{E^s(\rho)} \leq C\sqrt{q}\mathscr{N}(w) \leq C\sqrt{q}\|w\|_2.$$

Для оценки конечномерного оператора T_0 воспользуемся его явным представлением (4.8). Имеем

$$|\widehat{T_0 w}(\xi)| \leq C_\zeta \|w\|_2 \left|\frac{qp(\xi)\hat{\zeta}(\xi)}{(\xi^2 + q^2\mu^2)t_1(\xi, q\mu)}\right|.$$

Из свойств функций $p(\xi)$, $l_1(\xi)$, $l_2(\xi, \eta)$ и неравенства (4.2) вытекает, что

$$|\lambda^s(\xi)\widehat{T_0 w}(\xi)| \leq C_{p,\zeta,s}\|w\|_2 \frac{q}{|\xi^2 + q^2\mu^2|}.$$

Осталось заметить, что $\mu \in [\nu_*/2, 3\nu_*/2]$, и сослаться на предложение 1. Из (4.10) следует, что $u \in E^s(\rho)$ с любым $s \geq 0$ и $\rho \leq q\nu_*/4$. Теорема 1 доказана.

Лемма 6. *При* $s > 0$, $\rho > 0$ *оператор вложения* $E^s(\rho) \subset L_2(\mathbb{R})$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{J}$ — ограниченное множество в $E^s(\rho)$. Выберем произвольно последовательность $\{\psi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathscr{J}$. Требуется показать, что из нее можно извлечь сходящуюся в $L_2(\mathbb{R})$ подпоследовательность.

Для положительных $\mathscr{M}$ и $\varkappa(x) \in C^\infty[0, 1]$ такой, что $\varkappa(0) = 1$, $\varkappa(1) = 0$, определим функции $\bar{\psi}_n$, $\tilde{\psi}_n$:

$$\bar{\psi}_n = \psi_n - \tilde{\psi}_n, \quad \tilde{\psi}_n = \begin{cases} \psi_n(x), & |x| < \mathscr{M}, \\ \psi_n(x)\varkappa(|x| - \mathscr{M}), & |x| \in [\mathscr{M}, \mathscr{M} + 1], \\ 0, & |x| > \mathscr{M} + 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\|\psi_n - \psi_m\|_2 \leq \|\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_m\|_2 + \|\bar{\psi}_n - \bar{\psi}_m\|_2. \tag{4.34}$$

Поскольку $\rho > 0$ и $\|e^{\rho|x|}\psi_n(x)\|_2 < \infty$, имеем

$$\|\bar{\psi}_n\|_2 \leq Ce^{-\rho(\mathscr{M}+1)}\|\psi_n\|_{E^s(\rho)}.$$

Значит, в силу ограниченности $\mathscr{J}$

$$\|\bar{\psi}_n - \bar{\psi}_m\|_2 \leq Ce^{-\rho(\mathscr{M}+1)}(\|\psi_n\|_{E^s(\rho)} + \|\psi_m\|_{E^s(\rho)}) \leq Ce^{-\rho(\mathscr{M}+1)}.$$

Из последней оценки следует, что при достаточно большом $\mathscr{M}$ и всех n второе слагаемое в правой части (4.34) будет меньше произвольного $\varepsilon > 0$.

Далее, для всякого ограниченного множества $\mathscr{Q} \subset \mathbb{R}^n$ оператор вложения $H_0^s(\mathscr{Q}) \subset L_2(\mathscr{Q})$ компактен при указанных s [9] (H_0^s — пространства Соболева — Шварца).

Пусть $\mathscr{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \mathscr{M} + 1\}$. Поскольку $\tilde{\psi}_n \in H_0^s(\mathscr{Q})$, согласно вышеизложенному существует сходящаяся в $L_2(\mathscr{Q})$ подпоследовательность $\{\tilde{\psi}_{n_k}\}_{k\geq 1}$.

Из определения $\tilde{\psi}_n$ вытекает равенство $\|\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_m\|_2 = \|\tilde{\psi}_n - \tilde{\psi}_m\|_{L_2(\mathscr{Q})}$, поэтому на указанной подпоследовательности первое слагаемое в правой части (4.34) не будет превосходить ε при достаточно больших k.

Таким образом, подпоследовательность $\{\psi_{n_k}\}_{k\geq 1}$ фундаментальна в $L_2(\mathbb{R})$, что и требовалось. Лемма доказана.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы* 1 *задача* (3.1) *фредгольмова в* $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство следует из существования и ограниченности в $L_2(\mathbb{R})$ оператора $(\lambda + T)^{-1}$, включения $P\{L + M\} \in E^{-\infty}(\rho)$ и леммы 6.

5. Линейные стационарные волны над подводным хребтом

Рассмотрим (линеаризованную) задачу о гравитационно-капиллярных волнах, бегущих вдоль подводного хребта.

Пусть область течения Ω лежит в пространстве точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ограничена сверху «свободной поверхностью» $z = 0$, снизу — дном $z = -1 + qh(x)$ ($q > 0$ — малый параметр). Будем считать, что задающая форму дна функция $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, финитна и бесконечно дифференцируема.

Линейная задача о бегущих с постоянной скоростью a поверхностных гравитационно-капиллярных волнах малой амплитуды для идеальной несжимаемой безвихревой жидкости в терминах потенциала течения $\Phi(x, y, z)$ в безразмерных переменных формулируется следующим образом [10].

Требуется определить гармоническую в области Ω функцию Φ:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \tag{5.1}$$

удовлетворяющую «условию непротекания» ($\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к твердой границе Ω)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}} = 0, \quad z = -1 + qh(x) \tag{5.2}$$

и краевому условию на «свободной поверхности»

$$(1 - \Delta)\Phi_z + a^2\Phi_{yy} = 0, \quad z = 0. \tag{5.3}$$

Здесь a — постоянная скорость волны. Ускорение силы тяжести g, плотность жидкости ρ и коэффициент поверхностного натяжения σ приняты равными единице.

Так действительно можно сделать, поскольку g и ρ переходят в единицу путем растяжения независимых переменных и функций. При этом перед оператором Δ возникает, вообще говоря, неединичный множитель. Как будет показано ниже, при реализации описанной в предыдущих пунктах схемы ветвления неважно, есть капиллярность или ее нет. Поэтому при учете капиллярных эффектов σ полагается равным единице, в противном случае — нулю.

Поскольку нас интересуют только периодические по y решения, представим Φ в виде $\Phi = e^{i\omega y}\varphi(x,z)$. После подстановки в (5.1)–(5.3) приходим к следующей краевой задаче для функции φ:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} - \omega^2\varphi = 0, &\qquad -1 < z < 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, &\qquad z = -1 + qh(x), \\ (1+\omega^2 - D_x^2)\varphi_z - a^2\omega^2\varphi = 0, &\qquad z = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Краевая задача (5.4) может быть записана в виде одного операторного уравнения для функции $u(x) = \varphi(x,0)$:

$$\left(1+\omega^2 - D_x^2\right) Ku - a^2\omega^2 u = 0, \tag{5.5}$$

где линейный оператор «нормальная производная» K сопоставляет каждой функции u величину $Ku = \partial\varphi/\partial z$ при $z = 0$. Здесь φ — решение смешанной краевой задачи

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} - \omega^2\varphi = 0, &\qquad -1 < z < 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, &\qquad z = -1 + qh(x), \\ \varphi = u, &\qquad z = 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Для аналитической функции f псевдодифференциальный оператор $f(|\nabla|)$ задается символом $f(\theta(\xi))$, где $\theta(\xi) = (\xi^2+\omega^2)^{1/2}$.

Лемма 7. *При достаточно малых q линейный оператор K допускает представление $K = K_0 + qK_1 + O(q^2)$, где $K_0 = |\nabla|\mathrm{th}|\nabla|$, $K_1 = D_x\Lambda h D_x\Lambda + D_y^2\Lambda h\Lambda$, $\Lambda = \mathrm{ch}^{-1}|\nabla|$.*

Строгое доказательство леммы не приводится в силу его громоздкости. Ограничимся формальными рассуждениями.

Легко убедиться, что функция

$$\varphi_0(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)\frac{\mathrm{ch}\,[(z+1)\theta(\xi)]}{\mathrm{ch}\,\theta(\xi)}\,d\xi$$

— решение краевой задачи (5.6) с $q = 0$. Отсюда сразу следует равенство $\widehat{K_0 u}(\xi) = \hat{u}(\xi)\theta(\xi)\,\mathrm{th}\,\theta(\xi)$, или $K_0 = |\nabla|\,\mathrm{th}\,|\nabla|$.

Введем вспомогательную функцию

$$E(\xi,x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix\xi}\frac{\mathrm{ch}\,[(z+1)\theta(\xi)]}{\mathrm{ch}\,\theta(\xi)}.$$

Обозначим $\Sigma_q = \{(x,z) | z \in (-1+qh(x),0)\}$ и определим оператор Δ формулой $\Delta = D_x^2 + D_z^2 - \omega^2$. Тогда $\Delta E = 0$ в области Σ_q при $q \geq 0$.

Пусть φ_q — решение задачи (5.6). Из формулы Грина

$$0 = \int\limits_{\Sigma_q}(E\Delta\varphi_q - \varphi_q\Delta E)\,d\Sigma_q = \int\limits_{\partial\Sigma_q}\left\{E\frac{\partial\varphi_q}{\partial\boldsymbol{n}} - \varphi_q\frac{\partial E}{\partial\boldsymbol{n}}\right\}dS$$

следует выражение для $D_z\widehat{\varphi_q}(\xi,0)=\widehat{Ku}(\xi)$:

$$\widehat{Ku}(\xi)=\int\limits_{z=0} u\frac{\partial E}{\partial z}\,dx-\int\limits_{z=-1+qh(x)}\varphi_q\left\{\frac{\partial E}{\partial z}-qh'\frac{\partial E}{\partial x}\right\}\left(1+q^2h'^2\right)^{1/2}dx.$$

Сделаем во втором интеграле замену переменных, положив $z=\bar z[1-qh(x)]$. Тогда получим (черта опущена)

$$\begin{aligned}\widehat{Ku}(\xi)&=\hat u(\xi)\theta(\xi)\operatorname{th}\theta(\xi)\\&-\frac{q}{\sqrt{2\pi}\operatorname{ch}\theta(\xi)}\int\limits_{z=-1}\varphi_q(x,z)\left\{\frac{\theta(\xi)\operatorname{sh}[q\theta(\xi)h(x)]}{q}+i\xi h'(x)\operatorname{ch}[q\theta(\xi)h(x)]\right\}\\&\qquad\qquad\times[1+q^2h'^2(x)]^{1/2}e^{-ix\xi}\,dx.\end{aligned}$$

Почленный переход к пределу при $q\to 0$ в последнем интеграле с учетом равенства

$$\lim_{\substack{z\to-1\\ q\to0}}\widehat{\varphi_q}(\xi,z)=\frac{\hat u(\xi)}{\operatorname{ch}\theta(\xi)}$$

дает

$$\widehat{Ku}(\xi)=\hat u(\xi)\theta(\xi)\operatorname{th}\theta(\xi)-\frac{q}{\sqrt{2\pi}}\int\frac{\xi\xi_1+\eta^2}{\operatorname{ch}\theta(\xi)\operatorname{ch}\theta(\xi_1)}\hat h(\xi-\xi_1)\hat u(\xi_1)\,d\xi_1+O(q^2).$$

Согласно введенным обозначениям $K_1=D_x\Lambda hD_x\Lambda+D_y^2\Lambda h\Lambda$.

Нули функции $\theta(\xi)=(\xi^2+\omega^2)^{1/2}$ расположены в точках $\xi=\pm i\omega$. Если $\rho\le\omega/2$, то $|\theta(\xi)|\ge C>0$ равномерно по $\xi\in\Pi_\rho$.

В силу очевидного неравенства $|\theta(\xi)|^p\le C_p|\lambda(\xi)|^p$ $(\xi\in\Pi_\rho)$ порядок оператора $|\nabla|$ равен 1, а поскольку $|\operatorname{th}\theta(\xi)|=O(1)$, то $K_0\in E^1(\rho)$.

Функция $\operatorname{ch}\theta(\xi)$ не имеет нулей в Π_ρ, а ее модуль ведет себя, как $\exp\{|\operatorname{Re}\xi|\}$. Следовательно, оператор Λ лежит в классе $E^{-\infty}(\rho)$.

Пользуясь разложением оператора K (лемма 7), запишем уравнение (5.5) (с точностью до квадратичных по q членов) в виде

$$PK_0u-a^2\omega^2u=-qPK_1u. \tag{5.7}$$

Здесь $P=1+\omega^2-D_x^2$. Обозначим $T=PK_0$, $L=-K_1$. Тогда задача (5.7) примет вид (3.1) с оператором $M=0$.

Теорема 5. *Пусть*

$$\int h(x)\,dx>0.$$

Тогда для любого $\omega>0$ существует $q_*>0$ такое, что при $q\in(0,q_*)$ уравнение (5.7) имеет простое собственное число $a\ne0$, непрерывно дифференцируемое по q. Соответствующая ему собственная функция принадлежит пространству $E^s(\rho)$, $s\ge0$, $\rho=O(q)$.

Доказательство сводится к проверке выполнения условий 1–3 п. 3, (a)–(e) п. 4 и теоремы 1.

Символы операторов P и T суть соответственно функции

$$p(\xi)=1+\theta^2(\xi),\quad t(\xi)=p(\xi)\theta(\xi)\operatorname{th}\theta(\xi). \tag{5.8}$$

Свойства 1, 2 п. 3 для функций $p(\xi)$, $t(\xi)$ очевидны.

Пусть $\lambda = -a^2\omega^2$ задается формулой $\lambda = -t(i\rho)$. Для проверки свойства 3 заметим, что функция $\tau(\xi) = t(\xi) - t(i\rho)$ может обращаться в нуль только в тех точках полосы Π_ρ, где $\operatorname{Im}\{t(\xi)\} = 0$. Множество точек ξ, удовлетворяющих этому уравнению, — это либо действительная ось, либо мнимая ось.

Рассмотрим случай $\operatorname{Re}\xi = 0$. Задача сводится к исследованию знакопостоянства функции

$$f(\eta) = \tau(i\eta) \equiv [\theta^2(i\eta) + 1]\theta(i\eta)\operatorname{th}\theta(i\eta) - [\theta^2(i\rho) + 1]\theta(i\rho)\operatorname{th}\theta(i\rho)$$

на интервале $\eta \in [-\rho, \rho]$. Функция $f(\eta)$ строго убывает при $\eta > 0$ и $f(0) > 0$. В силу ее четности нулевые значения принимаются только на концах интервала в точках $\eta = \pm\rho$.

Если $\operatorname{Im}\xi = 0$, то $\tau(\xi)$ строго возрастает при положительных ξ, является четной и ее значение в нуле положительно. Таким образом, все условия п. 3 для определенной формулой (5.8) функции $t(\xi)$ выполнены.

Проверим свойства (a)–(d) оператора L (оператор M в данном случае равен нулю). Имеем

$$\widehat{Lu}(\xi) = l_1(\xi)\int l_1(\eta)l_2(\xi,\eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta,$$

где

$$l_1(\xi) = \frac{1}{\operatorname{ch}\theta(\xi)}, \quad l_2(\xi,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\xi\eta + \omega^2)\hat{h}(\xi - \eta).$$

Условия (a), (b), очевидно, выполнены. Далее, по свойствам преобразования Фурье $\overline{\hat{f}(\xi)} = \hat{f}(-\xi)$, откуда следует справедливость (c). Наконец, (d) вытекает из тождества

$$(\xi\eta + \omega^2)\hat{h}(\xi - \eta) - \omega^2\hat{h}(-\eta) \equiv \xi[(\eta - \xi) + \xi]\hat{h}(\xi - \eta) + \omega^2[\hat{h}(\xi - \eta) - \hat{h}(-\eta)]$$

и очевидных неравенств

$$|\hat{h}(\xi - \eta) - \hat{h}(-\eta)| \le C|\xi| \max_{\xi_1\in\Pi_\rho} |\hat{h}'(\xi_1)| \le C_h|\xi|; \quad \max_{\xi_1\in\Pi_\rho} |(1 + \xi_1)\hat{h}(\xi_1)| \le C_h.$$

Число l при этом равно 1.

Остается показать, что $p(0)\hat{\zeta}(0)/t''(0) > 0$. Имеем

$$p(0) = 1 + \omega^2 > 0, \quad t''(0) = \frac{\omega^2 + 1}{\operatorname{ch}^2\omega} + \frac{3\omega^2 + 1}{\omega}\operatorname{th}\omega > 0.$$

Как ранее отмечалось, преобразование Фурье функции $\psi(x) = (2\pi)^{-1/2}$ есть δ-функция, откуда

$$\hat{\zeta}(\xi) = \frac{\omega^2\hat{h}(\xi)}{\sqrt{2\pi}\operatorname{ch}\theta(\xi)\operatorname{ch}\omega}.$$

Знак $\hat{\zeta}(0)$ совпадает со знаком $\hat{h}(0) = (2\pi)^{-1/2}\int h(x)\,dx$.

По теореме 1 у уравнения (5.7) при любом положительном ω есть экспоненциально убывающее с показателем $\rho = O(q)$ решение, определяемое с точностью до постоянного множителя. Собственное число $\lambda = -a^2\omega^2$ — непрерывно дифференцируемая функция параметра q. Теорема доказана.

Замечание 1. Если взять поверхностное натяжение $\sigma \neq 1$, то символом $p(\xi)$ оператора $P = 1 + \sigma(\omega^2 - D_x^2)$ будет функция $p(\xi) = 1 + \sigma\theta^2(\xi)$, для которой также будут выполнены все условия теоремы 1.

Замечание 2. Заключение теоремы 5 остается в силе, если $\sigma = 0$ (капиллярность отсутствует).

Действительно, в этом случае в уравнении (5.7) оператор P тождественный с символом $p(\xi) = 1$. Проверка условий теоремы 1 проводится изложенным в доказательстве теоремы 5 способом.

Таким образом, вдоль неровностей дна типа подводного хребта распространяются бегущие волны, амплитуда которых экспоненциально затухает с малым показателем $\rho > 0$ в перпендикулярном к хребту направлении. При этом условию теоремы 5 (положительность интеграла от функции $h(x)$) можно дать механическую трактовку: в сечении дна плоскостью, перпендикулярной к хребту, суммарная площадь возвышений (относительно прямой линии дна на бесконечности) должна быть больше общей площади впадин.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность В. И. Налимову за постоянное внимание и поддержку при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир., 1982. Т. 4.

2. *Налимов В. И., Плотников П. И.* Нерегулярные задачи на собственные значения и эффект волновода // Динамика сплошной среды. 1975. № 23. С. 132–150.

3. *Munk W. H., Arthur R. S.* Wave intensity along a refracted ray // Gravity Waves., Nat. Bur. Standarts, Circ. 1952.

4. *Гарипов Р. М.* Неустановившиеся волны над подводным хребтом // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161, № 3. С. 547–550.

5. *Гарипов Р.М.* Асимптотика волн Коши — Пуассона // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 135–145.

6. *Биченков Е. И., Гарипов Р. М.* Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном // Прикл. механика и мат. физика. 1969. № 2. С. 21–26.

7. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.

8. *Налимов В.И.* Псевдодифференциальные операторы с аналитическими символами // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 627–637.

9. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.

10. *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

Статья поступила 17 мая 2000 г., окончательный вариант — 6 марта 2001 г.

Кузнецов Дмитрий Сергеевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск 630090
kudims@hydro.nsc.ru