Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 519.9,514.7:519.46

ФОРМЫ СФЕР СПЕЦИАЛЬНЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ВНУТРЕННИХ МЕТРИК НА НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ ЛИ

В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева

Аннотация: Найдены точные формы сфер некоторых неголономных левоинвариантных метрик на трехмерных группах Ли: группе Гейзенберга H, $SO(3)$, $SL_2\mathbb{R}$. С помощью несложных геометрических рассуждений нахождение сфер сводится к решению изопериметрических задач для плоскостей постоянной гауссовой кривизны. Ил. 3, библиогр. 11.

В статье найдены точные формулы для сфер неголономных левоинвариантных внутренних метрик на трехмерных группах Ли: группе Гейзенберга H, $SO(3)$, $SL_2\mathbb{R}$. Метрики специально подобраны так, что можно с помощью несложных геометрических рассуждений (без использования принципа максимума Понтрягина или уравнений Гамильтона — Якоби для нахождения геодезических) свести задачу к решению изопериметрических задач для плоскостей постоянной гауссовой кривизны. Подобная связь неголономных вариационных и изопериметрических задач приведена в работах [1, 2]. Рассматриваемые в этой статье метрики имеют самостоятельное геометрическое значение ввиду естественности определяющей их геометрической конструкции. Левоинвариантное (горизонтальное) распределение на соответствующих группах Ли, с помощью которых определяется метрика, во всех случаях представляет собой горизонтальное распределение связностей в главных расслоениях над плоскостями постоянной гауссовой кривизны. При этом проекция на базу расслоения будет субметрией, являющейся естественным обобщением римановой субмерсии.

Во всех трех случаях полученные сферы в соответствующих системах координат являются поверхностями вращения. Интересно, что сферы на группе Гейзенберга получаются вращением двумерных кривых, так называемых «шаров Грушина» для специальной вырожденной римановой метрики на $\mathbb{R}^2$ (см. [3, 4]). Эта связь отмечена в статье [5]. В [5, 6] даны изображения сфер неголономных метрик на группе Гейзенберга, но точные формулы для этих сфер не приведены. Неголономные римановы метрики и их геодезические на группе Гейзенберга и $SL_2\mathbb{R}$ рассматривались в [7] с использованием другой техники. Там же даны изображения сфер и волновых фронтов неголономных метрик на группе Гейзенберга, но, с нашей точки зрения, выбранная система координат неудачна и не отражает наличие симметрий.

Несмотря на простоту геометрических рассуждений, вывод формул для сфер подчас связан с длинными вычислениями площадей специальных областей и длин специальных кривых на плоскостях постоянной кривизны. Этот

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS (грант 10170).

недостаток искупается двумя обстоятельствами. Во-первых, эти вычисления не выходят за пределы элементарного математического анализа; во-вторых, решение важной задачи нахождения точных формул для сфер неголономных метрик, насколько нам известно, приводится впервые.

Далее дается общее описание рассматриваемых здесь метрик.

Пусть $p : P \to M$ — главное расслоение над многообразием M с некоторой связностью ∇, горизонтальное распределение Δ которой вполне неголономно. Тогда согласно [2] всякая риманова (или финслерова) метрика ρ на базе M естественно приводит к метрике Карно — Каратеодори d_c на P, определяемой распределением Δ и условием, что проекция $p : (P, d_c) \to (M, \rho)$ — субметрия. А именно, определим расстояние $d_c(x, y)$ между элементами $x, y \in P$ по формуле

$$d_c(x, y) = \inf d(l), \tag{1}$$

где inf берется по всем кривым l в M, горизонтальные лифты которых в P соединяют элементы x и y. Здесь $d(l)$ — длина кривой l в метрике ρ.

Мы рассматриваем случаи, когда p — расслоение единичных векторов V_K над пространством M_K, где M_K — ориентированная плоскость Лобачевского гауссовой кривизны K (тогда $V_K = SL_2\mathbb{R}$) или ориентированная плоскость Римана гауссовой кривизны K (тогда $V_K = SO(3)$), со связностью Леви-Чивита (структурная группа $SO(2)$). Тогда метрику (1) можно иначе определить как неголономную метрику, задаваемую метрикой Сасаки [8, 9] и горизонтальным распределением связности Леви-Чивита. Кроме того, рассмотрим случай, когда $p : H \to H/Z = \mathbb{R}^2$ — главное расслоение над фактор-пространством H/Z группы Гейзенберга H по ее центру Z, со структурной группой Z и с произвольным левоинвариантным распределением Δ на H, трансверсальным слоям H, в качестве горизонтального распределения связности; причем на $\mathbb{R}^2$ задана евклидова метрика.

В [2] доказано, что проекция l_{hg} кратчайшей на группе Гейзенберга H, соединяющей элементы $h, g \in H$, является решением изопериметрической задачи (задачи Дидоны) на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Покажем, что проекции кратчайших пространства V_K обладают аналогичным свойством.

Введем в V_K систему координат $\{(r, \alpha, \beta) \mid r \geqslant 0, -\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi, -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi\}$ с началом в некотором фиксированном элементе v_O следующим образом. Всякий элемент $v_A \in V_K$ (если M_K — плоскость Римана, то A не является диаметрально противоположной точкой для O) имеет координаты (r, α, β), где r — расстояние между точками O и A, α — угол от вектора v'_O, полученного параллельным переносом вектора v_O вдоль единственной кратчайшей OA, к вектору v_A, β — угол от вектора v_O к единичному касательному вектору кривой OA в точке O. Считаем, что при этом отождествлены элементы, имеющие соответственно координаты $(r, -\pi, \beta)$ и (r, π, β), $(r, \alpha, -\pi)$ и (r, α, π).

Пусть l — кривая в пространстве M_K, горизонтальный лифт которой в расслоении единичных векторов V_K соединяет элементы v_O и v_A. По теореме Гаусса — Бонне (см. [10]) угол поворота вектора v_O при параллельном перенесении его вдоль дуг l, AO пропорционален площади $S(\Omega)$ двуугольника Ω, ограниченного этими дугами, причем коэффициентом пропорциональности служит гауссова кривизна пространства M_K. Следовательно, справедлива формула

$$S(\Omega) = \sigma^2|\alpha|,$$

т. е. $S(\Omega)$ постоянна при заданном элементе v_A. Поэтому проекция l_{OA} кратчайшей пространства V_K, соединяющей элементы v_O и v_A, есть кривая наименьшего охвата, т. е. кривая наименьшей длины среди всех кривых l пространства

M_K, соединяющих точки O и A и ограничивающих вместе с кратчайшей OA двуугольник постоянной площади. Ясно, что эта кривая в то же время представляет собой решение изопериметрической задачи (задачи Дидоны). Известно, что в пространствах постоянной гауссовой кривизны кривыми наименьшего охвата являются кривые постоянной геодезической кривизны, и только они.

Таким образом, справедливо

Утверждение. *Если элемент v_A, имеющий координаты (r, α, β), принадлежит сфере пространства V_K с центром v_O некоторого радиуса T и l_{OA} — проекция кратчайшей пространства V_K, соединяющей элементы v_O и v_A, то*

$$r = d(OA), \quad |\alpha| = \frac{S(\Omega)}{\sigma^2}, \quad T = d(l_{OA}), \tag{2}$$

где Ω — двуугольник, ограниченный кривой l_{OA} и кратчайшей OA пространства M_K, соединяющей точки O и A, $d(l)$ — длина кривой l в метрике пространства M_K.

Кривая l_{OA} есть кривая постоянной геодезической кривизны пространства M_K.

§ 1. Сферы на группе Гейзенберга

Пусть H — группа Гейзенберга вещественных верхних треугольных (3×3)-матриц с единицами на главной диагонали, Z — ее центр. Рассмотрим главное расслоение $p : H \to H/Z = \mathbb{R}^2$ со структурной группой Z и с произвольным левоинвариантным распределением Δ на H, трансверсальным слоям H, в качестве горизонтального распределения связности. Зададим на $\mathbb{R}^2$ евклидову норму и определим по формуле (1) метрику d_c на группе H.

Введем в H систему координат $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$ следующим образом. В векторном пространстве $L_0 = \Delta(e)$, где e — единица группы H, выберем ортонормированный базис $\{X, Y\}$. Тогда $\{X, Y, Z = [X, Y]\}$ — базис алгебры Ли L, с помощью экспоненциального отображения определяющий координаты x, y, z в группе H: элемент $h \in H$ имеет координаты (x, y, z), если $h = \exp(xX + yY + zZ)$. Таким образом, e имеет координаты $(0, 0, 0)$.

Основным результатом параграфа является

Теорема 1. *Во введенной системе координат сфера в (H, d_c) с центром в единице e группы H произвольного радиуса T есть поверхность вращения вокруг оси z замкнутой плоской кривой S_T, определяемой параметрическими уравнениями $r = \pm r(t), z = \pm z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, где*

$$r(t) = \begin{cases} T, & \textit{если} \quad t = 0, \\ \frac{2T}{t} \sin \frac{t}{2}, & \textit{если} \quad 0 < t \leqslant 2\pi, \end{cases} \tag{3}$$

$$z(t) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad t = 0, \\ \frac{T^2}{2t^2}(t - \sin t), & \textit{если} \quad 0 < t \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Пусть элемент $h \in H$ с координатами (x, y, z) принадлежит сфере с центром в e некоторого радиуса T, $(x, y, z)(u)$, $0 \leqslant u \leqslant T$, — параметризованная длиной дуги кратчайшая в (H, d_c), соединяющая e с h. В [2] доказано, что

$$z(u) = \frac{1}{2} \int_0^u [x(\tau) y'(\tau) - y(\tau) x'(\tau)]\, d\tau, \quad 0 \leqslant u \leqslant T,$$

т. е. $z(u)$ — ориентированная площадь на евклидовой плоскости с прямоугольными координатами x, y, зачерчиваемая подвижным прямолинейным отрезком, соединяющим начало координат с точкой $(x(\tau), y(\tau))$, $0 \leqslant \tau \leqslant u$.

Тогда по определению (1) метрики на H проекция $l_{OA} = (x, y)(u)$, $0 \leqslant u \leqslant T$, на плоскость $z = 0$ нашей кратчайшей есть кривая наименьшего охвата, т. е. кривая наименьшей длины среди всех кривых плоскости $z = 0$, соединяющих точку $O(0, 0, 0)$ с точкой $A(x, y, 0)$ и ограничивающих вместе с прямолинейным отрезком OA фигуру постоянной (равной $|z|$) площади. Понятно, что эта кривая в то же время является решением изопериметрической задачи. Следовательно, l_{OA} — дуга евклидовой окружности (при $z = 0$ — прямолинейный отрезок), соединяющей точки O и A. Обозначим через C и R соответственно центр и радиус этой окружности, и пусть t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, — центральный угол, на который опирается дуга l_{OA}. Так как длина кривой l_{OA} равна T, то

$$R = \frac{T}{t}, \quad 0 < t \leqslant 2\pi. \tag{5}$$

Легко видеть, что если $t = 0$, то $z = 0$; если $t = 2\pi$, то точки O и A совпадают и $|z| = \pi R^2$. Во всех остальных случаях

$$|z(t)| = S(\Omega) = \begin{cases} S_{\text{сект}} - S_{\text{OAC}}, & \text{если} \quad 0 < t \leqslant \pi, \\ S_{\text{сект}} + S_{\text{OAC}}, & \text{если} \quad \pi < t < 2\pi, \end{cases}$$

где S_Ω — площадь фигуры, ограниченной кривой l_{OA} и евклидовым отрезком OA, S_{OAC} — площадь треугольника OAC, $S_{\text{сект}}$ — площадь сектора радиуса R, опирающегося на угол t.

Нетрудно показать, что

$$S_{\text{сект}} = \frac{R^2}{2}\alpha, \quad S_{\text{OAC}} = \begin{cases} \frac{R^2}{2}\sin\alpha, & \text{если} \quad 0 < \alpha \leqslant \pi, \\ \frac{R^2}{2}\sin(2\pi - \alpha), & \text{если} \quad \pi < \alpha < 2\pi. \end{cases}$$

Следовательно, в силу (5)

$$|z(t)| = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t = 0, \\ \frac{T^2}{2t^2}(t - \sin t), & \text{если} \quad 0 < t \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Обозначим через $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ длину отрезка OA. Тогда, выражая r из треугольника OAC, на основании (5) находим

$$r(t) = \begin{cases} T, & \text{если} \quad t = 0, \\ \frac{2T}{t}\sin\frac{t}{2}, & \text{если} \quad 0 < t \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Теорема 1 доказана.

Проведем исследование кривой S_T. Производные функций $z(t)$, $r(t)$, определенные по формулам (3), (4), соответственно равны

$$z'(t) = \frac{T^2}{2t^3}(2\sin t - t(1 + \cos t)), \quad r'(t) = \frac{T^2}{t^2}\left(t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}\right), \quad 0 < t \leqslant 2\pi.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dr}(r(t)) = \frac{z'(t)}{r'(t)} = -\frac{T}{t}\cos\frac{t}{2}.$$

Так как $\frac{dz}{dr}(r(t)) \to -\infty$ при $t \to 0$, прямые $r = T$ и $r = -T$ — касательные к замкнутой кривой S_T в точках с координатами $(T, 0)$, $(-T, 0)$ соответственно.

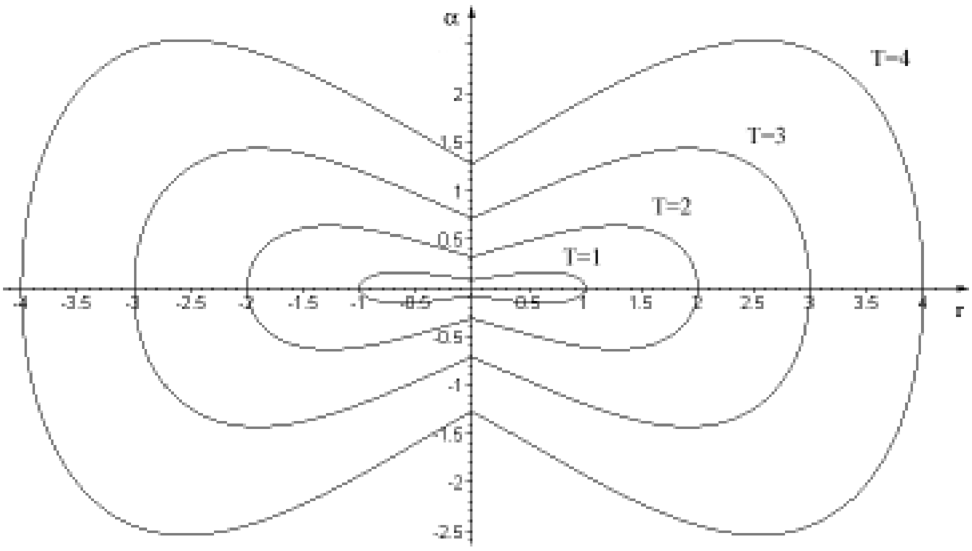

Рис. 1. Сферы на группе Гейзенберга.

Заметим, что $\frac{dz}{dr}(r(t)) > 0$ при $\pi < t \leqslant 2\pi$ и $\frac{dz}{dr}(r(t)) < 0$ при $0 < \alpha < \pi$. Легко видеть, что функция $r(t)$ убывает на отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому наибольшее значение функции z переменного r на отрезке $[0, T]$ равно $z_{\max} = z(r(\pi)) = \frac{T^2}{2\pi}$, а $(0, \frac{T^2}{4\pi})$ — точка локального минимума кривой S_T (соответственно $(0, -\frac{T^2}{4\pi})$ — точка локального максимума кривой S_T).

Вычислим вторую производную функции $z(r)$:

$$\frac{d^2z}{dr^2}(r(t)) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{T}{t}\cos\frac{t}{2}\right) : r'(t) = \frac{T\left(t\sin\frac{t}{2} + 2\cos\frac{t}{2}\right)}{2\left(t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}\right)}.$$

Легко видеть, что $\frac{d^2z}{dr^2}(r(t))$ отрицательна при $0 < t < t^*$, равна нулю при $t = t^*$ и положительна при $t^* < t \leqslant 2\pi$, где $t^* \in (\pi, 2\pi)$ — единственный корень уравнения $t^*\sin\frac{t^*}{2} + 2\cos\frac{t^*}{2} = 0$. Следовательно, $(r(t^*), z(t^*))$ — единственная точка перегиба кривой (3), (4).

Кривые S_T, $T = 1, 2, 3, 4$, построенные с помощью математического пакета Maple, изображены на рис. 1. Ясно, что всякую кривую S_T можно получить из кривой S_1 растяжением в T раз по оси r и в T^2 раз по оси z.

Сфера пространства (H, d_c) с центром в единице e радиуса $T > 0$ гомеоморфна двумерной евклидовой сфере S^2 и имеет две конические особенности в точках $\left(0, 0, \frac{T^2}{4\pi}\right)$ и $\left(0, 0, -\frac{T^2}{4\pi}\right)$ соответственно.

§ 2. Сферы на расслоении единичных векторов плоскости Римана

Рассмотрим случай, когда M_K — ориентированная двумерная сфера гауссовой кривизны $K = \sigma^{-2}$, $\sigma > 0$, заданная в объемлющем трехмерном пространстве R^3 равенством $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma^2$. Пусть ориентация сферы M_K каноническим образом определена ее внешней нормалью. Введем на расслоении V_K ее единичных векторов метрику по формуле (1) и систему координат $\{r, \alpha, \beta\}$ с началом в некотором элементе v_O. Без ограничения общности можно считать, что точка O имеет декартовы координаты $(0,0,\sigma)$, а вектор $\vec{v}_O$ — декартовы компоненты $(1,0,0)$.

Легко показать, что если во введенной системе координат элемент $v_A \in V_K$, где A не является диаметрально противоположной точкой для O, имеет координаты (r,α,β), то A имеет декартовы координаты

$$\left(\sigma\cos\beta\sin\frac{r}{\sigma}, \sigma\sin\beta\sin\frac{r}{\sigma}, \sigma\cos\frac{r}{\sigma}\right),$$

а вектор v_A — декартовы компоненты

$$\Big(\cos\frac{r}{\sigma}\cos\beta\cos(\alpha-\beta)-\sin\beta\sin(\alpha-\beta),$$
$$\cos\frac{r}{\sigma}\sin\beta\cos(\alpha-\beta)+\cos\beta\sin(\alpha-\beta), -\sin\frac{r}{\sigma}\cos(\alpha-\beta)\Big).$$

Следовательно, координатное отображение

$$f : \{(r,\alpha,\beta) \mid 0 \leqslant r < \pi\sigma, -\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi, -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi\} \to V(R_\sigma)$$

можно продолжить по непрерывности до отображения g с включением случая $r = \pi\sigma$. В этом случае точка A имеет декартовы координаты $(0,0,-\sigma)$, вектор v_A — компоненты $(-\cos(\alpha-2\beta), \sin(\alpha-2\beta), 0)$. Таким образом,

$$g : \{(r,\alpha,\beta) \mid 0 \leqslant r \leqslant \pi\sigma, -\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi, -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi\} \to V_K$$

— отображение отождествления замкнутого полнотория на пространство V_K, гомеоморфное трехмерному вещественному проективному пространству RP^3. При этом кривая $\beta = \frac{1}{2}\alpha + c$, $c \in R$, на граничном торе T^2 переходит под действием отображения g в один и тот же элемент пространства V_K.

Основной результат параграфа составляет

Теорема 2. *Диаметр пространства V_K, $K = \sigma^{-2}$, снабженного метрикой* (1), *равен $\sqrt{3}\pi\sigma$.*

Введем в V_K систему координат $\{r,\alpha,\beta\}$ с началом в некотором элементе v_O. В этой системе координат сфера с центром v_O радиуса $\sqrt{3}\pi\sigma$ есть точка $(0,\pi,0)$. Сфера с центром v_O радиуса $0 < T < \sqrt{3}\pi\sigma$ — поверхность вращения вокруг оси α той части кривой S_T, определяемой параметрическими уравнениями $r = \pm r(t)$, $\alpha = \pm\alpha(t)$, $1 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi\sigma}{T}$, которая расположена в полосе $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$ на плоскости $\beta = 0$, причем

1. *Если $0 < T < \pi\sigma$, то*

$$r(t) = 2\sigma\arcsin\left(\frac{1}{t}\sin\frac{Tt}{2\sigma}\right), \quad 1 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi\sigma}{T};$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2\left|\frac{T}{2\sigma}\sqrt{t^2-1} - \arcsin\frac{\sqrt{t^2-1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2-\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}\right|, & \text{если} \quad 1 \leqslant t < \frac{\pi\sigma}{T}, \\ 2\left(\pi - \frac{T}{2\sigma}\sqrt{t^2-1} - \arcsin\frac{\sqrt{t^2-1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2-\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}\right), & \text{если} \quad \frac{\pi\sigma}{T} \leqslant t \leqslant \frac{2\pi\sigma}{T}. \end{cases}$$

2. *Если $\pi\sigma \leqslant T < \sqrt{3}\pi\sigma$, то*

$$r(t) = 2\sigma\arcsin\left(\frac{1}{t}\sin\frac{Tt}{2\sigma}\right), \quad 1 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi\sigma}{T};$$

$$\alpha(t)=2\left(\pi-\frac{T}{2\sigma}\sqrt{t^2-1}-\arcsin\frac{\sqrt{t^2-1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2-\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}\right),\quad 1\leqslant t\leqslant\frac{2\pi\sigma}{T}.$$

При $T=\pi\sigma$ значение $\alpha(1)$ определяется по непрерывности и равно π.

Доказательство. Пусть элемент v_A с координатами (r,α,β) принадлежит сфере пространства V_K с центром v_O некоторого радиуса T. Тогда в силу утверждения можно считать, что $\alpha\geqslant 0$ и проекция l_{OA} кратчайшей пространства V_K, соединяющей элементы v_O и v_A, является кривой постоянной геодезической кривизны на плоскости Римана M_K. Следовательно, l_{OA} — дуга сферической окружности. Обозначим через R, $0<R<\pi\sigma$, радиус этой окружности, через C — ее центр, через $\angle O$, $\angle A$, $\angle C$ — внутренние углы геодезического треугольника OAC при вершинах O, A, C соответственно.

Возможны два случая расположения точки C относительно двуугольника Ω, ограниченного кривой l_{OA} и сферической кратчайшей OA.

1. Пусть C лежит вне области Ω. Тогда

$$S(\Omega)=|S_{\text{сект}}-S_{OAC}|, \tag{6}$$

где S_{OAC} — площадь геодезического треугольника OAC, $S_{\text{сект}}$ — площадь сектора радиуса R, опирающегося на угол C.

Применяя теорему косинусов для нахождения внутренних углов треугольника OAC, получаем

$$\angle C=2\arcsin\frac{\sin\frac{r}{2\sigma}}{\sin\frac{R}{\sigma}},\quad \angle A=\angle B=\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{R}{\sigma}\operatorname{tg}\frac{r}{2\sigma}\right). \tag{7}$$

Тогда

$$S_{OAC}=\sigma^2(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)=2\sigma^2\left(\arcsin\frac{\sin\frac{r}{2\sigma}}{\sin\frac{R}{\sigma}}-\arcsin\left(\operatorname{ctg}\frac{R}{\sigma}\operatorname{tg}\frac{r}{2\sigma}\right)\right). \tag{8}$$

В силу (7)

$$S_{\text{сект}}=\angle C\sigma^2\left(1-\cos\frac{R}{\sigma}\right)=2\sigma^2\left(1-\cos\frac{R}{\sigma}\right)\arcsin\frac{\sin\frac{r}{2\sigma}}{\sin\frac{R}{\sigma}}.$$

Тогда из (2), (7) и (8) следует, что

$$\alpha=2\left|\cos\frac{R}{\sigma}\arcsin\frac{\sin\frac{r}{2\sigma}}{\sin\frac{R}{\sigma}}-\arcsin\left(\operatorname{ctg}\frac{R}{\sigma}\operatorname{tg}\frac{r}{2\sigma}\right)\right|. \tag{9}$$

Используя (7), запишем равенство $T=d(l_{OA})$ (см. (2)) в виде

$$T=\sigma\angle C\sin\frac{R}{\sigma}=2\sigma\sin\frac{R}{\sigma}\arcsin\frac{\sin\frac{r}{2\sigma}}{\sin\frac{R}{\sigma}}. \tag{10}$$

Введем параметр t по формуле

$$t=\frac{1}{\sin\frac{R}{\sigma}},\quad t\geqslant 1. \tag{11}$$

Тогда равенство (10) примет вид

$$\frac{T}{2\sigma}t=\arcsin\left(t\sin\frac{r}{2\sigma}\right). \tag{12}$$

Из (11) и (12) вытекают неравенства $T \leqslant \pi\sigma$, $1 \leqslant t \leqslant \frac{\pi\sigma}{T}$, но легко видеть, что при $t = \frac{\pi\sigma}{T}$ точка C — середина сферической кратчайшей OA, т. е. она лежит на границе области Ω. Следовательно,

$$T < \pi\sigma, \quad 1 \leqslant t < \frac{\pi\sigma}{T}. \tag{13}$$

Отметим, что случай $t = 1$ соответствует совпадению кривых OA и l_{OA}.

Выражая r из формулы (12), получаем

$$r(t) = 2\sigma \arcsin\left(\frac{1}{t}\sin\frac{Tt}{2\sigma}\right). \tag{14}$$

Последовательно применяя формулы (11), (12), находим

$$\operatorname{ctg}\frac{R}{\sigma} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\frac{R}{\sigma}}}{\sin\frac{R}{\sigma}} = \sqrt{t^2-1}, \quad \operatorname{tg}\frac{r}{2\sigma} = \frac{\sin\frac{r}{2\sigma}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{r}{2\sigma}}} = \frac{\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2-\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}. \tag{15}$$

Тогда (9) запишется в виде

$$\alpha(t) = 2\left|\frac{T}{2\sigma}\sqrt{t^2-1} - \arcsin\frac{\sqrt{t^2-1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2-\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}\right|. \tag{16}$$

Покажем, что $\alpha(t) < \pi$ для всякого $t \in [1, \pi\sigma/T)$ (см. (13)). Для этого достаточно проверить, что для всякого $t \in [1, \pi\sigma/T)$ выполнены неравенства

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{T}{2\sigma}\sqrt{t^2-1} - \arcsin\frac{\sqrt{t^2-1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2-\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}} < \frac{\pi}{2}.$$

Левое неравенство выполняется очевидным образом. В силу оценки

$$\frac{T}{2\sigma}\sqrt{t^2-1} - \arcsin\frac{\sqrt{t^2-1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2-\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}} < \frac{Tt}{2\sigma} < \frac{\pi}{2}$$

выполнено и правое неравенство.

2. Пусть C лежит внутри или на границе области Ω. Тогда

$$S(\Omega) = S_{\text{сект}} + S_{OAC}, \tag{17}$$

где через $S_{\text{сект}}$ здесь обозначена площадь сектора радиуса R, опирающегося на угол $2\pi - \angle C$.

Из (7) следует, что

$$S_{\text{сект}} = \sigma^2(2\pi - \angle C)\left(1-\cos\frac{R}{\sigma}\right) = 2\sigma^2\left(1-\cos\frac{R}{\sigma}\right)\left(\pi - \arcsin\frac{\sin\frac{r}{2\sigma}}{\sin\frac{R}{\sigma}}\right).$$

Тогда на основании (2), (8), (17) имеем

$$\alpha = 2\left(\pi - \arcsin\left(\operatorname{ctg}\frac{R}{\sigma}\operatorname{tg}\frac{r}{2\sigma}\right) - \cos\frac{R}{\sigma}\left(\pi - \arcsin\frac{\sin\frac{r}{2\sigma}}{\sin\frac{R}{\sigma}}\right)\right). \tag{18}$$

Используя (8), запишем равенство $T = d(l_{OA})$ (см. (2)) в виде

$$T = \sigma(2\pi - \angle C)\sin\frac{R}{\sigma} = 2\sigma\sin\frac{R}{\sigma}\left(\pi - \arcsin\frac{\sin\frac{r}{2\sigma}}{\sin\frac{R}{\sigma}}\right).$$

Введем параметр t по формуле (11). Тогда последнее равенство примет вид

$$\frac{T}{2\sigma}t = \pi - \arcsin\left(t\sin\frac{r}{2\sigma}\right). \tag{19}$$

Из (19) и (11) следует, что

$$T \leqslant 2\pi\sigma, \quad \max\left\{1, \frac{\pi\sigma}{T}\right\} \leqslant t \leqslant \frac{2\pi\sigma}{T}. \tag{20}$$

Заметим, что если $t = \frac{2\pi\sigma}{T}$, то $r = 0$, т. е. точки O и A совпадают. Кроме того, если $T = \pi\sigma$, то $t = 1$ равносильно тому, что A — диаметрально противоположная точка для O. В остальных случаях при $t = \max\left\{1, \frac{\pi\sigma}{T}\right\}$ точка C — середина кратчайшей OA.

Выражая r из формулы (19), получаем аналогичную (14) формулу

$$r(t) = 2\sigma\arcsin\left(\frac{1}{t}\sin\frac{Tt}{2\sigma}\right).$$

Легко видеть, что равенства (15) справедливы и в этом случае. Поэтому (18) запишется в виде

$$\alpha(t) = 2\left(\pi - \frac{T}{2\sigma}\sqrt{t^2-1} - \arcsin\frac{\sqrt{t^2-1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2 - \sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}\right). \tag{21}$$

При $T = \pi\sigma$ значение $\alpha(1)$ определяется из формулы (21) по непрерывности и равно π.

Непосредственными вычислениями получаем, что производная

$$\alpha'(t) = \frac{2\cos\frac{Tt}{2\sigma}\left(\sin\frac{Tt}{2\sigma} - \frac{Tt}{2\sigma}\cos\frac{Tt}{2\sigma}\right)}{\sqrt{t^2-1}\left(t^2 - \sin^2\frac{Tt}{2\sigma}\right)}$$

функции $\alpha(t)$, определенной по формуле (21), неположительна на отрезке $\left[\max\left\{1, \frac{\pi\sigma}{T}\right\}, \frac{2\pi\sigma}{T}\right]$ (см. (20)). Следовательно, на этом отрезке наименьшее значение функции $\alpha(t)$ равно

$$\alpha_{\min} = \alpha\left(\frac{2\pi\sigma}{T}\right) = 2\left(\pi - \sqrt{\pi^2 - \frac{T^2}{4\sigma^2}}\right).$$

Из определения системы координат $\{r, \alpha, \beta\}$ следует, что тогда должно выполняться неравенство $\alpha_{\min} \leqslant \pi$, откуда $T \leqslant \sqrt{3}\pi\sigma$. Значит, диаметр пространства V_K равен $\sqrt{3}\pi\sigma$, и сфера с центром в v_O радиуса $\sqrt{3}\pi\sigma$ — элемент с координатами $(0, \pi, 0)$.

Если $0 < T < \pi\sigma$, то наибольшее значение функции $\alpha(t)$ на отрезке $\left[\frac{\pi\sigma}{T}, \frac{2\pi\sigma}{T}\right]$ (см. (20)) равно

$$\alpha_{max} = \alpha\left(\frac{\pi\sigma}{T}\right) = \pi - \sqrt{\pi^2 - \frac{T^2}{\sigma^2}} < \pi,$$

т. е. на этом отрезке $\alpha(t) < \pi$.

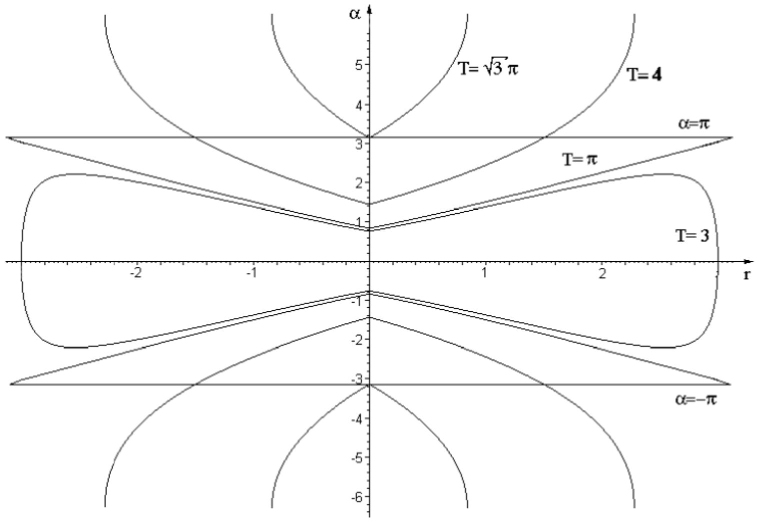

Рис. 2. Сферы на расслоении единичных векторов

Если $T = \pi\sigma$, то наибольшее значение функции $\alpha(t)$ на отрезке $\left[1, \frac{2\pi\sigma}{T}\right]$ (см. (20)) равно $\alpha_{max} = \alpha(1) = \pi$, т. е. на этом отрезке $\alpha(t) \leqslant \pi$.

Если $\pi\sigma < T < \sqrt{3}\pi\sigma$, то наибольшее значение функции $\alpha(t)$ на отрезке $\left[1, \frac{2\pi\sigma}{T}\right]$ (см. (20)) равно $\alpha_{max} = \alpha(1) = 2\pi$. В этом случае $\alpha(t) \leqslant \pi$ для любого $t \in [1, t^*]$, где $t^* \in \left(1, \frac{2\pi\sigma}{T}\right)$ — единственный корень уравнения $\alpha(t^*) = \pi$. Теорема 2 доказана.

В случае $\sigma = 1$ кривые S_T, $T = 3, \pi, 4, \sqrt{3}\pi$, построенные с помощью математического пакета Maple, изображены на рис. 2.

Сферы пространства V_K, $K = \sigma^2$, радиуса $0 < T < \sqrt{3}\pi\sigma$, $T \neq \pi\sigma$, гомеоморфны S^2. Сфера радиуса $T = \pi\sigma$ гомеоморфна S^2, у которой диаметрально противоположные точки экватора отождествлены. Сфера радиуса $T = \sqrt{3}\pi\sigma$, как отмечено в формулировке теоремы 2, гомеоморфна точке. При $0 < T < \pi\sigma$ сфера радиуса T имеет две конические особенности. Сфера радиуса $T = \pi\sigma$ диффеоморфна двум пересекающимся по окружности одинарным конусам, «направленным в разные стороны», на общей окружности которых отождествлены диаметрально противоположные точки. Сфера радиуса T, $\pi\sigma < T < \sqrt{3}\pi\sigma$, диффеоморфна двум пересекающимся по окружности одинарным конусам, «направленным в разные стороны».

§ 3. Сферы на расслоении единичных векторов плоскости Лобачевского

Рассмотрим случай, когда M_K — модель Лиувилля плоскости Лобачевского гауссовой кривизны $K = -\sigma^{-2}$, т. е. верхняя полуплоскость $y > 0$ плоскости $\mathbb{R}^2$, снабженная римановой метрикой d с линейным элементом

$$ds^2 = \frac{\sigma^2}{y^2}(dx^2 + dy^2). \tag{22}$$

Теорема 3. *Введем в пространстве V_K, $K = -\sigma^2$, систему координат $\{r, \alpha, \beta\}$ с началом в некотором элементе v_O. Тогда в этой системе координат* *сфера с центром v_O произвольного радиуса $T > 0$ есть поверхность вращения вокруг оси α той части замкнутой кривой S_T, определяемой совокупностью параметрических уравнений*

$$r = \pm r(t), \quad \alpha = \pm\alpha(t), \quad 0 \leqslant t < \frac{2\pi\sigma}{T},$$

$$r = \pm r(u), \alpha = \pm\alpha(u), \quad 0 < u \leqslant 1,$$

которая расположена в полосе $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$ на плоскости $\beta = 0$, где

$$r(t) = 2\sigma \ln\left(\frac{1}{t}\sin\frac{Tt}{2\sigma} + \frac{1}{t}\sqrt{t^2 + \sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}\right), \quad 0 \leqslant t < \frac{2\pi\sigma}{T},$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2\left(\frac{T\sqrt{1+t^2}}{2\sigma} - \arcsin\frac{\sqrt{t^2+1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2+\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}\right), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi\sigma}{T}, \\ 2\left(\frac{T\sqrt{1+t^2}}{2\sigma} - \pi + \arcsin\frac{\sqrt{t^2+1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2+\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}\right), & \text{если} \quad \frac{\pi\sigma}{T} < t < \frac{2\pi\sigma}{T}, \end{cases}$$

причем при $t = 0$ значения $r(0)$, $\alpha(0)$ определяются по непрерывности;

$$r(u) = 2\sigma \ln\left(\frac{1}{u}\operatorname{sh}\frac{Tu}{2\sigma} + \frac{1}{u}\sqrt{u^2 + \operatorname{sh}^2\frac{Tu}{2\sigma}}\right), \quad 0 < u \leqslant 1,$$

$$\alpha(u) = 2\left(\frac{T\sqrt{1-u^2}}{2\sigma} - \arcsin\frac{\sqrt{1-u^2}\operatorname{sh}\frac{Tu}{2\sigma}}{\sqrt{u^2+\operatorname{sh}^2\frac{Tu}{2\sigma}}}\right), \quad 0 < u \leqslant 1.$$

Доказательство. Так как плоскость Лобачевского M_K однородна и изотропна, для подсчета вместо фиксированного элемента $v_O \in V_K$ мы можем взять переменный элемент v_A.

Пусть v_A, v_B — элементы пространства V_K, расстояние между которыми в метрике (1) равно T, и v_B имеет координаты (r, α, β) в системе координат с началом в v_A. В силу (2) будем считать, что $\alpha \geqslant 0$. Без ограничения общности можно считать, что кратчайшая AB, соединяющая точки $A, B \in M_K$, — дуга евклидовой окружности радиуса 1 с центром $D(x_D, 0)$ на оси абсцисс и точки A, B имеют одну и ту же ординату (обозначим ее через h_0, $0 < h_0 \leqslant 1$). В силу утверждения 1 проекция l_{AB} кратчайшей, соединяющей элементы v_A и v_B, — кривая постоянной геодезической кривизны. Известно, что в модели Лиувилля M_K плоскости Лобачевского кривыми постоянной геодезической кривизны являются дуги евклидовых окружностей, и только они. Обозначим через C и R соответственно центр и радиус евклидовой окружности $S(C, A, B)$, дугой которой является l_{AB}. Кроме того, обозначим через S_1 площадь (в метрике (22)) фигуры, ограниченной кривой l_{AB} и евклидовым отрезком, соединяющим точки A и B, через S_2 — площадь (в метрике (22)) фигуры, ограниченной этим евклидовым отрезком и кратчайшей AB.

Возможны три расположения евклидовой окружности $S(C, A, B)$ на декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

1. Пусть $S(C, A, B)$ лежит в верхней полуплоскости $y > 0$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда $S(C, A, B)$ — окружность (в метрике (22)) плоскости Лобачевского M_K. В этом случае можно считать, что точка C имеет декартовы координаты (x_D, H), где $H \geqslant 1$, и l_{AB} — дуга окружности $S(C, A, B)$, опирающаяся на центральный угол $2\pi - \angle ACB$. Тогда $R < H$ и справедлива формула

$$R^2 = (H-h_0)^2 + 1 - h_0^2 = H^2 - 2Hh_0 + 1. \tag{23}$$

Найдем расстояние $d(AB)$ между точками A и B по формуле

$$d(AB) = 2\sigma \int\limits_{h_0}^{1} \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}} = -2\sigma \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right|\Bigg|_{h_0}^{1} = 2\sigma \operatorname{Arch}\frac{1}{h_0}.$$

Здесь и далее при вычислении интегралов используем [11].

Так как $d(AB) = r$ (см. (2)), то

$$h_0 = \left(\operatorname{ch}\frac{r}{2\sigma}\right)^{-1}. \tag{24}$$

Найдем длину кривой l_{AB} по формуле

$$d(l_{AB}) = 2R\sigma \int\limits_{h_0}^{H+R} \frac{dy}{y\sqrt{R^2-(H-y)^2}} = \frac{2R\sigma}{\sqrt{H^2-R^2}} \arcsin \frac{Hy+R^2-H^2}{yR}\Bigg|_{h_0}^{H+R}$$

$$= \frac{2R\sigma}{\sqrt{H^2-R^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{Hh_0+R^2-H^2}{h_0R}\right). \tag{25}$$

Применяя формулы (22), (25), (23) и условие $d(l_{AB}) = T$ (см. (2)), находим S_1:

$$\frac{S_1}{2\sigma^2} = \int\limits_{h_0}^{H+R} \frac{\sqrt{R^2-(H-y)^2}}{y^2}dy = \frac{\sqrt{R^2-(H-y)^2}}{-4}\Bigg|_{h_0}^{H+R} - \int\limits_{h_0}^{H+R} \frac{dy}{\sqrt{R^2-(H-y)^2}}$$

$$+ H\int\limits_{h_0}^{H+R} \frac{dy}{y\sqrt{R^2-(H-y)^2}} = \frac{\sqrt{R^2-(H-h_0)^2}}{h_0} - \arcsin\frac{y-H}{R}\Bigg|_{h_0}^{H+R} + \frac{HT}{2R\sigma}$$

$$= \frac{\sqrt{1-h_0^2}}{h_0} - \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{h_0-H}{\sqrt{1-2Hh_0+H^2}} + \frac{TH}{2\sigma\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}. \tag{26}$$

Далее, в силу (22)

$$\frac{S_2}{2\sigma^2} = \int\limits_{h_0}^{1} \frac{\sqrt{1-y^2}}{y^2}dy = \left(-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} - \arcsin y\right)\Bigg|_{h_0}^{1} = \frac{\sqrt{1-h_0^2}}{h_0} + \arcsin h_0 - \frac{\pi}{2}. \tag{27}$$

Следовательно, как нетрудно видеть, площадь двуугольника Ω, ограниченного кривыми l_{AB} и AB, равна

$$S(\Omega) = S_1 - S_2$$

$$= 2\sigma^2\left(\frac{TH}{2\sigma\sqrt{H^2-2Hh_0+1}} - \arcsin\frac{H-h_0}{\sqrt{H^2-2Hh_0+1}} - \arcsin h_0\right).$$

Так как

$$\left(\frac{H-h_0}{\sqrt{H^2-2Hh_0+1}}\right)^2 + h_0^2 - 1 = (Hh_0-1)\frac{h_0(H-h_0)+1-h_0^2}{(H-h_0)^2+1-h_0^2},$$

знак левой части последней формулы совпадает со знаком выражения $Hh_0 - 1$. Легко видеть, что

$$\frac{(H-h_0)\sqrt{1-h_0^2}}{\sqrt{H^2-2Hh_0+1}} + h_0\sqrt{1-\frac{(H-h_0)^2}{H^2-2Hh_0+1}} = \frac{H\sqrt{1-h_0^2}}{\sqrt{H^2-2Hh_0+1}}.$$

Поэтому

$$S(\Omega) = \begin{cases} 2\sigma^2\Big(\frac{TH}{2\sigma\sqrt{H^2-2Hh_0+1}} - \arcsin\frac{H\sqrt{1-h_0^2}}{\sqrt{H^2-2Hh_0+1}}\Big), & \text{если} \quad Hh_0 \leqslant 1, \\ 2\sigma^2\Big(\frac{TH}{2\sigma\sqrt{H^2-2Hh_0+1}} - \pi + \arcsin\frac{H\sqrt{1-h_0^2}}{\sqrt{H^2-2Hh_0+1}}\Big), & \text{если} \quad Hh_0 > 1. \end{cases} \tag{28}$$

Используя (25) и (23), запишем равенство $d(l_{AB}) = T$ (см. (2)) в виде

$$\frac{2\sigma\sqrt{H^2-2Hh_0+1}}{\sqrt{2Hh_0-1}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1-Hh_0}{h_0\sqrt{H^2-2Hh_0+1}}\right) = T. \tag{29}$$

Введем параметр t по формуле

$$t = \sqrt{\frac{2Hh_0-1}{H^2-2Hh_0+1}}.$$

Тогда (29) примет вид

$$\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2\sigma}t = \arcsin\frac{1-Hh_0}{h_0\sqrt{H^2-2Hh_0+1}}.$$

Следовательно,

$$0 < t \leqslant \frac{\pi\sigma}{T}, \quad \text{если} \quad Hh_0 \leqslant 1; \quad \frac{\pi\sigma}{T} < t < \frac{2\pi\sigma}{T}, \quad \text{если} \quad Hh_0 > 1. \tag{30}$$

Из определения параметра t последовательно находим

$$h_0 = \frac{t^2H^2+t^2+1}{2H(1+t^2)}, \quad 1 - Hh_0 = \frac{1+t^2-t^2H^2}{2(1+t^2)}, \quad H^2-2Hh_0+1 = \frac{H^2}{1+t^2}.$$

Тогда уравнение (29) запишется в виде

$$\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2\sigma}t = \arcsin\frac{(1+t^2-t^2H^2)\sqrt{1+t^2}}{1+t^2+t^2H^2}.$$

Выражая из последнего равенства H^2, получаем

$$H^2 = \frac{(1+t^2)(\sqrt{1+t^2}-\cos\frac{Tt}{2\sigma})}{t^2(\sqrt{1+t^2}+\cos\frac{Tt}{2\sigma})}.$$

Следовательно,

$$t^2H^2+t^2+1 = \frac{2(\sqrt{1+t^2})^3}{\sqrt{1+t^2}+\cos\frac{Tt}{2\sigma}}, \quad 4H^2(1+t^2)^2 = \frac{4(1+t^2)^3(\sqrt{1+t^2}-\cos\frac{Tt}{2\sigma})}{t^2(\sqrt{1+t^2}+\cos\frac{Tt}{2\sigma})},$$

и на основании (25) находим

$$\operatorname{sh}\frac{r}{2\sigma} = \sqrt{\frac{1}{h_0^2}-1} = \frac{\sqrt{4H^2(1+t^2)^2-(t^2H^2+t^2+1)^2}}{t^2H^2+t^2+1} = \frac{1}{t}\sin\frac{Tt}{2\sigma}. \tag{31}$$

Разрешая последнее уравнение относительно r, получаем

$$r(t) = 2\sigma \ln\left(\frac{1}{t}\sin\frac{Tt}{2\sigma} + \frac{1}{t}\sqrt{t^2+\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}\right). \tag{32}$$

Из (31) и определения параметра t следует, что

$$h_0 = \frac{t}{\sqrt{t^2+\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}, \quad \frac{H\sqrt{1-h_0^2}}{\sqrt{H^2-2Hh_0+1}} = \sqrt{1-h_0^2}\sqrt{1+t^2} = \frac{\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2+\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}.$$

Тогда в силу формул (2), (29), (31)

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2\left(\frac{T\sqrt{1+t^2}}{2\sigma} - \arcsin\frac{\sqrt{t^2+1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2+\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}\right), & \text{если} \quad 0 < t \leqslant \frac{\pi\sigma}{T}, \\ 2\left(\frac{T\sqrt{1+t^2}}{2\sigma} - \pi + \arcsin\frac{\sqrt{t^2+1}\sin\frac{Tt}{2\sigma}}{\sqrt{t^2+\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}}}\right), & \text{если} \quad \frac{\pi\sigma}{T} < t < \frac{2\pi\sigma}{T}. \end{cases} \tag{33}$$

Можно показать, что производная функции $\alpha(t)$ на промежутке $(0, \frac{2\pi\sigma}{T})$ равна

$$\alpha'(t) = 2\frac{\cos\frac{Tt}{2\sigma}\left(\sin\frac{Tt}{2\sigma} - \frac{Tt}{2\sigma}\cos\frac{Tt}{2\sigma}\right)}{\left(t^2+\sin^2\frac{Tt}{2\sigma}\right)\sqrt{t^2+1}}.$$

Легко видеть, что $\alpha'(t) \geqslant 0$ (т. е. функция $\alpha(t)$ не убывает) на промежутке $(0, \frac{\pi\sigma}{T}]$. Следовательно, для всякого $t \in (0, \frac{\pi\sigma}{T}]$ выполнены неравенства

$$\alpha(t) > \lim_{t\to 0+0}\alpha(t) = \frac{T}{\sigma} - 2\arcsin\frac{T}{\sqrt{T^2+4\sigma^2}}, \quad \alpha(t) \leqslant \alpha\left(\frac{\pi\sigma}{T}\right) = \frac{\sqrt{T^2+\pi^2\sigma^2}}{\sigma} - \pi.$$

Нетрудно проверить, что функции $\frac{T}{\sigma} - 2\arcsin\frac{T}{\sqrt{T^2+4\sigma^2}}$ и $\frac{1}{\sigma}\sqrt{T^2+\pi^2\sigma^2} - \pi$ переменного T возрастают на промежутке $(0, +\infty)$. Так как $|\alpha| \leqslant \pi$ по определению координаты α, необходимо $T < T^*$, где T^* — единственный корень уравнения

$$2\left(\frac{T^*}{2\sigma} - \arcsin\frac{T^*}{\sqrt{(T^*)^2+4\sigma^2}}\right) = \pi.$$

Далее, если $\alpha(\frac{\pi\sigma}{T}) \leqslant \pi$, что равносильно условию $T \leqslant \sqrt{3}\pi\sigma$, то $\alpha(t) \leqslant \pi$ для всякого $t \in (0, \frac{\pi\sigma}{T}]$. Если $\sqrt{3}\pi\sigma < T < T^*$, то $\alpha(t) \leqslant \pi$ на промежутке $(0, t_1^*]$, где $t_1^* \in (0, \frac{\pi\sigma}{T}]$ — единственный корень уравнения $\alpha(t_1^*) = \pi$.

Легко видеть, что $\alpha'(t) < 0$ (т. е. функция $\alpha(t)$ убывает) на промежутке $(\frac{\pi\sigma}{T}, \frac{2\pi\sigma}{T})$. Следовательно, для всякого $t \in (\frac{\pi\sigma}{T}, \frac{2\pi\sigma}{T})$ выполнены неравенства

$$\alpha(t) > \lim_{t\to 2\pi\sigma/T}\alpha(t) = \frac{\sqrt{T^2+4\pi^2\sigma^2}}{\sigma} - 2\pi, \alpha(t) < \lim_{t\to\pi\sigma/T+0}\alpha(t) = \frac{\sqrt{T^2+\pi^2\sigma^2}}{\sigma} - \pi.$$

Так как $|\alpha| \leqslant \pi$ по определению координаты α, имеем

$$\frac{1}{\sigma}\sqrt{T^2+4\pi^2\sigma^2} - 2\pi < \pi,$$

что равносильно условию $T < \sqrt{5}\pi\sigma$. Далее, если $T \leqslant \sqrt{3}\pi\sigma$, то $\alpha(t) < \pi$ для всякого $t \in (\frac{\pi\sigma}{T}, \frac{2\pi\sigma}{T})$. Если $\sqrt{3}\pi\sigma < T < \sqrt{5}\pi\sigma$, то $\alpha(t) \leqslant \pi$ на промежутке $(\frac{\pi\sigma}{T}, t_2^*]$, где $t_2^* \in (\frac{\pi\sigma}{T}, \frac{2\pi\sigma}{T})$ — единственный корень уравнения $\alpha(t_2^*) = \pi$.

2. Предположим, что евклидова окружность $S(C,A,B)$ касается оси абсцисс, т. е. является орициклом плоскости Лобачевского M_K. Тогда точка C имеет декартовы координаты (x_D,R). Легко видеть, что выполнено соотношение $2Rh_0=1$. Используя последнее равенство, найдем длину кривой l_{AB}:

$$d(l_{AB})=2R\sigma\int\limits_{h_0}^{2R}\frac{dy}{y\sqrt{2Ry-y^2}}=-\frac{2\sigma}{y}\sqrt{2Ry-y^2}\Big|_{h_0}^{2R}=\frac{2\sigma}{h_0}\sqrt{1-h_0^2}.$$

На основании (2) $d(l_{AB})=T$. Значит,

$$h_0=\frac{2\sigma}{\sqrt{T^2+4\sigma^2}},\quad R=\frac{1}{2h_0}=\frac{\sqrt{T^2+4\sigma^2}}{4\sigma}. \tag{34}$$

Так как формула (24) справедлива и в этом случае, то в силу (34)

$$r=2\sigma\ln\left(\frac{1}{h_0}+\frac{\sqrt{1-h_0^2}}{h_0}\right)=2\sigma\ln\left(\frac{T}{2\sigma}+\frac{\sqrt{T^2+4\sigma^2}}{2\sigma}\right). \tag{35}$$

Из (32) следует, что $r=\lim\limits_{t\to 0}r(t)$.

Легко видеть, что формула (27) для нахождения S_2 выполнена в нашем случае. Вычислим S_1:

$$\frac{S_1}{2\sigma^2}=\int\limits_{h_0}^{2R}\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{y^2}dy=-\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{y}\Big|_{h_0}^{2R}-\int\limits_{h_0}^{2R}\frac{dy}{\sqrt{2Ry-y^2}}+R\int\limits_{h_0}^{2R}\frac{dy}{y\sqrt{2Ry-y^2}}$$
$$=\frac{2\sqrt{1-h_0^2}}{h_0}+\arcsin\frac{R-y}{R}\Big|_{h_0}^{2R}=\frac{2\sqrt{1-h_0^2}}{h_0}-\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{R-h_0}{R}.$$

Следовательно, в силу (33) и (34) площадь двуугольника Ω, ограниченного кривыми l_{AB} и AB, равна

$$S(\Omega)=S_1-S_2=2\sigma^2\left(\frac{T}{2\sigma}-\left(\arcsin\frac{T^2-4\sigma^2}{T^2+4\sigma^2}+\arcsin\frac{2\sigma}{\sqrt{T^2+4\sigma^2}}\right)\right).$$

Так как при $T>2\sigma$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{T^2-4\sigma^2}{T^2+4\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{T^2+4\sigma^2}}\right)^2-1=\frac{4\sigma^2(4\sigma^2-3T^2)}{(T^2+4\sigma^2)^2}<0,$$

в силу (2)

$$\alpha=2\left(\frac{T}{2\sigma}-\arcsin\frac{T}{\sqrt{T^2+4\sigma^2}}\right). \tag{36}$$

Из (33) следует, что $\alpha=\lim\limits_{t\to 0}\alpha(t)$.

3. Пусть теперь евклидова окружность $S(C,A,B)$ пересекает ось абсцисс, не касаясь ее. Тогда без ограничения общности можно считать, что точка C имеет декартовы координаты $(x_D,-H)$, где $H\geqslant 0$, и l_{AB} — дуга окружности $S(C,A,B)$, опирающаяся на центральный угол $\angle AOB$. Легко видеть, что формула (23) справедлива и в этом случае.

Длина кривой l_{AB} в метрике (22) равна

$$d(l_{AB}) = \int\limits_{h_0}^{H+R} \frac{2R\sigma dy}{y\sqrt{R^2-(H-y)^2}} = \frac{-2R\sigma}{\sqrt{R^2-H^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{R^2-H^2}\sqrt{R^2-(H-y)^2}}{y}\right.$$

$$\left.+H+\frac{R^2-H^2}{y}\right|\Bigg|_{h_0}^{R+H} = \frac{2\sigma\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}{\sqrt{1-2Hh_0}} \ln\frac{1-Hh_0+\sqrt{1-2Hh_0}\sqrt{1-Hh_0^2}}{h_0\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}.$$

Так как

$$\left(\frac{1-Hh_0}{h_0\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}\right)^2 - 1 = \frac{(1-2Hh_0)(1-h_0^2)}{h_0^2(1-2Hh_0+H^2)},$$

окончательно получаем

$$d(l_{AB}) = \frac{2\sigma\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}{\sqrt{1-2Hh_0}}\operatorname{Arch}\frac{1-Hh_0}{h_0\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}. \qquad (37)$$

Легко видеть, что формулы (26) и (27) для вычисления площадей S_1 и S_2 верны и в этом случае. Тогда площадь двуугольника Ω, ограниченного кривыми l_{AB}, AB, можно найти по формуле

$$S(\Omega) = S_2 - S_1 = 2\sigma^2\left(\arcsin h_0 - \arcsin\frac{h_0-H}{\sqrt{1-2Hh_0+H^2}} - \frac{TH}{2\sigma\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}\right)$$

$$= 2\sigma^2\left(\arcsin\frac{H\sqrt{1-h_0^2}}{\sqrt{1-2Hh_0+H^2}} - \frac{TH}{2\sigma\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}\right). \qquad (38)$$

На основании (2) $d(l_{AB}) = T$. Используя (37), запишем это равенство в виде

$$\frac{2\sigma\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}{\sqrt{1-2Hh_0}}\operatorname{Arch}\frac{1-Hh_0}{h_0\sqrt{1-2Hh_0+H^2}} = T. \qquad (39)$$

Введем параметр u по формуле

$$u = \sqrt{\frac{1-2Hh_0}{1-2Hh_0+H^2}}, \quad 0 < u \leqslant 1.$$

Тогда последовательно находим

$$h_0 = \frac{1-u^2-u^2H^2}{2H(1-u^2)}, \quad 1-Hh_0 = \frac{1-u^2+u^2H^2}{2(1-u^2)}, \quad 1-2Hh_0+H^2 = \frac{H^2}{1-u^2}.$$

Следовательно, (39) можно переписать в виде

$$\frac{1-u^2+u^2H^2}{1-u^2-u^2H^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\operatorname{ch}\frac{Tu}{2\sigma}.$$

Выражая из последнего равенства H^2, получаем

$$H^2 = \frac{(1-u^2)(\operatorname{ch}\frac{Tu}{2\sigma} - \sqrt{1-u^2})}{u^2(\operatorname{ch}\frac{Tu}{2\sigma} + \sqrt{1-u^2})}.$$

Тогда

$$1-u^2-u^2H^2 = \frac{2(\sqrt{1-u^2})^3}{\operatorname{ch}\frac{Tu}{2\sigma} + \sqrt{1-u^2}}, \quad 4H^2(1-u^2)^2 = \frac{4(1-u^2)^3(\operatorname{ch}\frac{Tu}{2\sigma} - \sqrt{1-u^2})}{u^2(\operatorname{ch}\frac{Tu}{2\sigma} + \sqrt{1-u^2})},$$

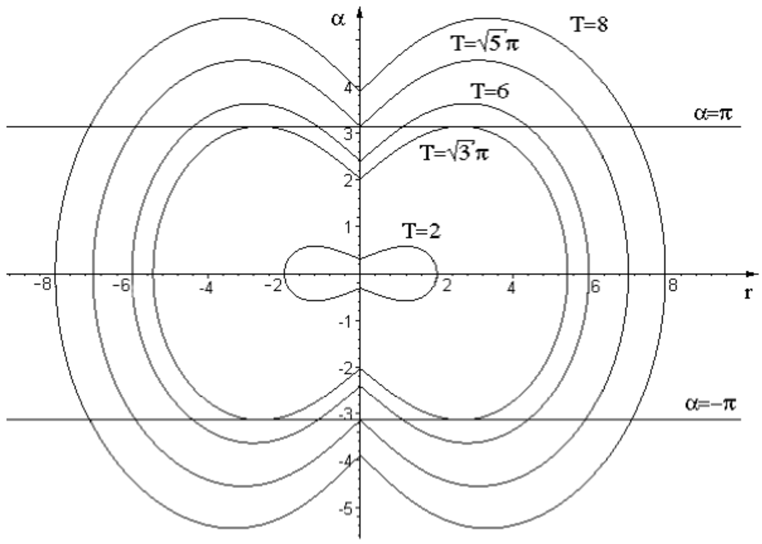

Рис. 3. Сферы на расслоении единичных векторов плоскости Лобачевского.

и с помощью формулы (24), которая также справедлива в этом случае, находим

$$\operatorname{sh}\frac{r}{2\sigma}=\sqrt{\frac{1}{h_0^2}-1}=\frac{\sqrt{4H^2(1-u^2)^2-(1-u^2-u^2H^2)^2}}{1-u^2-u^2H^2}=\frac{1}{u}\operatorname{sh}\frac{Tu}{2\sigma}. \tag{40}$$

Разрешая последнее уравнение относительно r, получаем

$$r(u)=2\sigma\ln\left(\frac{1}{u}\operatorname{sh}\frac{Tu}{2\sigma}+\frac{1}{u}\sqrt{u^2+\operatorname{sh}^2\frac{Tu}{2\sigma}}\right). \tag{41}$$

В силу (32) справедливо равенство $r=\lim\limits_{u\to 0}r(u)$.

Из (40) и определения параметра u следует, что

$$h_0=\frac{u}{\sqrt{u^2+\operatorname{sh}^2\frac{Tu}{2\sigma}}},\qquad \frac{H\sqrt{1-h_0^2}}{\sqrt{1-2Hh_0+H^2}}=-\sqrt{1-h_0^2}\sqrt{1-u^2}=-\frac{\operatorname{sh}\frac{Tu}{2\sigma}}{\sqrt{u^2+\operatorname{sh}^2\frac{Tu}{2\sigma}}}.$$

Тогда вследствие (2), (38)

$$\alpha(u)=2\left(\frac{T\sqrt{1-u^2}}{2\sigma}-\arcsin\frac{\sqrt{1-u^2}\operatorname{sh}\frac{Tu}{2\sigma}}{\sqrt{u^2+\operatorname{sh}^2\frac{Tu}{2\sigma}}}\right),\quad 0<u\leqslant 1. \tag{42}$$

Из (36) следует, что $\alpha=\lim\limits_{u\to 0}\alpha(u)$.

Непосредственными вычислениями получаем, что производная

$$\alpha'(u)=-\frac{2\operatorname{ch}\frac{Tu}{2\sigma}\left(\frac{Tu}{2\sigma}\operatorname{ch}\frac{Tu}{2\sigma}-\operatorname{sh}\frac{Tu}{2\sigma}\right)}{\left(u^2+\operatorname{sh}^2\frac{Tu}{2\sigma}\right)\sqrt{1-u^2}}$$

функции $\alpha(u)$ на промежутке $(0,1]$ отрицательна, т. е. $\alpha(u)$ убывает. Следовательно, для всякого $u\in(0,1]$ справедливы неравенства (см. также (36))

$$\alpha(u)\geqslant\alpha(1)=0,\quad \alpha(u)<\lim_{u\to 0}\alpha(u)=\alpha.$$

Если $T \leqslant \sqrt{3}\pi\sigma$, то $\alpha(u) < \pi$ для всякого $u \in (0,1]$. Если $T > \sqrt{3}\pi\sigma$, то $\alpha(u) \leqslant \pi$ на промежутке $(0,u^*]$, где $u^* \in (0,1)$ — единственный корень уравнения $\alpha(u^*) = \pi$. Теорема 3 доказана.

В случае $\sigma = 1$ кривые S_T, $T = 2, \sqrt{3}\pi, 6, \sqrt{5}\pi, 8$, построенные с помощью математического пакета Maple, изображены на рис. 3.

Все пространство $V_K = SL_2\mathbb{R}$ гомеоморфно открытому полноторию. При переходе к универсальной накрывающей пространства $SL_2\mathbb{R}$ все сферы гомеоморфны S^2 и имеют те же две конические особенности, что и сферы на группе Гейзенберга.

При $T < \sqrt{3}\pi\sigma$ сфера пространства V_K радиуса T гомеоморфна S^2 и имеет две конические особенности. Сфера радиуса $T = \sqrt{3}\pi\sigma$ гомеоморфна S^2, у которой отождествлены точки, имеющие одинаковую «географическую» долготу, двух симметричных относительно экваториальной плоскости параллелей. При $\sqrt{3}\pi\sigma < T < \sqrt{5}\pi\sigma$ сфера радиуса T несвязна и состоит из двух кусков, один из которых гомеоморфен S^2, а другой — T^2; в случае $T = \sqrt{5}\pi\sigma$ сфера S^2 вырождается в точку. Сфера радиуса $T > \sqrt{5}\pi\sigma$ гомеоморфна T^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вершик А. М., Граничина О. А.* Редукция неголономных вариационных задач к изопериметрическим и связности в главных расслоениях // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 37–44.
2. *Берестовский В. Н.* Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Лобачевского // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 3–11.
3. *Грушин В. В.* Об одном классе гипоэллиптических операторов // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 3. С. 456–473.
4. *Грушин В. В.* Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии // Мат. сб. 1971. Т. 84, № 2. С. 163–195.
5. *Bella¨che A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Progress in Mathematics. V. 144: Sub-Riemannian Geometry (ed. Bella¨che A., Risler J.-J.). Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
6. *Jurdjevic.* Optimal Control, Geometry, and Mechanics Mathematical Control Theory (ed. Baillieul J., Willems J. C.). New York: Springer-Verl, 1999.
7. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16: Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 5–85 (Итоги науки и техники).
8. *Sasaki S.* On differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. I // Tohôku Math. J. 1958. V. 10. P. 338–345.
9. *Sasaki S.* On differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. II // Tohôku Math. J. 1962. V. 14. P. 146–155.
10. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
11. *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 20 января 2000 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Омский гос. университет, кафедра математического моделирования, Омск
berest@univer.omsk.su

Зубарева Ирина Александровна
Омский гос. университет, кафедра математического моделирования, Омск
gribano@univer.omsk.su;   kit@omskcity.com