Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.926.7+519.614.4

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

С. К. Годунов, М. Садкане

Аннотация: Предлагается алгоритм преобразования вещественной симплектической матрицы с устойчивой структурой в блочно-диагональную, состоящую из трех главных блоков. Два крайних блока одного размера и ассоциированы соответственно с собственными значениями, лежащими вне и внутри единичного круга. Кроме того, эти собственные значения симметричны относительно единичной окружности. Центральный блок состоит из нескольких диагональных блоков, собственные значения которых находятся в единичном круге и удовлетворяют модифицированному критерию Крейна — Гельфанда — Лидского. Предложенный алгоритм дает также качественный критерий структурной устойчивости. Ил. 7, библиогр. 14.

1. Введение

Пусть J — кососимметрическая вещественная невырожденная $2N \times 2N$-матрица. Вещественная матрица W называется *J-симплектической*, если $W^*JW = J$. Говорят, что собственное значение λ матрицы W, модуль которого равен 1, *первого* (*второго*) типа, если $(iJx, x) > 0$ $((iJx, x) < 0)$ для всех векторов $x \in \mathrm{Ker}(W - \lambda I)$, где $i = \sqrt{-1}$ и $(.,.)$ — евклидово скалярное произведение. Если $(Jx, x) = 0$, то говорят, что λ *смешанного типа*.

Симплектические матрицы появляются по крайней мере в двух активно развиваемых направлениях — теории оптимального управления [1, 2] и теории параметрического резонанса механических систем [3, 4]. Симплектические матрицы, возникающие в указанных областях, имеют разное расположение спектров. В теории оптимального управления собственные значения, как правило, не лежат на единичной окружности. Тем самым важно построить базисы в инвариантных подпространствах, ассоциированных с собственными значениями внутри и вне единичного круга. В теории параметрического резонанса все собственные значения находятся на единичной окружности, и в этом случае согласно теореме М. Г. Крейна [3, гл. 3, § 1] спектр может быть разбит на две части, состоящие из собственных значений первого и второго типов. Различие между значениями первого и второго типов важно для исследования устойчивости параметрического резонанса в механических системах. В этом случае система устойчива (или матрица W обладает устойчивой структурой) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) все собственные значения матрицы W находятся на единичной окружности;

2) собственные значения W либо первого, либо второго типа;

3) собственные значения первого типа и второго типа хорошо отделены.

Эти три условия установлены М. Г. Крейном, И. М. Гельфандом и В. Б. Лидским (КГЛ-критерий). Подробно этот критерий и алгебраические свойства симплектических матриц изложены в монографии В. А. Якубовича и В. М. Старжинского [3, гл. 3, § 3]. Некоторые модификации КГЛ-критерия предложены в [5, 6].

Интересная дискуссия в [3] развивается вокруг классификации общих симплектических матриц с устойчивой структурой, т. е. симплектических матриц с собственными значениями λ такими, что $|\lambda| > 1$, $|\lambda| = 1$ и $|\lambda| < 1$.

Говорят, что симплектическая матрица W *устойчива* или, точнее, *структура* W *устойчива*, если W переходит в матрицу $\widetilde{W} = W + \Delta$, где Δ — малое возмущение матрицы такое, что $\widetilde{W}$ остается симплектической и выполнены следующие условия:

1) углы между тремя инвариантными подпространствами, ассоциированными с собственными значениями λ матрицы $\widetilde{W}$ такими, что $|\lambda| > 1$, $|\lambda| = 1$ и $|\lambda| < 1$, остаются большими;

2) собственные значения $\widetilde{W}$, находящиеся на единичной окружности ($|\lambda| = 1$), либо первого, либо второго типа и углы между двумя соответствующими инвариантными подпространствами остаются большими.

Замечание 1. Симплектические матрицы с устойчивой структурой можно охарактеризовать количеством точек спектра на единичной окружности и порядком расположения на ней собственных значений разного типа (см. [3, гл. III, § 5]).

Замечание 2. Если симплектические матрицы W_1 и W_2 имеют устойчивую структуру и у них одинаковое число и одинаковый порядок размещения собственных значений первого и второго типов на единичной окружности, то можно перейти от W_1 к W_2 с помощью непрерывного преобразования, сохраняющего устойчивость. Иначе говоря, существует семейство симплектических матриц $W(t)$, $t \in [0, 1]$, непрерывное по t и такое, что $W(0) = W_0$ и $W(1) = W_1$ (см. [3, гл. III, § 5]).

Некоторые канонические формы симплектических матриц и пучков таких матриц (Шура, Жордана, Кронекера) обсуждались с теоретических позиций в [7, 8].

Наша статья посвящена численному нахождению канонической формы симплектических матриц. Мы предлагаем алгоритм, основанный на известном QR-алгоритме [9, 10], который преобразует общую симплектическую матрицу с устойчивой структурой в блочно-диагональную такую, что у каждого блока собственные значения принадлежат только одной из трех категорий: λ с $|\lambda| > 1$, $|\lambda| < 1$, $|\lambda| = 1$. В свой очередь, блоки с $|\lambda| = 1$ подразделяются на новые блоки в соответствии с классами отвечающих им λ.

Используемая нами классификация собственных значений на единичной окружности описана в конце разд. 2. Она несколько отличается от предложенной М. Г. Крейном и приводит к модифицированной формулировке критерия КГЛ, эквивалентной первоначальной. Модифицированный критерий КГЛ применяется для классификации точек спектра с $|\lambda| = 1$. Предлагаемый алгоритм дает тип структуры (устойчива она или нет), а также количественный критерий качества устойчивости. Часть этой работы была представлена в [11].

В разд. 2 кратко напоминаются основные свойства симплектических матриц. В разд. 3 приводится наш алгоритм определения устойчивости структуры симплектических матриц и обсуждаются некоторые детали реализации. В разд. 4 мы иллюстрируем работу предложенного алгоритма на некоторых тестовых примерах.

Всюду в этой работе используются следующие обозначения. 2-Норма вектора или матрицы обозначается через $\| \ \|$, скалярное произведение векторов $u, v \in \mathbb{C}^N$ — через $(u, v) = v^* u$, след (определитель) матрицы A — через $\mathrm{tr}(A)$ $(\det(A))$. Обозначение $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ используется для диагональной матрицы, диагональные элементы которой суть $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если X — матрица порядка N, то ее сингулярные значения нумеруются в порядке возрастания: $\sigma_1(X) \leq \ldots \leq \sigma_N(X)$. Если X невырожденна, то ее обусловленность обозначается через $\kappa(X) = \sigma_N(X)/\sigma_1(X)$. Когда ясно из контекста, J-симплектическая матрица W называется просто симплектической. Векторы $x, y \in \mathbb{C}^{2N}$ J-ортогональны, если $(Jx, y) = 0$. Единичная (нулевая) матрица порядка n будет обозначаться через I_n (0_n) или, если достаточно ясно, через I (0).

2. Некоторые свойства симплектических матриц

Кратко напомним некоторые простые нужные нам свойства, относящиеся к структуре симплектических матриц.

Теорема 2.1. *Пусть $W \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ — J-симплектическая матрица. Тогда выполнены следующие свойства.*

1. *Спектр W может быть разбит на три части:*

(a) *K собственных значений вне единичного круга:*

$$|\lambda_1| > 1,\ |\lambda_2| > 1, \ldots, |\lambda_K| > 1,$$

(b) *K собственных значений внутри единичного круга:*

$$|\lambda_{K+1}| < 1,\ |\lambda_{K+2}| < 1, \ldots, |\lambda_{2K}| < 1,$$

(c) *$2N - 2K$ собственных значений на единичной окружности:*

$$|\lambda_{2K+1}| = 1,\ |\lambda_{2K+2}| = 1, \ldots, |\lambda_{2N}| = 1.$$

2. *Пусть x, y — собственные векторы W, соответствующие собственным значениям λ, μ. Если $\lambda\bar{\mu} \neq 1$, то $(Jx, y) = 0$. В частности, если $|\lambda| \neq 1$, то $(Jx, x) = 0$. Если $(Jx, x) = 0$ для некоторого собственного вектора, отвечающего точке спектра λ, то говорят, что это λ имеет смешанный тип.*

3. *Пусть линейные оболочки столбцов прямоугольных матриц $\mathscr{X} \in \mathbb{C}^{N\times k_1}$, $\mathscr{Y} \in \mathbb{C}^{N\times k_2}$ инвариантны относительно W:*

$$W\mathscr{X} = \mathscr{X}A, \quad W\mathscr{Y} = \mathscr{Y}B.$$

Если $\det(B) \neq 0$ и собственные значения $\lambda_i(A)$ и $\lambda_j(B)$ матриц A и B соответственно таковы, что $\lambda_i(A)\bar{\lambda}_j(B) \neq 1$ для любых i, j, то $\mathscr{X}^* J \mathscr{Y} = 0$.

4. *Матрица $S_0 = \frac{1}{2}J(W - W^{-1})$ симметрическая, и ее удобно использовать при рассмотрении собственных значений $\lambda(W)$ с $|\lambda| = 1$. При этом если $\lambda = e^{i\theta}$, $(e^{i\theta}, x)$ — собственная пара для W и $0 < \theta < \pi$, то*

$$(S_0 x, x) = \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2i}(iJx, x) = \sin\theta(iJx, x).$$

Поэтому $\lambda = e^{i|\theta|}$ при $(S_0 x, x) > 0$ — собственное значение первого типа, тогда как $\lambda = e^{-i|\theta|}$ — второго. При $(S_0 x, x) < 0$, наоборот, $e^{-i|\theta|}$ первого, а $e^{i|\theta|}$ второго типов.

5. *Если* $\lambda = \pm 1$, *т. е. если* $\theta = 0$ *либо* $\theta = \pi$, *то такие собственные значения всегда кратные. При этом одновременно* $(Jx, x) = 0$, $(S_0x, x) = 0$. *По предложению Крейна принято считать, что среди совпадающих собственных значений* $\lambda = 1$ (*или* $\lambda = -1$) *есть как точки спектра первого, так и второго типов.*

6. *Для устойчивости структуры симплектической матрицы, т. е. во всяком случае для сохранения* K *при малых вариациях* W, *необходимо отсутствие на окружности* $|\lambda| = 1$ *смешанных собственных значений, т. е. чтобы собственные значения первого и второго типов были отдалены друг от друга.*

Доказательство легко вытекает из следующих утверждений.

1. $\det(W - \lambda I) = \det(JWJ^{-1} - \lambda I) = \det(W^{-*} - \lambda I) = \det(W^{-1} - \bar{\lambda} I)$.

2. $(Jx, y) = (W^*JWx, y) = (JWx, Wy) = \lambda\bar{\mu}(Jx, y)$.

3. Справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{Y}^*J\mathscr{X})A = B^{-*}(B^*\mathscr{Y}^*)J(\mathscr{X}A) &= B^{-*}(\mathscr{Y}^*W^*)J(W\mathscr{X}) \\
&= B^{-*}\mathscr{Y}^*(W^*JW)\mathscr{X} = B^{-*}(\mathscr{Y}^*J\mathscr{X}).
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получаем однородное уравнение Сильвестра

$$B^{-*}(\mathscr{Y}^*J\mathscr{X}) - (\mathscr{Y}^*J\mathscr{X})A = 0,$$

единственным решением $\mathscr{Y}^*J\mathscr{X}$ которого будет нулевое (единственность следует из того, что $\lambda_i(A)\bar{\lambda}_j(B) \neq 1$ для любых i, j, см. [1]).

4. Равенство $W^*JW = J$ можно записать так: $W^*J = JW^{-1}$. Значит,

$$S_0 = \frac{1}{2}(JW - JW^{-1}) = \frac{1}{2}(JW - W^*J) = \frac{1}{2}(JW + (JW)^*).$$

5. Если, к примеру, 1 — собственное значение W, ассоциированное с вещественным собственным вектором x, то $(Jx, x) = x^*Jx = (x^*Jx)^* = -x^*Jx = -(Jx, x)$. Таким образом, $(Jx, x) = 0$, и W не может иметь устойчивой структуры. Пусть $W = UTU^*$ — факторизация по Шуру матрицы W унитарной U и верхнетреугольной $T = \begin{pmatrix} 1 & t^* \\ 0 & T' \end{pmatrix}$, где $t \in \mathbb{R}^{2N-1}$, $T' \in \mathbb{R}^{(2N-1)\times(2N-1)}$. Тогда $U^*JU = U^*(W^*JW)U = (WU)^*J(WU) = (UT)^*J(UT) = T^*(U^*JU)T$. Если мы представим U^*JU в виде $U^*JU = \begin{pmatrix} 0 & j^* \\ -j & J' \end{pmatrix}$ с $j \in \mathbb{R}^{2N-1}$, $J' \in \mathbb{R}^{(2N-1)\times(2N-1)}$, то из выражения для T и равенства $U^*JU = T^*(U^*JU)T$ получим, что $T'^*j = j$. Таким образом, 1 — собственное значение и для T'. Поэтому 1 — не менее чем двукратная точка спектра у W.

Содержание первых двух пунктов теоремы 2.1 составляет теорему Пуанкаре (см. [3]). Третий является очевидным обобщением второго. В частности, все собственные значения, не находящиеся на единичной окружности, относятся к смешанному типу, т. е. $(Jx, x) = 0$ для любого собственного вектора x, ассоциированного с собственным значением λ таким, что $|\lambda| \neq 1$.

Другим следствием является то, что собственные значения W имеют вид λ, $\bar{\lambda}$, $1/\lambda$ и $1/\bar{\lambda}$ с $\lambda \notin \mathbb{R}$ и $|\lambda| \neq 1$; λ, $1/\lambda$ с $\lambda \in \mathbb{R}$ и λ, $\bar{\lambda}$ с $|\lambda| = 1$ и что два инвариантных подпространства W, ассоциированные с собственными значениями λ и μ, не входящими в ту же группу (a), (b) или (c) и удовлетворяющими неравенству $\lambda\bar{\mu} \neq 1$, J-ортогональны.

Классификация устойчивых структур симплектических матриц, основанная на числе собственных значений, лежащих на окружности $|\lambda| = 1$, и на порядке следования вдоль этой окружности точек спектра различных типов, предложена в 1953 г. В. А. Якубовичем и описана в конце § 5 гл. III книги [3]. Эта классификация как бы завершила серию работ М. Г. Крейна, И. М. Гельфанда и В. Б. Лидского.

Пп. 4, 5 теоремы 2.1 очень важны для оставшейся части работы. Они послужили поводим для формулировки следующего определения.

Определение 2.1. Пусть λ — собственное значение W, по модулю равное 1. Говорят, что λ является *r-собственным значением* (*красным собственным значением*), если $(S_0x, x) > 0$ для любого вектора $x \in \operatorname{Ker}(W - \lambda I)$, и что λ является *g-собственным значением* (*зеленым собственным значением*), если $(S_0x, x) < 0$ для любого вектора $x \in \operatorname{Ker}(W - \lambda I)$.

Это определение исключает собственные значения $\lambda = \pm 1$ и вообще собственные значения λ с $|\lambda| = 1$, для которых существует $x \in \operatorname{Ker}(W - \lambda I)$ такое, что $(S_0x, x) = 0$. Основанная на нем классификация удобнее, чем классификация по типам, так как исключает использование комплексных векторов. Действительно, инвариантное подпространство, ассоциированное с r-собственным значением (g-собственным значением) может быть выбрано вещественным (напомним, что матрица S_0 вещественная и симметрическая). Если через r (g) обозначить число r-собственных значений (g-собственных значений) устойчивой симплектической матрицы W, то $2N - r - g$ будет числом смешанных собственных значений λ матрицы W.

Пп. 4, 5 теоремы 2.1 показывают связь между двумя определениями. Собственное значение λ будет значением первого (второго) типа, если (S_0x, x) имеет постоянный знак на инвариантном подпространстве, ассоциированном с λ. Так будет, если λ не является собственным значением смешанного типа.

Заметим, что матрица S_0 несингулярна, если выполнен КГЛ-критерий. В [5, 6] показано, что КГЛ-критерий, по существу, равносилен положительной определенности некоторой специально построенной симметрической матрицы S, структура которой показывает, что квадратичная форма (S_0x, x) невырожденна, а число обусловленности S (или S_0) служит мерой структурной устойчивости W. Обобщение этого факта будет использовано ниже.

В дальнейшем мы классифицируем точки спектра $\lambda(W)$ лишь с помощью определения 2.1.

Теперь мы можем описать искомый канонический вид. Если W — симплектическая матрица с устойчивой структурой, мы преобразуем ее в блочно-диагональную матрицу, состоящую из трех основных блоков. Два крайних блока одного размера и ассоциированы соответственно с собственными значениями, расположенными вне и внутри единичного круга. Центральный блок соответствует собственным значениям на единичной окружности. Мы разбиваем его, в свою очередь, на несколько диагональных блоков, каждый из которых соответствует собственным значениям одного цвета. Кроме того, два таких последовательных блока всегда соответствуют собственным значениям разных цветов. Детали см. в следующем разделе.

3. Определение канонической формы симплектической матрицы

Пусть W — J-симплектическая матрица порядка $2N$, X — $2N \times K$-матрица, столбцы которой порождают инвариантное подпространство, ассоциированное с собственными значениями, находящимися вне единичного круга (п. (а) в теореме 2.1), Y — $2N \times (2N - 2K)$-матрица, столбцы которой порождают инвариантное подпространство, ассоциированное с собственными значениями на единичной окружности (п. (c)) и Z — $2N\times K$-матрица, столбцы которой порождают инвариантное подпространство, ассоциированное с собственными значениями, расположенными внутри единичного круга (п. (b)). Матрица

$$T_1 = (X \vdots Y \vdots Z) \tag{1}$$

может быть использована для приведения W к клеточно-диагональному виду

$$T_1^{-1} W T_1 = \begin{pmatrix} W_\infty & 0 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 \\ 0 & 0 & W_0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $W_\infty \in \mathbb{C}^{K\times K}$, $W_1 \in \mathbb{C}^{(2N-2K)\times(2N-2K)}$ и $W_0 \in \mathbb{C}^{K\times K}$, а собственные значения W_∞, W_1 и W_0 находятся соответственно вне, на и внутри единичной окружности.

Поясним, как это сделать наиболее простым и надежным способом. Применив QR-алгоритм к W, мы получим блок верхнетреугольного вида

$$P_1^* W P_1 = \begin{pmatrix} W^{(1)} & X_{12} & X_{13} & \dots \\ & W^{(2)} & X_{23} & \dots \\ & & \ddots & \\ & & & W^{(p)} \end{pmatrix} \quad \text{с } P_1 P_1^* = P_1^* P_1 = I. \tag{3}$$

Сделаем два важных замечания относительно вида (3). Для уменьшения сложности QR-алгоритма мы сначала приведем матрицу W к виду Хессенберга H и затем применим QR-алгоритм к H. Известно, что QR-алгоритм сохраняет структуру Хессенберга. Второе замечание относится к блочно-диагональным матрицам $W^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$. На самом деле мы хотели бы получить (3) с дополнительными ограничениями: собственные значения диагональных блоков $W^{(1)}, W^{(2)}, \dots, W^{(p)}$ должны быть пронумерованы в порядке убывания их модулей. Это упорядочение, как правило, достигается, если вместо применения QR-алгоритма непосредственно к матрице Хессенберга H матрицы W сначала применить алгоритм сингулярного разложения [10] к некоторой степени W: $W^p = U\Sigma V^*$, где $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_N, \sigma_{N-1}, \dots, \sigma_1)$ — сингулярные значения W^p, расположенные в порядке возрастания: $\sigma_1 \le \sigma_2 \le \dots \le \sigma_N$, и где U и V — унитарные матрицы, столбцы которых являются соответственно левыми и правыми сингулярными векторами. Удобно получать исходную хессенбергову форму H из V^*WV, а не непосредственно из W (см., например, [12]). Мы считаем (и будем считать в наших численных тестах), что этот предварительный шаг для QR-алгоритма уже проделан.

Предположим, что собственные значения диагональных блоков матрицы $P_1^* W P_1$ расположены по убыванию их модулей. Так как матрица W симплектическая, собственные значения крайних диагональных блоков симметричны относительно единичной окружности (следствие п. 1 теоремы 2.1). Это наблюдение позволяет выделить блоки $W^{(j)}$, собственные значения которых не лежат на единичной окружности. В самом деле, допустим, к примеру, что собственные значения $W^{(1)}$ вне единичной окружности. Тогда согласно теореме Пуанкаре

$$|\det(W^{(1)})| > 1, \quad |\det(W^{(j)})||\det(W^{(p-j+1)})| = 1. \tag{4}$$

В нашей реализации мы с помощью SVD-алгоритма находим сингулярные числа блоков $W^{(j)}$ и пользуемся тем, что модуль определителя равен произведению сингулярных значений. Дальнейшая обработка блоков $W^{(2)}$, $W^{(p-1)}$ и $W^{(3)}$, $W^{(p-2)}, \ldots$ приводит к новому представлению $P_1^* W P_1$ тремя блоками:

$$P_1^* W P_1 = \begin{pmatrix} W_\infty & Y_{12} & Y_{13} \\ & W_1 & Y_{23} \\ & & W_0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где матрицы W_∞ и W_0 одного размера, $|\det(W_\infty)| > 1$, $|\det(W_\infty)||\det(W_0)| = 1$ и $|\det(W^{(m)})| = 1$ для всех диагональных блоков $W^{(m)}$, включенных в W_1.

Матрицы Y_{ij} могут быть удалены из (5) (аннулированы) с помощью классических уравнений Сильвестра. Действительно, предположим, к примеру, что мы хотим удалить Y_{12}. Ищем матрицу Φ в виде

$$\Phi = \begin{pmatrix} I & L & \\ & I & \\ & & I \end{pmatrix}, \tag{6}$$

получаемую заменой диагональных блоков в (5) единичными матрицами того же порядка, Y_{12} — матрицей L, которая будет определена, а остальные блоки — нулевыми. Легко заметить, что

$$\Phi^{-1} P_1^* W P_1 \Phi = \begin{pmatrix} W_\infty & Y_{12}^{(\prime)} & Y_{13}^{(\prime)} \\ & W_1 & Y_{23} \\ & & W_0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

с $Y_{12}^{(\prime)} = W_\infty L - L W_1 + Y_{12}$ и $Y_{13}^{(\prime)} = Y_{13} - L Y_{23}$. Достаточно выбрать L так, что $Y_{12}^{(\prime)} = 0$ (такое возможно, поскольку спектры W_∞ и W_1 не пересекаются [10]). Аналогичная процедура используется для удаления других матриц Y_{ij}, после чего мы приходим к виду (2).

Из теоремы 2.1 (п. 3) вытекает, что

$$X^* J X = 0, \quad X^* J Y = 0, \quad Y^* J Z = 0. \tag{8}$$

Тем самым матрица T_1 преобразует кососимметрическую матрицу J к виду

$$T_1^* J T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -M^* \\ 0 & J_1 & 0 \\ M & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где матрица $J_1 = Y^* J Y$ кососимметрическая и невырожденная, а матрица $M = Z^* J X$ невырожденная (поскольку $0 \neq |\det(T_1^* J T_1)| = |\det(M)|^2 |\det(J_1)|$).

Из (2), (9) и того факта, что W J-симплектическая, легко следует, что матрица W_1 J_1-симплектическая. Собственные значения W_1 имеют вид $\lambda_j = e^{\pm i\varphi_j}$, $0 \leq \varphi_j \leq \pi$, распределим их согласно определению 2.1. Для этого проверим, будет ли симметрическая матрица

$$S_1 = \frac{1}{2} J_1 \bigl(W_1 - W_1^{-1}\bigr) \tag{10}$$

положительно определенной (r-собственные значения), отрицательно определенной (g-собственные значения) или знаконеопределенной (не имеет устойчивой структуры) на инвариантных подпространствах в W_1. Мы преобразуем W_1 и J_1 к блочно-диагональному виду и посмотрим, будут ли соответствующие блоки у S_1 знакоопределенными или нет. Предлагается следующая стратегия. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \frac{1}{2}\Big(I - \frac{1}{2}\big(W_1 + W_1^{-1}\big)\Big), \tag{11}$$

инвариантные подпространства которой те же самые, что и у W_1, но у которой собственные значения суть вещественные положительные числа $\sin^2\frac{\varphi_j}{2}$. Если применить QR-процедуру, то матрица A_1 преобразуется к блочному верхнетреугольному виду

$$A_2 = P_2^* A_1 P_2 \equiv \begin{pmatrix} A_2^{(11)} & A_2^{(12)} & \dots \\ 0 & A_2^{(22)} & \dots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{с } P_2^* P_2 = P_2 P_2^* = I, \tag{12}$$

где диагональные блоки $A_2^{(11)}$, $A_2^{(22)}, \dots$ пронумерованы в порядке возрастания их собственных значений. Инвариантные подпространства, соответствующие этим блокам, содержат инвариантные подпространства, соответствующие одновременно r- и g-собственным значениям. Поэтому непосредственная блочная диагонализация (12) (т. е. удаление $A_2^{(ij)}$, $i \neq j$) даже при благоприятном завершении может не учесть ограничения, связанные со знакоопределенностью блоков у S_1 (см. определение 2.1). Поэтому новое разбиение (12) будет сделано в соответствии с особым правилом, которое мы сейчас и опишем.

Правило группировки блоков. Рассмотрим $(N_2 \times N_2)$-матрицу

$$S_2 = P_2^* S_1 P_2. \tag{13}$$

Как указано в разд. 2, она невырожденна, если выполнен КГЛ-критерий.

Разобьем S_2 на блоки тех же размеров, что и в (12):

$$S_2 = \begin{pmatrix} S_2^{(11)} & S_2^{(12)} & \dots \\ S_2^{(21)} & S_2^{(22)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{14}$$

(блоки $A_2^{(ij)}$ и $S_2^{(ij)}$ одного размера). Рассмотрим проектор на инвариантное подпространство A_2, соответствующее собственным значениям из блока $A_2^{(11)}$. Его можно записать так:

$$\mathscr{P} = \begin{pmatrix} I_m & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где m — размер $A_2^{(11)}$ и M — $m \times (N_2 - m)$-матрица (вид которой знать необязательно). Тогда по закону инерции [10] матрица

$$\mathscr{P}^* S_2 \mathscr{P} = \begin{pmatrix} S_2^{(11)} & S_2^{(11)} M \\ M^* S_2^{(11)} & M^* S_2^{(11)} M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ M^* & I_{N_2 - m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2^{(11)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & M \\ 0 & I_{N-m} \end{pmatrix}$$

имеет $N_2 - m$ нулевых собственных значений и остальные m собственных значений имеют тот же знак, что и собственные значения $S_2^{(11)}$. Таким образом, размерности инвариантных подпространств, ассоциированных с r- и g-собственными значениями (включенными в инвариантные подпространства A_2, ассоциированные с собственными значениями $A_2^{(11)}$) будут известны, если известно количество положительных и отрицательных собственных значений $S_2^{(11)}$. Это соображение служит основой следующего правила.

При изучении главных миноров S_2 мы можем сгруппировать диагональные блоки $S_2^{(jj)}$ таким образом, что число $n_j^{(+)}$ положительных собственных значений и число $n_j^{(-)}$ отрицательных собственных значений главных подматриц

$$\begin{pmatrix} S_2^{(11)} & \dots & S_2^{(1j)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_2^{(j1)} & \dots & S_2^{(jj)} \end{pmatrix} \tag{16}$$

подчиняются условиям:

1) либо $n_j^{(+)} = 0$, либо $n_j^{(-)} = 0$ и $n_j^{(+)} + n_j^{(-)} > 0$;

2) либо $n_{j+1}^{(+)} - n_j^{(+)} = 0$, либо $n_{j+1}^{(-)} - n_j^{(-)} = 0$ и $n_{j+1}^{(+)} + n_{j+1}^{(-)} > n_j^{(+)} + n_j^{(-)}$;

3) если $n_{j+2}^{(\pm)} - n_{j+1}^{(\pm)} = 0$, то $n_{j+1}^{(\mp)} - n_j^{(\mp)} = 0$.

Если после этой группировки диагональные блоки $S_2^{(jj)}$ матрицы S_2 окажутся крупнее, чем таковые в A_2, то соответствующие близлежащие блоки $A_2^{(jj)}$ объединяются. После этого размерность $A_2^{(jj)}$ должна совпадать с размерностью $S_2^{(jj)}$. В процессе группировки блоков мы пользуемся методами последовательностей Штурма для вычисления числа положительных (отрицательных) собственных значений симметрической матрицы, предварительно приведенной к трехдиагональному виду [10, 13].

Если для $j = 1$ будет $n_1^{(+)} = 2N - 2K$ и $n_1^{(-)} = 0$ или $n_1^{(+)} = 0$ и $n_1^{(-)} = 2N - 2K$, то матрица S_2 знакоопределенная. В таком случае канонические формы, ассоциированные с W и J, уже даны в (2) и (9) соответственно.

После завершения описанной группировки матрица (12) будет иметь блочный верхнетреугольный вид, который мы вновь запишем опять, как в (12), где диагональные блоки $A_2^{(jj)}$, $j = 1, 2, \dots$, имеют теперь непересекающиеся спектры и их собственные значения пронумерованы в порядке убывания.

Далее снова применяется диагонализационная процедура Сильвестра к матрице (12). Тем самым матрица A_2 приводится к блочно-диагональному виду

$$T_3^{-1} A_2 T_3 = \begin{pmatrix} A_2^{(11)} & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{(22)} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где T_3 — невырожденная матрица. Из (11) и нового выражения в (12) получим

$$W_1 + W_1^{-1} = P_2 T_3 \begin{pmatrix} 2\bigl(I - 2A_2^{(11)}\bigr) & 0 & 0 \\ 0 & 2\bigl(I - 2A_2^{(22)}\bigr) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} (P_2 T_3)^{-1},$$

или

$$(P_2T_3)^{-1} W_1 (P_2T_3) + ((P_2T_3)^{-1} W_1^{-1} (P_2T_3)) = \begin{pmatrix} 2\bigl(I - 2A_2^{(11)}\bigr) & 0 & 0 \\ 0 & 2\bigl(I - 2A_2^{(22)}\bigr) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

Так как блоки $A_2^{(jj)}$, $j = 1, 2, \ldots$, имеют непересекающиеся спектры, матрица $(P_2T_3)^{-1}W_1(P_2T_3)$ блочно-диагональна:

$$T_3^{-1}P_2^*W_1P_2T_3 = \begin{pmatrix} W_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & W_1^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Блоки $W_1^{(j)}$ и $A_2^{(jj)}$ имеют одинаковый размер. Кроме того, собственные значения блока $W_1^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, имеют вид $e^{\pm i\varphi_k^{(j)}}$, $j = 1, 2 \ldots$, где аргументы $\varphi_k^{(j)}$ пронумерованы в порядке убывания следующим образом: $\varphi_1^{(1)} \geq \varphi_1^{(2)} \geq \ldots > \varphi_2^{(1)} \geq \varphi_2^{(2)} \ldots > \ldots$. Тогда по теореме Пуанкаре [3] имеем

$$T_3^*P_2^*J_1P_2T_3 = \begin{pmatrix} J_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & J_1^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $J_1^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, суть невырожденные кососимметрические матрицы того же размера, что и $W_1^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$. Кроме того, для $j = 1, 2, \ldots$ матрица $W_1^{(j)}$ $J_1^{(j)}$-симплектическая. Матрица S_2 также приводится к блочно-диагональному виду

$$T_3^*S_2T_3 = \begin{pmatrix} S_{10}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & S_{10}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{с } S_{10}^{(i)} = \frac{1}{2}J_1^{(i)}\bigl(W_1^{(i)} - \bigl(W_1^{(i)}\bigr)^{-1}\bigr), \tag{20}$$

и вследствие использованного правила группировки величина $\bigl(S_{10}^{(k)}x, x\bigr)$ фиксированного знака. При этом $\operatorname{sign}\bigl(\bigl(S_{10}^{(k)}x, x\bigr)\bigr) = -\operatorname{sign}\bigl(\bigl(S_{10}^{(k+1)}y, y\bigr)\bigr)$ для всех векторов x и y соответственно в инвариантных подпространствах $W_1^{(k)}$ и $W_1^{(k+1)}$.

Наконец, рассмотрев составное преобразование

$$T = T_1\begin{pmatrix} I_K & 0 & 0 \\ 0 & P_2T_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_K \end{pmatrix}, \tag{21}$$

найдем канонический вид W и J:

$$T^{-1}WT = \begin{pmatrix} W_\infty & & & & \\ & \boxed{W_1^{(1)}} & & & \\ & & \boxed{W_1^{(2)}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & W_0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

и

$$T^*JT = \begin{pmatrix} \boxed{} & & & & -M^* \\ & \boxed{J_1^{(1)}} & & & \\ & & \boxed{J_1^{(2)}} & & \\ & & & \ddots & \\ M & & & & \boxed{} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

С вычислительной точки зрения важно ортонормировать блочные столбцы T, ассоциированные с $W_\infty, W_1^{(1)}, W_1^{(2)}, \dots, W_0$. Пусть

$$T = \big(Q_\infty R_\infty \vdots Q_1^{(1)} R_1^{(1)} \vdots \dots \vdots Q_0 R_0\big),$$

где $Q_i R_i$ — QR-факторизация соответствующего блочного столбца T. Тогда вместо (22) или (23) придем к каноническому виду

$$Q^{-1}WQ = \begin{pmatrix} \widetilde{W}_\infty & & & & \\ & \boxed{\widetilde{W}_1^{(1)}} & & & \\ & & \boxed{\widetilde{W}_1^{(2)}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \widetilde{W}_0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

и

$$Q^* J Q = \begin{pmatrix} \boxed{} & & & & -\widetilde{M}^* \\ & \boxed{\widetilde{J}_1^{(1)}} & & & \\ & & \boxed{\widetilde{J}_1^{(2)}} & & \\ & & & \ddots & \\ \widetilde{M} & & & & \boxed{} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где

$$Q = \big(Q_\infty \vdots Q_1^{(1)} \vdots Q_1^{(2)} \vdots \dots \vdots Q_0\big), \tag{26}$$

$$\widetilde{W}_\infty = R_\infty \widetilde{W}_\infty R_\infty{}^{-1}, \tag{27}$$

$$\widetilde{W}_1^{(j)} = R_1^{(j)} W_1^{(j)} R_1^{(j)}{}^{-1}, \tag{28}$$

$$\widetilde{W}_0 = R_0 W_0 R_0^{-1}, \tag{29}$$

$$\widetilde{M} = R_0^{-*} M R_\infty^{-1}, \tag{30}$$

$$\widetilde{J}_1^{(i)} = \big(R_1^{(i)}\big)^{-*} J_1^{(i)} \big(R_1^{(i)}\big)^{-1}. \tag{31}$$

Вернемся к симметрической матрице $S_0 = \frac{1}{2} J(W - W^{-1})$. Из (24) и (25) имеем

$$S_0 = Q^{-*} \begin{pmatrix} \boxed{} & & & & -\frac{1}{2}\widetilde{M}^*(\widetilde{W}_0 - \widetilde{W}_0^{-1}) \\ & \boxed{\widetilde{S}_{10}^{(1)}} & & & \\ & & \boxed{\widetilde{S}_{10}^{(2)}} & & \\ & & & \ddots & \\ \frac{1}{2}\widetilde{M}(\widetilde{W}_\infty - \widetilde{W}_\infty^{-1}) & & & & \boxed{} \end{pmatrix} Q^{-1}, \tag{32}$$

где

$$\widetilde{S}_{10}^{(j)} = \frac{1}{2} \widetilde{J}_1^{(j)} \big(\widetilde{W}_1^{(j)} - \big(\widetilde{W}_1^{(j)}\big)^{-1}\big), \quad j = 1, 2 \dots . \tag{33}$$

Но

$$-\frac{1}{2}\widetilde{M}^*\big(\widetilde{W}_0 - \widetilde{W}_0^{-1}\big) = \frac{1}{2} R_\infty^{-*} X^* J Z \big(W_0 - W_0^{-1}\big) R_0^{-1}$$
$$= \frac{1}{2} R_\infty^{-*} X^* J (WZ - W^{-1}Z) R_0^{-1} = R_\infty^{-*} X^* S_0 Z R_0^{-1}$$

и

$$\frac{1}{2}\widetilde{M}\big(\widetilde{W}_\infty - \widetilde{W}_\infty^{-1}\big) = \frac{1}{2}R_0^{-*}Z^*JX\big(W_\infty - W_\infty^{-1}\big)R_\infty^{-1}$$
$$= \frac{1}{2}R_0^{-*}Z^*J(WX - W^{-1}X)R_\infty^{-1} = R_0^{-*}Z^*S_0XR_\infty^{-1}.$$

Таким образом,

$$S_0 = Q^{-*}\begin{pmatrix} \boxed{} & & & & R_\infty^{-*}X^*S_0ZR_0^{-1} \\ & \boxed{\widetilde{S}_{10}^{(1)}} & & & \\ & & \boxed{\widetilde{S}_{10}^{(2)}} & & \\ & & & \ddots & \\ R_0^{-*}Z^*S_0XR_\infty^{-1} & & & & \boxed{} \end{pmatrix} Q^{-1}. \tag{34}$$

Если для $j = 1, 2, \ldots$ матрица $\widetilde{S}_{10}^{(j)}$ не является знакоопределенной, то матрица W *не обладает устойчивой структурой*. Если $\widetilde{S}_{10}^{(j)}$ при всех j знакоопределенны, то удобно вместо S_0 рассматривать следующую симметрическую матрицу S, в которой диагональные блоки $\pm\widetilde{S}_0^{(j)}$ строго положительно определенны:

$$S = Q^{-*}\begin{pmatrix} \boxed{} & & & & R_\infty^{-*}X^*S_0ZR_0^{-1} \\ & \boxed{\pm\widetilde{S}_{10}^{(1)}} & & & \\ & & \boxed{\pm\widetilde{S}_{10}^{(2)}} & & \\ & & & \ddots & \\ R_0^{-*}Z^*S_0XR_\infty^{-1} & & & & \boxed{} \end{pmatrix} Q^{-1}, \tag{35}$$

и которая будет ассоциирована с каноническим видом W и J.

Отметим, что если W имеет устойчивую структуру, то обе матрицы S_0 и S невырожденны. В таком случае число обусловленности $\kappa(S_0)$ может быть использовано в качестве критерия структурной устойчивости W [5, 6]. Малое значение $\kappa(S_0)$ указывает на то, что W имеет устойчивую структуру. Это удобный критерий, поскольку матрица S_0 находится без вычисления канонического вида W. Из (34) и (35) получаем

$$S_0S^{-1} = Q^{-*}\mathscr{I}Q^* \tag{36}$$

и

$$S_0^{-1}S = Q\mathscr{I}Q^{-1} \tag{37}$$

с

$$\mathscr{I} = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & \boxed{\pm I} & & & \\ & & \boxed{\pm I} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Легко видеть, что тогда

$$\frac{1}{\kappa^2(Q)} \le \frac{\kappa(S)}{\kappa(S_0)} \le \kappa^2(Q). \tag{39}$$

Наши численные тесты показывают, что три числа обусловленности $\kappa(S)$, $\kappa(S_0)$ и $\kappa(Q)$ ведут себя одинаково в том смысле, что они одновременно большие или маленькие. Хотя это строго и не доказано, мы предлагаем использовать эти условные числа как меру «структурной устойчивости матрицы W».

Итак, качественная информация о структуре канонического вида (22) и (23) может быть получена с помощью матриц

— Q, $\widetilde{M}$, $\widetilde{W}_\infty$, $\widetilde{W}_0$,

— $\widetilde{W}_1^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots,$

— $\widetilde{J}_1^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots,$

и числовых характеристик:

— $s_1^{(j)} = \frac{\mathrm{tr}(W_1^{(j)})}{N_j}$, $j = 1, 2, \ldots$ (среднее арифметическое собственных значений $W_1^{(j)}$),

— знаков блоков $S_{10}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots,$

— условных чисел $\kappa(S_0)$ (или $\kappa(S_1)$) и $\kappa(Q)$, вычисленных в процессе приведения к блочно-диагональному виду.

При $K = 0$, т. е. если $|\lambda_j(W)| = 1$ при всех $j = 1, 2, \ldots, 2N$, критерий КГЛ эквивалентен строгой положительной определенности S, как это уже отмечалось в [5, 6].

Все проведенные нами преобразования и обсуждения можно свести в следующий алгоритм.

Пусть дана J-симплектическая матрица W. Алгоритм 1 либо приведет W к каноническому виду, либо укажет, что W не имеет устойчивой структуры.

Алгоритм 1 (канонический вид W и J).

Шаг 1. Преобразуем W к верхнетреугольному виду посредством QR-алгоритма:

Начало.

Пусть $P_1 = Q_1 = I; A_1 = W; J_1 = J.$

Итерация.

для $j = 1, 2, \ldots, n-1$ **выполняем**

$A_j = Q_{j+1}R_{j+1}$ QR-факторизация

$A_{j+1} = R_{j+1}Q_{j+1} = Q_{j+1}^* A_j Q_{j+1}$

$W_{j+1} = Q_{j+1}^* W_j Q_{j+1}$

$J_{j+1} = Q_{j+1}^* J_j Q_{j+1}$

$P_{j+1} = P_j Q_{j+1}$

конец

Шаг 2. Из W_n и J_n получим вид, данный в (2) и (9).

Шаг 3. Применяя описанное ранее правило группировки блоков к $S_1 = \frac{1}{2}J_1(W_1 - W_1^{-1})$, где W_1 и J_1 суть центральные блоки в (2) и (9) соответственно, проверим, будет ли W иметь устойчивую структуру, и приведем матрицы W_1 и J_1 к блочно-диагональному виду, как в (18) и (19) (или как в (24) и (25)). При этом попутно конструируется матрица S (см. (35)), число обусловленности которой также позволяет оценить степень структурной устойчивости W.

4. Численные тесты

Проиллюстрируем поведение алгоритма 1 на трех различных примерах. Все эксперименты проведены с использованием Matlab.

Пример 1. Начнем со следующей матрицы порядка $N = 12$:

$$\widehat{W} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$\widehat{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Легко проверить, что $\widehat{W}$ $\widehat{J}$-симплектическая. Рассмотрим верхне-двухдиагональную матрицу K порядка N, главная диагональ которой состоит из единиц, а верхняя диагональ — из двоек.

Продемонстрируем поведение алгоритма 1 с матрицами

$$W = K^{-1}\widehat{W}K, \quad J = K^*\widehat{J}K.$$

Матрица W J-симплектическая. Некоторые из характеристик W, J и K таковы: $\|J\| = 7.612$, $\|W\| = 2.55 \cdot 10^3$, $\kappa(K) = 8.13 \cdot 10^3$.

При применении к W и J алгоритм 1 показывает устойчивость структуры W со следующей информацией:

— матрица $\widetilde{M}$:

```
-7.3462e-19  -3.3518e-16  -3.3830e-03
-3.1225e-16   2.0000e+00   5.0001e+00
-3.3829e-03  -5.0000e+00  -2.0000e+00
```

— матрица $\widetilde{W}_\infty$:

```
 4.0000e+00   1.4780e+03   1.4779e+02
-7.1663e-29   3.0000e+00   1.5000e+00
 1.4124e-64  -5.3259e-36   2.0000e+00
```

— матрица $\widetilde{W}_0$:

```
5.0000e-01   -9.8534e+01   -1.4780e+02
7.8447e-40    3.3333e-01    8.3955e-15
2.2280e-64    8.5718e-27    2.5000e-01
```

— матрицы $\widetilde{W}_1^{(j)}$:

$$\widetilde{W}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 7.8027e+00 & 7.2931e+01 \\ -9.7689e-01 & -9.0027e+00 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{W}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.7538e+00 & 2.2754e+01 \\ -3.7724e-01 & -2.7538e+00 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{W}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.5531e+00 & 2.7921e-01 \\ -3.3208e+00 & 4.6876e-02 \end{pmatrix};$$

— матрицы $\widetilde{J}_1^{(j)}$:

$$\widetilde{J}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.1505e-18 & 5.4153e-02 \\ -5.4153e-02 & -6.5319e-19 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{J}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.1410e-19 & -2.1822e-01 \\ 2.1822e-01 & -5.6944e-19 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{J}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} -7.8226e-18 & 1.0000e+00 \\ -1.0000e+00 & 5.7847e-18 \end{pmatrix};$$

— матрицы $S_{10}^{(j)}$:

$$S_{10}^{(1)} = \begin{pmatrix} -5.2901e-02 & -4.5503e-01 \\ -4.5503e-01 & -3.9494e+00 \end{pmatrix} \text{ со знаком } -,$$

$$S_{10}^{(2)} = \begin{pmatrix} 8.2320e-02 & 6.0094e-01 \\ 6.0094e-01 & 4.9653e+00 \end{pmatrix} \text{ со знаком } +,$$

$$S_{10}^{(3)} = \begin{pmatrix} -3.3208e+00 & -7.5312e-01 \\ -7.5312e-01 & -2.7921e-01 \end{pmatrix} \text{ со знаком } -;$$

— среднее арифметическое собственных значений $W_1^{(j)}$:

$$s_1^{(1)} = -6.0000e-01,\ s_1^{(2)} = 2.4425e-15,\ s_1^{(3)} = 8.0000e-01;$$

— преобразованные матрицы $\widetilde{J}$ и $\widetilde{W}$, полученные в результате работы алгоритма 1 и обладающие свойствами

$$\|\widetilde{W}^*\widetilde{J}\widetilde{W} - \widetilde{J}\| = 2.6371e-12, \quad \|Q^{-1}WQ - \widetilde{W}\| = 6.9145e-11, \quad \|Q^*JQ - \widetilde{J}\| = 0$$

с $\kappa(Q) = 1.8636e+03$, $\kappa(S_1) = 4.2874$.

На рис. 1 показано расположение спектра W. Табл. 1 содержит матрицы W_1 перед их блочной диагонализацией.

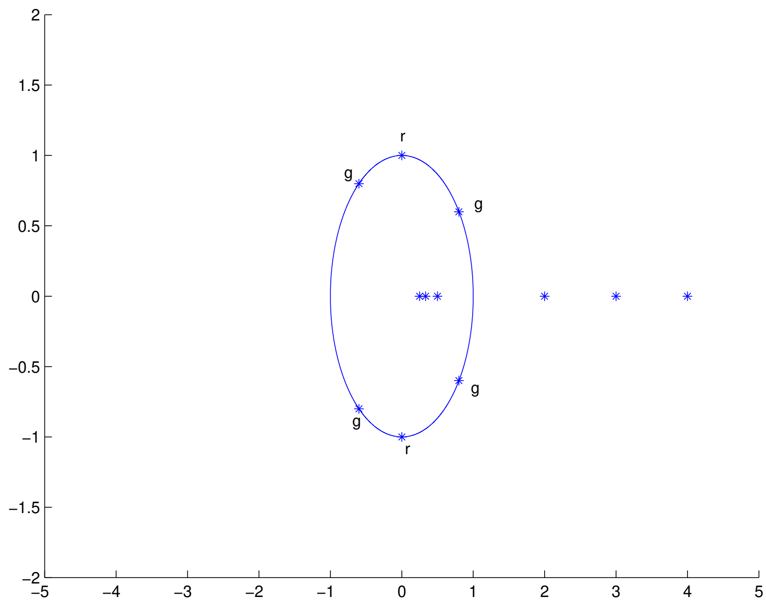

Рис. 1. Расположение спектра W
(буквами r и g отмечены красные и зеленые собственные значения).

Таблица 1. W_1 перед блочной диагонализацией (пример 1).

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -9.6342e{-}01 & -7.0569e{-}01 \\ 1.0941e{+}00 & -2.3658e{-}01 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5.4339e{-}01 & -2.0529e{-}01 \\ -5.1259e{-}01 & -2.6475e{-}01 \end{matrix} & \begin{matrix} -7.7348e{-}02 & -1.1558e{-}01 \\ 5.1358e{-}02 & 7.6744e{-}02 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -4.7605e{-}15 & -1.4616e{-}16 \\ -4.8221e{-}16 & 1.0488e{-}15 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 4.5443e{-}01 & -1.3546e{+}00 \\ 8.9070e{-}01 & -4.5443e{-}01 \end{matrix}} & \begin{matrix} -4.3450e{-}01 & 3.5944e{-}01 \\ -1.3480e{-}02 & -4.0192e{-}01 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4.6413e{-}17 & 5.5912e{-}16 \\ -1.3782e{-}16 & -2.5450e{-}16 \end{matrix} & \begin{matrix} 3.5577e{-}16 & 7.0902e{-}18 \\ 1.4472e{-}16 & -9.8985e{-}17 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 5.7631e{-}01 & 5.1851e{-}01 \\ -7.9079e{-}01 & 1.0237e{+}00 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Этот пример связан с уравнением Матье

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a + b\sin 2t)y = 0, \tag{42}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, которое сводится к каноническому уравнению Гамильтона [3, гл. 2, § 3]:

$$J\frac{dx}{dt} = H(t)x, \tag{43}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} a + b\sin 2t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ассоциированный с (43) матрицант является матрицей $Z(t)$, удовлетворяющей условиям

$$J\frac{dZ(t)}{dt} = H(t)Z(t), \quad Z(0) = I. \tag{44}$$

Как известно (см., например, [3]), решение $Z(t)$ уравнения (44) является J-симплектической матрицей для всех t, и так как $H(t)$ π-периодическая, матрица $Z(t)$ такова, что $Z(t+\pi) = Z(t)Z(\pi)$ для всех t.

Проиллюстрируем поведение алгоритма 1 на семействе симплектических матриц

$$W \equiv W(a,b) = Z(\pi). \tag{45}$$

Вычислим матрицу $W(a,b)$ для различных значений параметров a, b (приближенное решение (44) в точке π, полученное методом Рунге — Кутта, см., например, [14]) и матрицу $S_0 = \frac{1}{2}J(W - W^{-1})$. Вычислим канонический вид W и построим матрицу S_1, определенную в (10), и матрицу Q, определенную в (26).

На рис. 2 показаны линии уровня, числа обусловленности $\kappa(Q) \equiv \kappa(Q(a,b))$ для различных значений параметров a и b. Линии уровня получены с помощью команды программы Matlab: $\mathrm{contour}(\mathrm{vec}_a, \mathrm{vec}_b, \log_{10}(\kappa(Q)), [1:3])$, где vec_a и vec_a — векторы, содержащие различные значения параметров a и b. Рис. 3, 4 являются фрагментами рис. 2. На них показаны крупным планом области $(a,b) \in]2.5, 7.5[\times]0, 7[$ и $(a,b) \in]15, 18[\times]0, 12[$. Важно отметить, что эти рисунки в точности соответствуют изображениям на рисунках в [3, гл. VIII, § 3, рис. 70], полученным другими техническими средствами.

Рис. 5 показывает отношение значения $\kappa(S_0(a,b))$ к значению $\kappa(Q(a,b))$ для различных параметров a и b, выбранных так, что $\kappa(S_0(a,b))$ велико. Наша цель здесь — численно показать, что в областях на рис. 2, где $\kappa(S_0(a,b))$ велико, обусловленности $\kappa(S_0(a,b))$ и $\kappa(Q(a,b))$ становятся пропорциональными.

Наконец, найдем канонический вид W в некоторых областях устойчивости и неустойчивости (см. рис. 2).

Точка $(a,b) = (6,2)$ принадлежит области устойчивости для уравнения Матье (см. [3, гл. VIII, рис. 70]). Для этой точки получаем

$$W = \begin{pmatrix} 3.41e-01 & 3.84e-01 \\ -2.51e+00 & 1.10e-01 \end{pmatrix}$$

с собственными значениями $\lambda = 2.25e-01 \pm 9.74e-01i$, $|\lambda| = 1$, $r = 2$, $g = 0$, где r и g — число красных и зеленых собственных значений соответственно;

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2.51e+00 & 1.16e-01 \\ 1.16e-01 & 3.84e-01 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3.55e-01 & -9.35e-01 \\ 9.35e-01 & 3.55e-01 \end{pmatrix},$$

$$Q^*JQ = \begin{pmatrix} 1.25e-17 & -1.00e-00 \\ 1.00e-00 & 2.74e-17 \end{pmatrix}, \; Q^{-1}WQ = \begin{pmatrix} -5.66e-01 & 2.17e+00 \\ -7.28e-01 & 1.02e+00 \end{pmatrix}.$$

Точка $(a,b) = (20,15)$ принадлежит области устойчивости для уравнения Матье (см. [3, гл. VIII, рис. 70]). Для нее

$$W = \begin{pmatrix} 5.65e-01 & 1.32e-01 \\ -4.05e+00 & 8.24e-01 \end{pmatrix}$$

с собственными значениями $\lambda = 6.94e-01 \pm 7.20e-01i$, $|\lambda| = 1$, $r = 2$, $g = 0$;

$$S_1 = \begin{pmatrix} 4.05e+00 & -1.30e-01 \\ -1.30e-01 & 1.32e-01 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -8.11e-02 & 9.97e-01 \\ -9.97e-01 & -8.11e-02 \end{pmatrix},$$

$$Q^*JQ = \begin{pmatrix} 5.90e-18 & -1.00e-00 \\ 1.00e-00 & -1.31e-18 \end{pmatrix}, \; Q^{-1}WQ = \begin{pmatrix} 5.05e-01 & 4.05e+00 \\ -1.37e-01 & 8.83e-01 \end{pmatrix}.$$

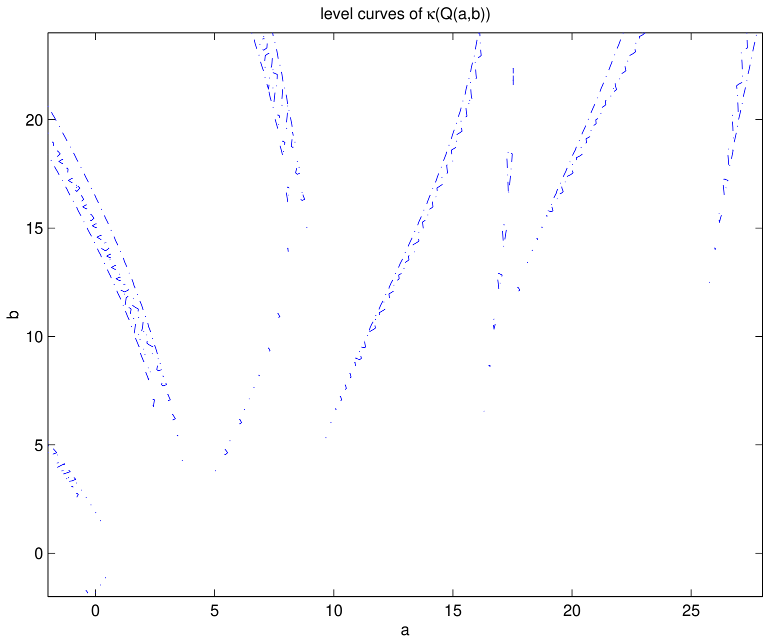
level curves of κ(Q(a,b))
b
a
0
5
10
15
20
25

Рис. 2.

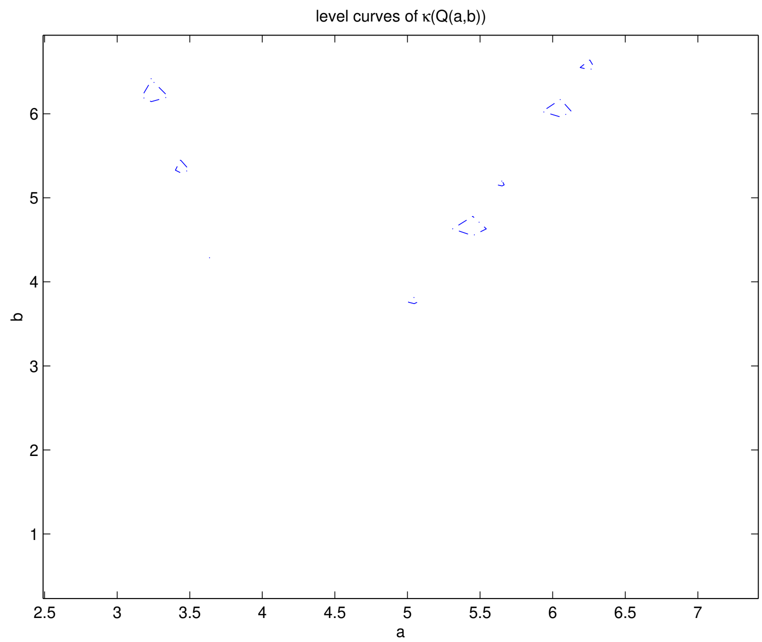
level curves of κ(Q(a,b))
b
a
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7

Рис. 3.

Точка $(a,b)=(0,20)$ принадлежит области неустойчивости для уравнения Матье (см. [3, гл. VIII, рис. 70]). Для этой точки имеем $W=\begin{pmatrix}223.332 & 14.7201\\ 546.134 & 36.0009\end{pmatrix}$ с собственными значениями 259.329 и 0.0038561 и знаконеопределенной матрицей $S_0=\begin{pmatrix}-546.134 & 93.6656\\ 93.6656 & 14.7201\end{pmatrix}$.

Пример 3. Этот пример также взят из [3, гл. V, § 1]. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} q_1\frac{d^2\eta_1}{dt^2}+p_1\eta_1+[a\eta_1\cos\mathscr{V}t+(b\cos 2\mathscr{V}t+c\sin 2\mathscr{V}t)\eta_2]=0,\\ q_2\frac{d^2\eta_2}{dt^2}+p_2\eta_2+[g\eta_3\sin 5\mathscr{V}t]=0,\\ q_3\frac{d^2\eta_3}{dt^2}+p_3\eta_3+[(b\cos 2\mathscr{V}t+c\sin 2\mathscr{V}t)\eta_1+g\eta_2\sin 5\mathscr{V}t]=0.\end{cases} \tag{46}$$

Запишем ее в виде

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+P(t)\eta=0 \tag{47}$$

с

$$\eta=\begin{pmatrix}\frac{\eta_1}{\sqrt{q_1}}\\ \frac{\eta_2}{\sqrt{q_2}}\\ \frac{\eta_3}{\sqrt{q_3}}\end{pmatrix} \text{ и } P(t)=\begin{pmatrix}\frac{p_1+a\cos\mathscr{V}t}{q_1} & 0 & \frac{b\cos 2\mathscr{V}t+c\sin 2\mathscr{V}t}{\sqrt{q_1q_3}}\\ 0 & \frac{p_2}{q_2} & \frac{g\sin 5\mathscr{V}t}{\sqrt{q_2q_3}}\\ \frac{b\cos 2\mathscr{V}t+c\sin 2\mathscr{V}t)}{\sqrt{q_1q_3}} & \frac{g\sin 5\mathscr{V}t}{\sqrt{q_2q_3}} & \frac{p_3}{q_3}\end{pmatrix}. \tag{48}$$

Уравнение (47) приводит к канонической гамильтоновой форме, аналогичной (43), с

$$x=\begin{pmatrix}\eta\\ \frac{d\eta}{dt}\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0_3 & -I_3\\ I_3 & 0_3\end{pmatrix},\quad H(t)=\begin{pmatrix}P(t) & 0_3\\ 0_3 & I_3\end{pmatrix}.$$

Интересующая нас симплектическая матрица W такова:

$$W=Z(2\pi/\mathscr{V}), \tag{49}$$

где $Z(t)$ — матрицант, ассоциированный с этой канонической формой, и мы берем $\mathscr{V}=\sqrt{7}$, $q_1=q_2=q_3=1$, $p_1=4$, $p_2=3$, $p_3=2$ и используем параметры

1) $a=g=\epsilon$, $b=\delta$, $c=0$;

2) $a=b=0$, $c=\epsilon$, $g=\delta$.

На рис. 6, 7 изображены линии уровня $\det(S_0(\epsilon,\delta))$, $\kappa(S_0(\epsilon,\delta))$ и $\kappa(Q(\epsilon,\delta))$ на плоскости параметров ϵ и δ. Здесь параметры выбираются так, что $\kappa(S_0(\epsilon,\delta))$ велико ($>10^3$). Как и для уравнения Матье, эти линии нарисованы с помощью процедуры изображения контуров из Matlab. На этих фигурах указаны количества красных и зеленых собственных значений.

Важное замечание. При сравнении приведенных рисунков (особенно 2–4) с графиками из [3] обращает на себя внимание чрезвычайная изрезанность границ, тогда как в [3] границы гладкие. Этот эффект наблюдается в зоне, где структура W слабо устойчива: $k(Q(a,b))$ велико. Причиной эффекта может быть или наличие в этой зоне мелких областей различных структур, или, что более вероятно, погрешности при вычислении $W=Z(a,b,\pi)$ с помощью стандартного алгоритма из MATLAB. Влияние погрешностей в исходных W существенно в зоне больших $k(Q(a,b))$. Выяснение реальной причины наблюдаемого эффекта требует дальнейших исследований.

Чтобы избежать отмеченных неясностей, не влияющих на описание областей с надежно устойчивой структурой, по-видимому, удобно предварительно исключить из анализа область параметров, где $k(S_0)$ очень велико или $\det S_0$ близко к нулю. На рис. 6, относящемуся к примеру 3, эта область заштрихована.

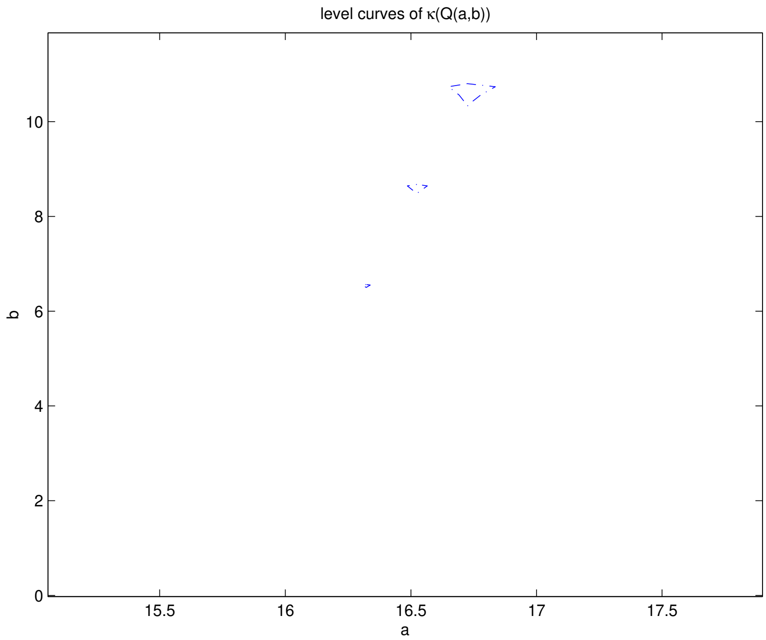
level curves of κ(Q(a,b))
b
10
8
6
4
2
0
15.5
16
16.5
17
17.5
a

Рис. 4.

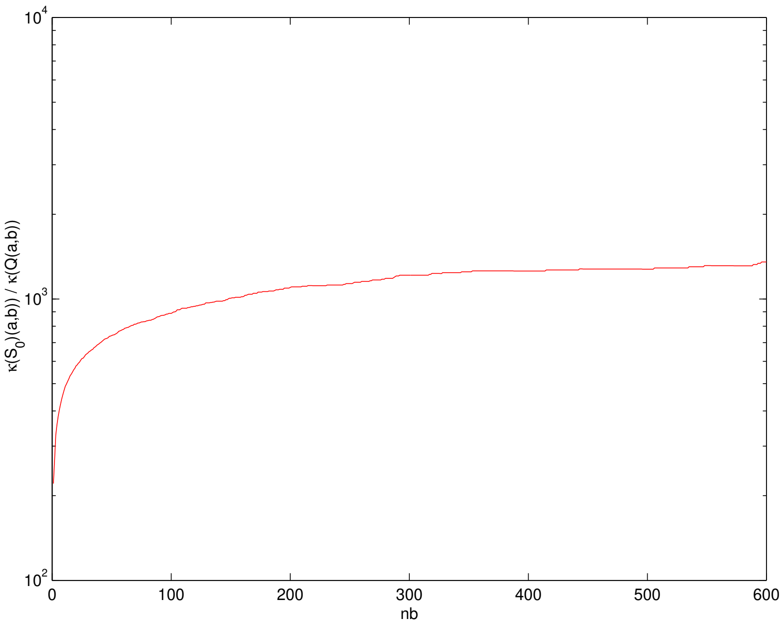
κ(S0)(a,b)) / κ(Q(a,b))
10^4
10^3
10^2
0
100
200
300
400
500
600
nb

Рис. 5.

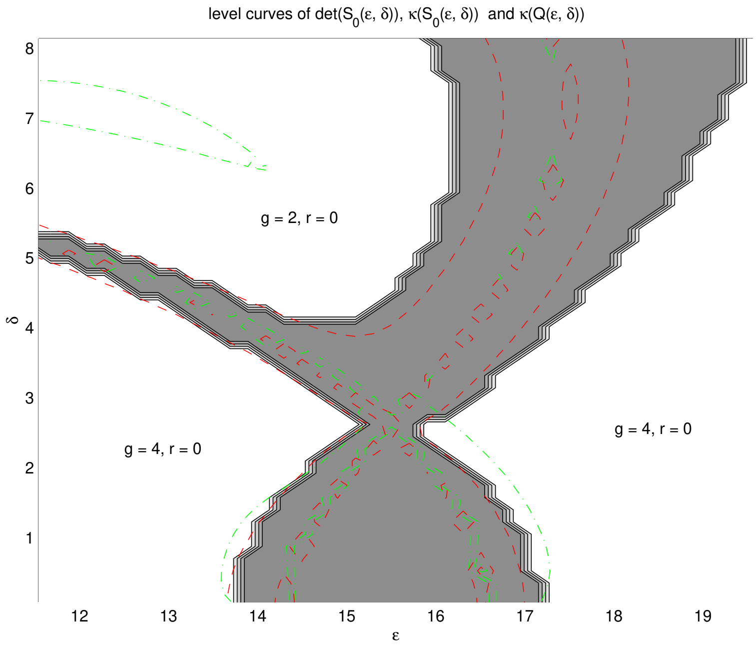
level curves of det(S0(ε, δ)), κ(S0(ε, δ)) and κ(Q(ε, δ))
g = 2, r = 0
g = 4, r = 0
g = 4, r = 0
δ
ε

Рис. 6.

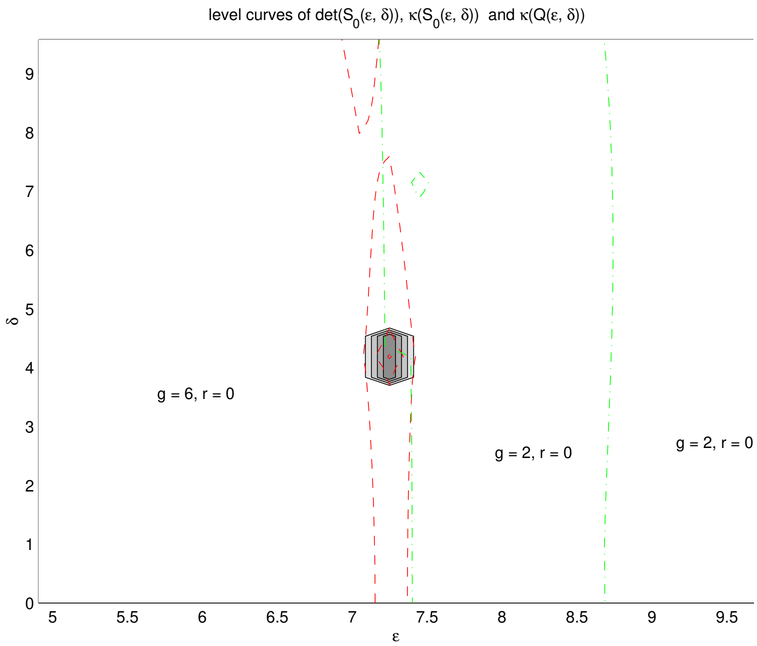
level curves of det(S0(ε, δ)), κ(S0(ε, δ)) and κ(Q(ε, δ))
g = 6, r = 0
g = 2, r = 0
g = 2, r = 0
δ
ε

Рис. 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mehrmann V.* The autonomous linear quadratic control problem, Theory and numerical solution. Heidelberg: Springer-Verl., 1991. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; 163).
2. *Lancaster P., Rodman L.* The algebraic Riccati equation. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
3. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
4. *Zienkiewich O. C.* The finite element method. New York: McGraw-Hill, 1977.
5. *Годунов С. К.* Устойчивость итераций симплектических преобразований // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 54–63.
6. *Годунов С. К.* Проверка ограниченности степеней симплектических матриц с помощью усреднений // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 939–949.
7. *Laub A. J., Meyer K.* Canonical forms for symplectic and Hamiltonian matrices // Celestial Mechanics. 1974. V. 9. P. 213–238.
8. *Mehrmann V., Xu H.* Canonical forms for Hamiltonian and symplectic matrices and pencils // Linear Algebra Appl. (to appear).
9. *Wilkinson J. H.* The algebraic eigenvalue problem. Oxford, UK: Clarendon Press, 1965.
10. *Golub G. H., Van Loan C. F.* Matrix computation. Baltimore: The Johns Hopkins Univ. Press, 1989.
11. *Godunov S. K., Sadkane M.* On a canonical form of symplectic matrices // Conf. dedicated to the 70th birthday of S. K. Godunov. Novosibirsk, Russia, 1999.
12. *Godunov S. K., Kuznetsov S. V.* Estimates for the convergence of the orthogonal-power method // Siberian Adv. Math. 1995. V. 5, N 1. P. 16–41.
13. *Годунов С. К., Антонов А. Г., Кирилюк О. П., Костин В. И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений. Изд. 2-е, перераб. и доп. Новосибирск: Наука, 1992. (перевод: *Godunov S. K., Antonov A. G., Kiriljuk O. P., Kostin V. I.* Guaranteed Accuracy in Numerical Linear Algebra. Dortrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1993.)
14. *Hairer E., Noerset S., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. Berlin: Springer-Verl., 1993.

Статья поступила 1 ноября 2000 г.

Годунов Сергей Константинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
`godunov@math.nsc.ru`

Sadkane Miloud
Université de Bretagne Occidentale. Département de Mathématiques
6, Av. Le Gorgeu. BP 809. 29285 Brest Cedex. France
`sadkane@univ-brest.fr`