*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2001. Том 42, № 4*

*УДК 517.9*

# ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПАЙЕРЛСА И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ПАЙЕРЛСА. I

**В. Р. Кирейтов**

**Аннотация:** Рассматриваются математические вопросы обоснования и развития диффузионно-волновой модели распространения звука в однородном максвелловском газе. Получены следующие основные результаты. В терминах некоторых специальных функций вычислены символы сверточных ядер многомерных акустических уравнений Пайерлса и выписаны дисперсионные соотношения для них. Установлено отсутствие трехмерных вещественных листов решений у скалярного дисперсионного соотношения. Вычислена асимптотика на бесконечности скалярного монохроматического потенциала Пайерлса, и установлена единственность решения обратной задачи потенциала для него в классе всех финитных распределений. Материал статьи разбит на две части и состоит из трех параграфов. В части I, содержащей § 1, представлены формулировки основных результатов статьи. Библиогр. 6.

В статье, являющейся продолжением статьи [1], рассматриваются математические вопросы моделирования в рамках молекулярно-кинетической теории вещества акустических процессов в однородном максвелловском газе. Конечной целью намеченной программы действий является получение уточненных значений полного акустического поля вблизи источника возмущения в сравнении с его значениями в классических (моментных) акустических моделях. На данном этапе исследуется первое приближение, которое определяет начальный шаг построения ряда известных схем последовательно уточняющихся кинетических акустических моделей (таких, как схема Гросса — Джексона и ее модификации, схема Черчиньяни и др. [2]), представленное линеаризованным уравнением Больцмана в приближении первых сумматорных инвариантов или, в других терминах, линеаризованным БГК-уравнением. Предложения статьи [1] состояли в редукции этого приближенного уравнения (а также и более высоких приближений в рамках указанных схем) к уравнению на конфигурационном пространстве, которое можно рассматривать как многомерный (в смысле размерности области значений полевой функции) аналог уравнения Пайерлса линейной теории переноса частиц и применении к исследованию последнего методов теории потенциала. Возможность последовательного проведения указанных редукции и аналогии в формально-математической и содержательной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00–01–00814).

части предполагают наличие и предъявление определенных свойств рассматриваемых уравнений и входящих в них числовых и функциональных параметров. Укажем некоторые из стоящих здесь вопросов.

Сверточная матричная система (20) [1] (а также ее естественные подсистемы размерностей 1, 4), к которой редуцируется исходное приближенное уравнение, имеет вид, аналогичный скалярному уравнению Пайерлса, записанному в так называемой интегральной форме. Возможность записи упомянутой системы (20) (точнее, более специализированного ее варианта (1.4) настоящей статьи) в так называемой дифференциальной форме, при которой полевой оператор системы представлен оператором свертки с распределением-ядром, действующим только на полевую функцию, но не на источник, сводится к вопросу об обратимости символа (т. е. преобразования Фурье ядра) $\widetilde{\mathbb{K}}(\xi,\eta)$ сверточного ядра $\mathbb{K}(t,x)$ (в обозначениях [1]) в пространстве медленно растущих матричных распределений и наличии у обращенного символа ряда необходимых аналитических свойств.

Возможность представления решений уравнения (20) в классе искомых и заданных величин из пространства распределений медленного роста в виде (векторнозначного) потенциала Пайерлса сводится к вопросу о принадлежности классу распределений медленного роста матричного распределения $1/(1-\widetilde{\mathbb{K}}(\eta,\xi))$ и наличия у него аналитических свойств, аналогичных свойствам функции $\mathscr{J}(\eta,\xi)$, приведенным в конце п. 6 [1] (или свойствам функции $\mathscr{J}^{(0)}(\eta,\xi)$ из следствия к теореме 2 настоящей статьи).

Важные в интерпретационном отношении формулы, которые определяют зависимость фазовой и групповой скоростей и коэффициент поглощения возмущения от его частоты и дают возможность оценить качество рассматриваемой модели, требуют исследования и разрешения дисперсионных соотношений (т. е. характеристических уравнений) для рассматриваемых сверточных систем в области вещественных и комплексных значений пространственно-временных частот.

Наконец, возможность корректного решения задачи Коши для уравнения (20) [1] с начальными данными на пространственно-временных гиперповерхностях того или иного класса, а также вопросы единственности решения ряда постановок обратной задачи акустического потенциала рассматриваемой модели обусловлены наличием определенных функционально-аналитических свойств импеданса (голоморфного продолжения символа $\widetilde{\mathbb{K}}(\eta,\xi)$ в область комплексных значений пространственных и временных частот $(\eta,\xi)$) этого ядра.

Частичное решение поставленных вопросов для скалярного акустического уравнения Пайерлса дано в [1]; в настоящей статье продолжено изучение этих вопросов для скалярного и многомерных акустических уравнений Пайерлса.

Статья разбита на три параграфа и состоит из двух частей: § 1 исчерпывает содержание части I, § 2, 3 отнесены к части II, изложенной в [3].

В § 1 представлены формулировки основных результатов статьи. Коротко говоря, они состоят в следующем. В терминах некоторых специальных функций вычислены символы сверточных ядер многомерных акустических уравнений Пайерлса и выписаны дисперсионные соотношения для них (теорема 1). Установлено отсутствие трехмерных вещественных листов решений у скалярного дисперсионного соотношения (теорема 2). Вычислена асимптотика на бесконечности скалярного монохроматического потенциала Пайерлса и установлена единственность решения обратной задачи потенциала для него в классе всех финитных распределений (теорема 3).

В § 2 устанавливаются вспомогательные, необходимые для обоснования основных положений статьи, результаты. В § 3 приведены доказательства основных результатов. Более подробно содержание каждого параграфа представлено во введении к этому параграфу и комментариях в его контексте.

### § 1. Формулировка основных результатов

**1.** Определим величины $b$, $\gamma$, $\varepsilon$, полагая $b = \sigma\sqrt{\alpha}$, $\gamma = (\nu+i\eta)\sqrt{\alpha}$, $\varepsilon = \gamma - b = (\nu - \sigma + i\eta)\sqrt{\alpha}$, где $\nu$ — частота межмолекулярных столкновений рассматриваемого максвелловского газа, $\sigma$ — (формальная) частота столкновений «звуковых частиц» с рассеивающими центрами некоторой гипотетической акустической среды (см. [1, п. 7]), $\eta$ — частота гармонического возмущения акустического поля, $\alpha$ — газовая постоянная $(= \frac{m}{2kT})$. Величины $b$, $\varepsilon$, $\gamma$ будем называть показателями (или сечениями) рассеяния, поглощения и полного рассеяния (т. е. рассеяния и поглощения) соответственно. Очевидно, $\gamma = b + \varepsilon$, величины $\varepsilon$, $\gamma$ комплексны, и их вещественные части не зависят, а мнимые части линейно зависят от частоты. Величины $\alpha$, $\nu$ всегда считаются строго положительными.

Определим функцию $k(t,x)$, полагая

$$k(t,x) = \frac{1}{\nu\sqrt{\alpha}} K_\nu(t,x),$$

где $K_\nu(t,x)$ — функция (21) из [1]. Положим также

$$k^{jk}(t,x) = \frac{1}{\nu\sqrt{\alpha}} K_\nu^{jk}(t,x),$$

где $K_\nu^{jk}(t,x)$ — функция (17) из [1]. Символом $\mathbf{k}(t,x)$ обозначим матрицу $(k^{jk}(t,x))_{0\le j,k\le 4}$. Подчеркнем, что здесь мы несколько отходим от обозначений п. 7 статьи [1], в которой функция $k(t,x)$ определялась выражением $\frac{1}{\nu}K_\nu(t,x)$, а $k^{jk}(t,x)$ — выражением $\frac{1}{\nu}K_\nu^{jk}(t,x)$. Таким образом, вновь введенные функция $k(t,x)$ и матричная функция $\mathbf{k}(t,x)$ отличаются от прежних функций, введенных и обозначенных в [1] теми же символами, множителем $1/\sqrt{\alpha}$. Указанные изменения несущественно изменяют форму записи основных формул и уравнений статьи [1], являющихся предметом рассмотрений настоящей статьи, и производятся с единственной целью согласования физического смысла величин $\nu, \eta, \alpha, b$ и связанных с ними величин, входящих в акустические уравнения Пайерлса, с их физическими размерностями.

В этих новых обозначениях уравнение (13) из [1] является частным случаем при значении параметра $b = \nu\sqrt{\alpha}$ уравнения

$$n = b\hat{k}n + J, \tag{1.1}$$

а уравнение (20) [1] — частным случаем при том же значении параметра $b$ уравнения

$$\mathscr{N} = b\hat{\mathbf{k}}\mathscr{N} + \mathbf{I}, \tag{1.2}$$

где $\hat{k}$, $\hat{\mathbf{k}}$ — операторы свертки по переменным $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ функций $k$, $\mathbf{k}$ с распределениями (обобщенными функциями) $n$, $\mathscr{N}$ соответственно. Если распределение фазовой плотности источников $j(t,x,v)$ в линеаризованном уравнении Больцмана (6) [1] не зависит от переменной $v \in \mathbb{R}^3$ и представляется в виде прямого произведения распределений $j(t,x,v) = \sqrt{\alpha} f(t,x) \times 1(v)$, где $f(t,x)$ —

распределение из $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, медленно растущих распределений на пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, $1(v)$ — регулярное единичное распределение, то уравнение (1.1) можно записать в виде

$$n = b\hat{k}n + \hat{k}f. \tag{1.3}$$

Аналогичным если распределение источников $j(t,x,v)$ представляется в виде

$$j(t,x,v) = \sqrt{\alpha}\sum_{m=0}^{4} f_m(t,x)\times e_m(v),$$

где $e_m(v)$ — регулярное распределение, порожденное функцией $e_m(v)$ ((14) из [1]), $f_m(t,x)$ — произвольное распределение из пространства $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, $m=0,1,\dots 4$, $\times$ — знак прямого произведения распределений, то уравнение (1.2) можно записать в виде

$$\mathscr{N} = b\hat{\mathbf{k}}\mathscr{N} + \hat{\mathbf{k}}F, \tag{1.4}$$

где $F = F(t,x) = (f_0(t,x), f_1(t,x),\dots,f_4(t,x))\uparrow$ — 5-мерный вектор-столбец распределений $f_j(t,x)$ медленного роста.

Из уравнения (6) [1] можно получить еще одну представляющую интерес систему сверточных уравнений размерности 4. Именно, выбирая в качестве проектора $P$ оператор проекции на 4-мерное подпространство пространства $\mathfrak{L}$, порожденное векторами $e_0$, $e_1$, $e_2$, $e_3$, и пользуясь теми же процедурами, при помощи которых были выведены уравнения (13), (20) [1] и (1.1)–(1.4), получим четырехмерную сверточную систему уравнений вида (1.2), (1.4). Матричный размерности $4\times 4$ оператор свертки этой четырехмерной системы получается вычеркиванием в матричном операторе $\hat{\mathbf{k}}$ размерности $5\times 5$ системы (1.4) последней строки и последнего столбца. Мы будем пользоваться для указанных 5-мерной и 4-мерной систем одинаковыми обозначениями вида (1.2), (1.4), указывая лишь на размерность рассматриваемой системы. Для краткости обсуждаемые скалярное (т. е. одномерное) и многомерные размерности 4 и 5 уравнения Пайерлса (1.3) и (1.4) соответственно будем называть *акустическими скалярным* и *векторными* или *многомерными* (размерности 4 и 5) *уравнениями Пайерлса в максвелловском газе*, подчеркивая в случае необходимости, что записаны эти уравнения в так называемой интегральной форме. Возможность записи скалярного уравнения (1.3) в дифференциальной форме обоснована в [1, п. 9] и в новых обозначениях, указанных выше, его можно записать в следующем виде:

$$\widehat{B}n - bn = 0, \tag{1.5}$$

где $\widehat{B}$ — оператор свертки с распределением

$$B(t,x) = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\Phi(k(t,x))}\right),$$

$\Phi$, $\Phi^{-1}$ — соответственно прямое и обратное преобразования Фурье распределений медленного роста. О возможности аналогичной записи для многомерных уравнений Пайерлса см. ниже замечание 2 к теореме 1.

Замечание. В линейной теории переноса частиц со скалярной фазовой плотностью частиц, аналогия с уравнением Пайерлса которой и скалярным уравнением (1.3) проводилась и подчеркивалась в [1], нет прямых аналогов многомерных уравнений Пайерлса (1.4) акустической теории. Это связано с известным в этом случае различием между линейным и линеаризованным уравнениями Больцмана: первое уравнение обладает одним, а второе — пятью линейно независимыми сумматорными инвариантами (т. е. собственными функциями оператора столкновений, соответствующими нулевому собственному значению) [2].

**2.** Напомним, что *символом сверточного матричного оператора* $\widehat{\mathbf{h}}$ *с ядром* $\mathbf{h}(t,x) = (h^{jk}(t,x))$, матричные элементы которого являются распределениями медленного роста на пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, называется матричное распределение $\Phi^{-1}(\mathbf{h}(t,x);\eta,\xi) = (\Phi^{-1}(h^{jk}(t,x);\eta,\xi))$, матричные элементы которого являются преобразованием Фурье от матричных элементов матрицы-распределения $\mathbf{h}(t,x)$.

**Теорема 1.** *Символ $\mathfrak{K}(\eta,\xi)$ матричного сверточного оператора $\hat{\mathbf{k}}(t,x)$ представляется в виде*

$$\mathfrak{K}(\eta,\xi) = \frac{(2\pi)^4}{\gamma}$$

$$\times\begin{pmatrix} \varphi_0 & -\frac{\xi^1}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{2}}\varphi_1 & -\frac{\xi^2}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{2}}\varphi_1 & -\frac{\xi^3}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{2}}\varphi_1 & -\frac{1}{\sqrt{24}}\varphi_2 \\ -\frac{\xi^1}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{2}}\varphi_1 & \varphi_0-\frac{1}{2}\frac{(\xi^1)^2}{(\xi)^2}\varphi_2 & -\frac{1}{2}\frac{\xi^1\xi^2}{(\xi)^2}\varphi_2 & -\frac{1}{2}\frac{\xi^1\xi^3}{(\xi)^2}\varphi_2 & -\frac{\xi^1}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{12}}\left(2\varphi_1-\frac{1}{2}\varphi_3\right) \\ -\frac{\xi^2}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{2}}\varphi_1 & -\frac{1}{2}\frac{\xi^2\xi^1}{(\xi)^2}\varphi_2 & \varphi_0-\frac{1}{2}\frac{(\xi^2)^2}{(\xi)^2}\varphi_2 & -\frac{1}{2}\frac{\xi^2\xi^3}{(\xi)^2}\varphi_2 & -\frac{\xi^2}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{12}}\left(2\varphi_1-\frac{1}{2}\varphi_3\right) \\ -\frac{\xi^3}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{2}}\varphi_1 & -\frac{1}{2}\frac{\xi^3\xi^1}{(\xi)^2}\varphi_2 & -\frac{1}{2}\frac{\xi^3\xi^2}{(\xi)^2}\varphi_2 & \varphi_0-\frac{1}{2}\frac{(\xi^3)^2}{(\xi)^2}\varphi_2 & -\frac{\xi^3}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{12}}\left(2\varphi_1-\frac{1}{2}\varphi_3\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{24}}\varphi_2 & -\frac{\xi^1}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{12}}\left(2\varphi_1-\frac{\varphi_3}{2}\right) & -\frac{\xi^2}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{12}}\left(2\varphi_1-\frac{\varphi_3}{2}\right) & -\frac{\xi^3}{|\xi|}\frac{i}{\sqrt{12}}\left(2\varphi_1-\frac{\varphi_3}{2}\right) & \varphi_0-\frac{\varphi_2}{3}+\frac{\varphi_4}{24} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

*где* $\gamma = \sqrt{\alpha}(\nu + i\eta)$, $\varphi_j = \varphi_j(v) = v\int\limits_0^\infty s^j e^{-\frac{s^2}{4}} e^{-vs}\,ds$, $j = 0,1,\dots,4$, *— функции* (2.6), *рассмотренные в* [3, § 2, п. 6], $v = \frac{\gamma}{|\xi|}$, $\eta\in\mathbb{R}, \xi\in\mathbb{R}^3$, $i$ *— мнимая единица.*

*Определители $d_4$, $\chi_4$ главных $4\times 4$ миноров матриц*

$$\mathfrak{K}(\eta,\xi), \quad \mathfrak{L}(\eta,\xi) = b\mathfrak{K}(\eta,\xi) - (2\pi)^4 I$$

*соответственно равны*

$$d_4 = (2\pi)^{16}\frac{1}{\gamma^4}\varphi_0^2\left(\varphi_0^2 - \frac{\varphi_2}{2}\varphi_0 + \frac{\varphi_1^2}{2}\right) \tag{1.7}$$

*и*

$$\chi_4 = (2\pi)^{16}\frac{1}{\gamma^4}(\gamma - b\varphi_0)^2\left[(\gamma - b\varphi_0)^2 + b\frac{\varphi_2}{2}(\gamma - b\varphi_0) + b^2\frac{\varphi_1^2}{2}\right]. \tag{1.8}$$

*Определители $d_5$, $\chi_5$ матриц $\mathfrak{K}(\eta,\xi)$ и $\mathfrak{L}(\eta,\xi)$ равны соответственно*

$$\begin{aligned} d_5 = (2\pi)^{20}\frac{1}{\gamma^5}\varphi_0^2\Bigg[\varphi_0^3 - \left(5\varphi_2 - \frac{\varphi_4}{4}\right)\varphi_0^2 + \frac{1}{6}\Bigg(5\varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_3 + \frac{3}{4}\varphi_2^2 - \frac{1}{8}\varphi_2\varphi_4 \\ + \frac{1}{8}\varphi_3^2\Bigg)\varphi_0 + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \frac{1}{8}\varphi_1^2\varphi_4 + \frac{1}{8}\varphi_2^3\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{1.9}$$

*и*

$$\begin{aligned} \chi_5 = -(2\pi)^{20}\frac{1}{\gamma^5}(\gamma - b\varphi_0)^2\Bigg[(\gamma - b\varphi_0)^3 + \frac{b}{6}\left(5\varphi_2 - \frac{\varphi_4}{4}\right)(\gamma - b\varphi_0)^2 \\ + \frac{b^2}{6}\left(5\varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_3 + \frac{3}{4}\varphi_2^2 - \frac{1}{8}\varphi_2\varphi_4 + \frac{1}{8}\varphi_3^2\right)(\gamma - b\varphi_0) \\ - \frac{b^3}{6}\left(-\frac{1}{4}\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \frac{1}{8}\varphi_1^2\varphi_4 + \frac{1}{8}\varphi_2^3\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

*Всюду в формулах* (1.7)–(1.10) *принято* $v = \frac{\gamma}{|\xi|}$, $\varphi_j = \varphi_j(v) = \varphi_j\bigl(\frac{\gamma}{|\xi|}\bigr)$, $j = 0, 1 \dots, 4$.

*Символ* $\mathfrak{K}(\eta, \xi)$ *допускает голоморфное продолжение в область*

$$\mathbb{C} \times \Xi = \{(\eta + i\theta, \xi + i\zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3 \mid \xi^2 - \zeta^2 > 0\} \subseteq \mathbb{C}^4$$

*комплексных значений аргументов* $\eta$, $\xi$.

Если воспользоваться выражениями функций $\varphi_j(v)$ через функцию $\varphi_0(v)$, представленными в [3, § 2, п. 3, формулы (2.9)], то выражения (1.7)–(1.10) можно записать соответственно в виде

$$d_4 = (2\pi)^{16} \frac{1}{\gamma^4} 2v^2 \varphi_0^2 (1 - \varphi_0), \tag{1.7$'$}$$

$$\begin{aligned} \chi_4 = (2\pi)^{16} \frac{1}{\gamma^4} (\gamma - b\varphi_0)^2 \bigl[(\gamma - b\varphi_0)^2 + b((1 + 2v^2)\varphi_0 - 2v^2))(\gamma - b\varphi_0) \\ + 2b^2 v^2 \bigl(\varphi_0^2 - 2\varphi_0 + 1\bigr)\bigr], \end{aligned} \tag{1.8$'$}$$

$$d_5 = -(2\pi)^{20} \frac{1}{\gamma^5} \frac{1}{3} v^2 \varphi_0^2 (4\varphi_0^2 - (5 + 2v^2)\varphi_0 + 2v^2), \tag{1.9$'$}$$

$$\chi_5 = (2\pi)^{20} \frac{1}{\gamma^5} (\gamma - b\varphi_0)^2 \left[(\gamma - b\varphi_0)^3 + \sum_{j=0}^{2} C_j(v)(\gamma - b\varphi_0)^j\right], \tag{1.10$'$}$$

где

$$\begin{gathered} C_0(v) = -\frac{b^3}{6} \bigl[(1 + 4v^2)\varphi_0^3(v) + 2v^2(1 - 6v^2)\varphi_0^2(v) + 2v^2(-1 + 6v^2)\varphi_0(v) - 4v^2)\bigr], \\ C_1(v) = \frac{2b^2}{3} v^2 \bigl[(2 - 2v^2)\varphi_0^2(v) + (-5 + 4v^2)\varphi_0(v) + (3 - 2v^2)\bigr], \\ C_2(v) = \frac{b}{6} \bigl[(7 + 8v^2 - 4v^4)\varphi_0(v) + 2v^2(-5 + 2v^2)\bigr]. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Уравнения

$$\chi_1(\eta, \xi) = \gamma - b\varphi_0 \left(\frac{\gamma}{|\xi|}\right) = 0, \tag{1.12}$$

$$\chi_4(\eta, \xi) = 0, \quad \chi_5(\eta, \xi) = 0, \tag{1.13}$$

где $\gamma = \sqrt{\alpha}(\nu + i\eta)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $\chi_4(\eta, \xi)$, $\chi_5(\eta, \xi)$ — выражения (1.8), (1.10) (или (1.8$'$), (1.10$'$)) соответственно относительно переменных $\eta$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, определяют дисперсионные соотношения для уравнений Пайерлса (1.4) размерности 1, 4 и 5 соответственно. Свойства этих соотношений в существенном определяют характер разрешимости и свойства решений соответствующих им уравнений Пайерлса в пространствах распределений медленного роста. В физической интерпретации дисперсионные соотношения определяют зависимость скорости распространения монохроматического возмущения от его частоты (или зависимость частоты такого возмущения от его волнового вектора).

Замечание 1. Строение символа оператора $\mathfrak{K}$ выявляет одну из особенностей акустического уравнения Пайерлса (1.4) (а также соответствующих ему уравнений в размерностях 1, 4), состоящую в том, что хотя с физической точки зрения и не вызывает сомнения, что уравнение (1.4) описывает некоторый диссипативный процесс в пространстве, импеданс уравнения (1.4) не определен естественным образом как голоморфная функция в трубе над каким-либо острым выпуклым конусом в пространстве переменных $\eta$, $\xi$. Это связано с тем, что носитель распределения $\mathbf{k}(t, x)$ заполняет целиком все полупространство $t > 0$ и динамика процессов, которые описываются указанными уравнениями, допускает сколь угодно большие скорости распространения возмущений. Это значит, что к уравнению (1.4) непосредственно не применимы известные методы и результаты теории сверточных систем уравнений математической физики, пассивных относительно какого-либо выпуклого пространственно-временного острого конуса. Некоторые соображения в пользу того, что указанное обстоятельство не является здесь критическим и что задача Коши для достаточно широкого класса гиперповерхностей и начальных данных для уравнения (1.4) должна быть регулярно разрешима, состоят в следующем. Как указывалось в [1], если исходить при той же схеме линеаризации из релятивистского варианта уравнения переноса (релятивистского уравнения Больцмана, см., например, [4]) и релятивистский вариант распределения Максвелла (равновесного распределения Юттнера), то в том же сумматорном приближении получим в размерности 5 аналогичное (1.4) уравнение, сверточное ядро которого имеет носитель внутри острого выпуклого телесного конуса. Указанный острый конус распространения не связан с акустическими процессами, а определяется ограничением на тепловую скорость молекул скоростью светового сигнала $c$, которое заложено в характеристики исходного релятивистского уравнения переноса. Несмотря на значительное усложнение аналитических выражений для ядра и связанных с ним функций и характеристик, в сравнении с тем, что имеет место для уравнения (1.4), в этом случае усматривается наличие свойств пассивности обсуждаемой системы относительно указанного светового конуса и возможно использование известных методов теории линейных сверточных систем, пассивных относительно некоторого острого конуса, для решения задачи Коши [5]. После установления (весьма вероятной) регулярной разрешимости задачи Коши в последнем случае можно рассчитывать на положительное решение аналогичного вопроса и для уравнения (1.4), рассматривая этот случай как предельный при $c \to \infty$.

Замечание 2. Вопрос о возможности записи многомерного уравнения Пайерлса, представленного в интегральной форме (1.4), в дифференциальной форме, аналогичной записи (1.5) скалярного уравнения (1.3), сводится, очевидно, к вопросу о существовании и принадлежности матричной функции $(\mathfrak{K}(\eta, \xi))^{-1}$ (обратной к матричному символу $\mathfrak{K}(\eta, \xi)$) классу матричных распределений медленного роста на пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Последнее означает, что все матричные элементы матрицы $(\mathfrak{K}(\eta, \xi))^{-1}$ должны быть распределениями медленного роста на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Для уравнения Пайерлса (1.4) размерности 4 на основании результатов настоящей статьи нетрудно устанавливается, что матричная функция $(\mathfrak{K}(\eta, \xi))^{-1}$ принадлежит классу распределений медленного роста и, следовательно, в этом случае уравнение Пайерлса записывается в дифференциальной форме. Однако поскольку для пятимерного уравнения решение этого вопроса требует дополнительных достаточно основательных рассмотрений, полное его решение будет представлено автором в последующих публикациях.

**3.** В следующей теореме описывается многообразие всех вещественных корней дисперсионного соотношения (1.12) для скалярного уравнения Пайерлса (1.3). Именно, рассматривается неявное уравнение относительно вещественных переменных $\eta \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^3$:

$$1 - \frac{b}{\gamma}\varphi_0\left(\frac{\gamma}{|\xi|}\right) = 1 - b\mathscr{K}^0(\eta,\xi) = 1 - b\frac{\sqrt{\pi}}{|\xi|}e^{-\gamma^2/\xi^2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma}{|\xi|}\right) = 0, \qquad (1.14)$$

где

$$\mathscr{K}^0(\eta,\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{|\xi|}e^{-\frac{\gamma^2}{|\xi|^2}}\operatorname{erfc}\frac{\gamma}{|\xi|},$$

$\gamma = \sqrt{\alpha}(\nu + i\eta)$, $b = \sqrt{\alpha}\sigma$; $\nu$, $\sigma$ — некоторые произвольные фиксированные положительные числа.

**Теорема 2.** (i) *При заданных $\nu$, $\sigma$, $0 < \sigma < \nu$, уравнение* (1.14) *не имеет вещественных корней.*

(ii) *При заданных $\nu$, $\sigma$, $0 < \nu \leq \sigma$, многообразие $S_{\nu,\sigma}$ всех его вещественных корней $(\eta,\xi)$ в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ состоит из точек $\{(\eta,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \mid \eta = 0,\ |\xi| = \rho(\nu,\sigma)\}$, где $\rho(\nu,\sigma)$ — единственный вещественный неотрицательный корень уравнения*

$$1 - b\frac{\sqrt{\pi}}{\rho}e^{\frac{-\nu^2\alpha}{\rho^2}}\operatorname{erfc}\left(\frac{\nu\sqrt{\alpha}}{\rho}\right) = 0, \quad \rho \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty). \qquad (1.15)$$

**Следствие.** *При $0 < \sigma < \nu$ функция $\mathscr{J}^{(0)}(\eta,\xi) = \frac{\mathscr{K}^{(0)}(\eta,\xi)}{1-b\mathscr{K}^{(0)}(\eta,\xi)}$ является $C^\infty$-дифференцируемой функцией на всем пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ изменения переменных $(\eta,\xi)$.*

*При $0 < \nu \leq \sigma$ функция $\mathscr{J}^{(0)}(\eta,\xi)$ является $C^\infty$-дифференцируемой функцией всюду в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ вне многообразия $S_{\nu,\sigma}$. При стремлении точки $(\eta,\xi)$ к любой точке многообразия $S_{\nu,\sigma}$ функция $|\mathscr{J}^{(0)}(\eta,\xi)|$ стремится к $\infty$.*

*При всех $\sigma,\nu > 0$ функция $\mathscr{J}^{(0)}(\eta,\xi)$ — локально интегрируемая на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ функция, убывающая к нулю на бесконечности как $O(\sqrt{\eta^2+\xi^2})$.*

*Функция $\mathscr{J}_0^{(0)}(\eta,\xi) = \lim\limits_{\lambda\to\infty,\lambda>0}\lambda\mathscr{J}^{(0)}(\lambda\eta,\lambda\xi)$ совпадает с функцией $\mathscr{K}_0(\eta,\xi)$ из утверждения* 2 [1].

Замечание 1. Корневое многообразие $S_{\nu,\sigma}$ уравнения (1.14) пусто при $\nu > \sigma$ сводится к одной точке при $\nu = \sigma$, и представляет собой двумерную сферу радиуса $\rho(\nu,\sigma)$, лежащую в гиперплоскости $\eta = 0$ при $\nu < \sigma$. Это означает, что у уравнения (1.12), являющегося дисперсионным соотношением для скалярного уравнения Пайерлса (48) из [1]), нет вещественных трехмерных листов решений вида $\eta = F(\xi)$ (или, как говорят, вещественных мод). Нет таких вещественных мод и у дисперсионного соотношения, соответствующего главному символу указанного уравнения Пайерлса (это вытекает из заключительного утверждения последнего следствия и положения (iii) утверждения 2 [1]). Значит, скалярное акустическое уравнение Пайерлса (1.5) на ненулевых частотах не имеет решений типа однородных (т. е. постоянной амплитуды) плоских волн.

**4.** В теореме 3 этого пункта определяются асимптотики в сингулярной и бесконечно удаленной точках слагаемых потенциалов в представлении (33)–(35) (в исправленной записи приведенной ниже) [1] фундаментального скалярного акустического потенциала Пайерлса (САПП) и устанавливается единственность решения обратной задачи САПП на произвольной ненулевой заданной частоте в классе всех финитных распределений источников.

Обратимся к формулам (33)–(35) статьи [1], дающим интегральное представление монохроматического САПП $Q(\eta,x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, при заданной частоте

$\eta$. Отметим вначале, что формула (33) указанной статьи записана неверно, а именно в ней отсутствует необходимый множитель $1/4\pi|x|$ при интегральном выражении второго слагаемого в правой части. Правильная формула представления имеет следующий вид:

$$Q(\eta, x) = A(\gamma)\frac{e^{-|x|/W(\gamma)}}{4\pi|x|} + \frac{1}{4\pi|x|}\int\limits_0^\infty \zeta(\eta, s)e^{-\gamma|x|s}\,ds \tag{1.16}$$

при $\gamma = \sqrt{\alpha}(\nu + i\eta) \in S_i^\sigma$, где $\zeta(\eta, s)$ — функция (34) из [1]. Доказательство теоремы 1 [1] посвящено обоснованию именно этой, правильно записанной формулы (1.16). Всюду далее без оговорок будут использоваться обозначения и результаты п. 7 (с приведенной поправкой формулы (33)) и приложения статьи [1]. Следует заметить, что переход от основного ядра $k(t, x)$, использовавшегося в [1], к новому основному ядру настоящей статьи (см. п. 1 выше) не вносит никаких изменений в аналитические выражения (34), (35) [1] и (1.16), что легко усматривается из способа образования ядра $\mathscr{J}_\sigma(t, x)$ и его символа $\mathscr{I}_\sigma(\eta, \xi)$ (см. [1, п. 7, 9 и формулировку теоремы 1]).

Положим $Q_m(\eta, x) = \frac{e^{-|x|/W(\gamma)}}{4\pi|x|}$, $\gamma = \sqrt{\alpha}(\nu+i\eta)$, и при фиксированном $\eta \in \mathbb{R}$ рассмотрим функцию $Q(\eta, x)$ как ядро сверточного потенциала на пространстве $\mathbb{R}^3$. Аналогичным образом при любых фиксированных $\eta, \nu, \sigma \in \mathbb{R}$ с $\gamma \in S_i^\sigma \cup S_e^\sigma$ рассмотрим функцию $Q_c(\eta, x)$, определенную формулой

$$Q_c(\eta, x) = \frac{1}{4\pi|x|}\int\limits_0^\infty \zeta(\eta, s)e^{-\gamma|x|s}\,ds, \tag{1.17}$$

где $\zeta(\eta, s)$ — функция (34) из [1]. Тройку вещественных чисел $\eta, \nu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\nu, \sigma > 0$, назовем *критической*, если комплексное число $\gamma = \sqrt{\alpha}(\nu + i\eta)$ принадлежит границе области $S_i^\sigma$ (см. [1, приложение]). Для критических троек $(\eta, \nu, \sigma)$ представление САПП (1.16), а также ряд других свойств САПП теряют силу [1, с. 854, 855]. Тройки чисел $(\eta, \nu, \sigma)$, $\eta, \sigma > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$, не являющихся критическими, называем *регулярными тройками*; таким образом, для регулярной тройки $(\eta, \nu, \sigma)$ число $\gamma$ принадлежит области $S_i^\sigma \cup S_e^\sigma$ [1].

Отметим, что поскольку функция $1/W(\gamma) = (\operatorname{sgn}\eta)\tau(\gamma)$ определена как непрерывная функция на замкнутой области $\overline{S}_i^\sigma$ (см. предложение (C) утверждения 1 и начало п. 14 в [3]), то ядро $Q_m(\eta, x)$ можно по непрерывности доопределить для всех, в том числе и критических, троек $(\eta, \nu, \sigma)$ с $\gamma \in \overline{S}_i^\sigma$. Будем считать, что ядро $Q_m(\eta, x)$ определено таким образом для всех указанных троек. Доопределение ядра $Q_c(\eta, x)$ для критических троек $(\eta, \nu, \sigma)$ требует отдельного рассмотрения, и в настоящей статье не производится и не используется.

**Теорема 3.** (A) *Для любой фиксированной тройки $(\eta, \nu, \sigma)$ с $\gamma \in \overline{S}_i^\sigma$ при $|x| \to 0$ справедлива асимптотика $Q_m(\eta, x) \sim \frac{1}{4\pi|x|}$. Если для такой тройки $\eta$ отлично от 0, то ядро $Q_m(\eta, x)$ экспоненциально по $|x|$ убывает к нулю с ростом $|x|$, так что верно соотношение $Q_m(\eta, x) \succ \frac{e^{-2\theta b|x|}}{4\pi|x|}$ (т. е. функция $Q_m(\eta, x)$ убывает к нулю при $|x| \to \infty$ не быстрее функции $U(x) = \frac{e^{-2\theta b|x|}}{4\pi|x|}$), где $\theta$ — число из п.* (E) *утверждения 1 § 2 в* [3]*; при этом если тройка $(\eta, \nu, \sigma)$ не является критической, то $Q_m(\eta, x) \succ\succ U(x)$ при $|x| \to \infty$ (т. е. $Q_m(\eta, x)$ убывает на бесконечности строго медленнее, чем $U(x)$). Для троек вида $(\eta, \nu, \sigma)$ с $\eta = 0$ ядро*

*$Q_m(\eta, x)$ имеет в нуле и на бесконечности характеристики роста (убывания) ядер классических потенциалов Гельмгольца (при $\nu \neq \sigma$) и Кулона (при $\nu = \sigma$).*

(B) *Для любой регулярной тройки $(\eta, \nu, \sigma)$ при $|x| \to 0$ имеем асимптотику*

$$Q_c(\eta, x) \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{2\pi |x|^2}. \tag{1.18}$$

*Для любой регулярной тройки $(\eta, \nu, \sigma)$ с $(\nu - \sigma)^2 + \eta^2 \neq 0$ при $|x| \to \infty$ имеем асимптотику*

$$Q_c(\eta, x) \sim \frac{1}{\pi \sqrt[3]{2}} \sqrt{\frac{\alpha}{3}} \frac{\gamma^{7/3}}{(\gamma - b)^2} \frac{e^{-\delta \gamma^{2/3} |x|^{2/3}}}{|x|^{5/3}} (1 + O(|x|^{-2/3})), \tag{1.19}$$

*а при $\nu = \sigma$, $\eta = 0$, $|x| \to \infty$ — асимптотику*

$$Q_c(\eta, x) \sim \frac{2^{1/3}}{\pi \sqrt{3}} \alpha^{4/3} \nu^{5/3} \frac{e^{-\delta \alpha^{1/3} \nu^{2/3} |x|^{2/3}}}{|x|^{1/3}} (1 + O(|x|^{-2/3})). \tag{1.20}$$

*Для любой регулярной тройки $(\eta, \nu, \sigma)$ ядро $Q_c(\eta, x)$ и для любой такой тройки $(\eta, \nu, \sigma)$ с $\gamma \in S_i^\sigma$ ядро $Q_m(\eta, x)$ являются вещественно-аналитическими вне точки $x = 0$ и убывающими к нулю на бесконечности функциями переменной $x \in \mathbb{R}^3$.*

(C) *Обратная задача потенциала для сверточного потенциала Пайерлса $Q(\eta, x)$ (в формулировке [6, п. 15]) на любой фиксированной частоте $\eta \neq 0$ имеет единственное решение в классе всех финитных распределений источников.*

Хотя вопрос об условиях и пространственных областях доминирования потенциалов $Q_m(\eta, x)$ и $Q_c(\eta, x)$ в формировании полного скалярного акустического поля $Q(\eta, x)$ при различных соотношениях параметров тройки $(\eta, \nu, \sigma)$ достаточно сложен, из формул (1.18)–(1.20) ясно, что при очень малых и очень больших величинах $|x|$ доминирует потенциал $Q_c(\eta, x)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Кирейтов В. Р.* Многоскоростной потенциал Пайерлса в задаче уточнения классического фундаментального акустического потенциала вблизи источника звука в однородном максвелловском газе // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 834–860.
2. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
3. *Кирейтов В. Р.* Дисперсионные соотношения для многомерных акустических уравнений Пайерлса и некоторые свойства скалярного акустического потенциала Пайерлса. II // Сиб. мат. журн. (в печати).
4. *де Гроот С., ван Леувен В., ван Верт Х.* Релятивистская кинетическая теория. М.: Мир, 1983.
5. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
6. *Кирейтов В. Р.* Свойства хантовости и однозначной разрешимости обратной задачи теории потенциала для одного класса обобщенных потенциалов Юкавы // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 851–874.


*Статья поступила 17 февраля 2000 г.*

*Кирейтов Валерий Рашидович*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090*
vrkrv@math.nsc.ru