Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.55

ИДЕАЛЫ СВОБОДНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ И ПРИМИТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

И. В. Чирков, М. А. Шевелин

Аннотация: Устанавливаются необходимые и достаточные условия на элементы свободной метабелевой алгебры Ли конечного ранга, при выполнении которых каждый эндоморфизм этой алгебры однозначно определяется своими значениями на них. Библиогр. 2.

1. Введение. В статье М. Эванса [1] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть q — примитивный элемент свободной метабелевой группы G с n свободными порождающими, и предположим, что q содержится в нормальном замыкании в G некоторого элемента $y \in G$. Тогда q сопряжен с y или с y^{-1}.*

В нашей статье доказывается аналогичная теорема для свободных метабелевых алгебр Ли.

Пусть K — произвольное поле, M_n — свободная метабелева алгебра Ли над полем K со свободными порождающими $y_1, \dots, y_n$. Обозначим через $U = U(M_n)$ универсальную обертывающую для M_n, $\varepsilon : U \to K$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр, определенный правилом $y_i\varepsilon = 0$. Обозначим также через $\bar{\ } : M_n \to M_n/M_n'$ естественный гомоморфизм; положим $\bar{y}_i = x_i$. Напомним, что $U(M_n/M_n')$ изоморфна кольцу многочленов $P = K[x_1, \dots, x_n]$. Гомоморфизм $\bar{\ }$ продолжается до гомоморфизма ассоциативных алгебр $\bar{\ } : U \to P$. Свободный правый модуль ранга n над P с базисом $e_1, \dots, e_n$ будем обозначать через W. Как известно, элемент алгебры M_n называется примитивным, если его можно включить в некоторую систему свободных порождающих. Идеал, порожденный в M_n множеством X, будем обозначать через $\langle X \rangle$.

Пространство M_n' наделяется естественной структурой P-модуля (действие обозначаем нижней точкой), согласно которой $c.x_i = c.(y_i + M_n') = [c, y_i]$ для $c \in M_n'$, $y_i + M_n' \in M_n/M_n'$. Кроме того, правое регулярное действие M_n на себе продолжается согласно универсальному свойству U до действия U на M_n:

$$m \circ (m_1 m_2 \dots m_k) = [\dots[[m, m_1], m_2], \dots, m_k], \quad m \circ 1 = m$$

для $m \in M_n,\ m_1 \dots m_k \in U(M_n)$.

Определение. Автоморфизм λ алгебры M_n будем называть *внутренним*, если λ действует на порождающие следующим образом:

$$y_i\lambda = y_i \circ (\xi + c).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00674).

Здесь $c \in M_n'$, $\xi \in K \setminus \{0\}$.

Упомянутое в определении отображение на самом деле является автоморфизмом. Действительно, $M_n \circ c^2 = 0$ влечет для $i = 1, \dots, n$ равенства

$$y_i \circ (\xi + c)(\xi^{-1} - \xi^{-2}c) = y_i.$$

Это доказывает инъективность.

Чтобы проверить сюръективность, обозначим $z_i = y_i\lambda$. Нужно убедиться, что подалгебра, порожденная $z_1, \dots, z_n$, содержит y_i $(i = 1, \dots, n)$. Так как

$$y_i = \xi^{-1}z_i - \xi^{-1}[y_i, c] = \xi^{-1}z_i - \xi^{-2}[\xi y_i + [y_i, c], c] = \xi^{-1}z_i - \xi^{-2}[z_i, c]$$

и $c \in M_n'$, достаточно установить, что M_n' содержится в подалгебре, порожденной $z_1, \dots, z_n$. Но это действительно так, ибо

$$\begin{aligned}[z_i, z_j] &= [\xi y_i + [y_i, c], \xi y_j + [y_j, c]] = \xi^2[y_i, y_j] + \xi[y_i, [y_j, c]] - \xi[y_j, [y_i, c]]\\ &= \xi^2[y_i, y_j] + \xi[[c, y_j], y_i] - \xi[[c, y_i], y_j] = \xi^2[y_i, y_j] - \xi[c, [y_i, y_j]] = \xi^2[y_i, y_j].\end{aligned}$$

Отметим также, хотя это нам и не понадобится, что внутренние автоморфизмы образуют абелеву нормальную подгруппу в группе автоморфизмов алгебры M_n.

Теперь можно сформулировать основной результат.

Теорема 2. *Пусть z — примитивный элемент алгебры M_n, $y \in M_n$. Если $z \in \langle y \rangle$, то элементы z и y сопряжены при помощи внутреннего автоморфизма алгебры M_n.*

Мы будем пользоваться конструкцией В. А. Артамонова, изложенной, например, в [2]. Коротко приведем ее здесь.

Обозначим через P_0 идеал в P, порожденный $x_1, \dots, x_n$. Пусть $l : W \to P_0$ — эпиморфизм P-модулей, определенный правилом: $l(e_i) = x_i$. На модуле W вводится операция умножения: $ab = al(b) - bl(a)$ для $a, b \in W$, превращающая W в метабелеву K-алгебру Ли. Положим $L = \{a \in W \mid l(a) \in Kx_1 + \dots + Kx_n\}$.

Теорема 3 [2]. *L является свободной метабелевой алгеброй Ли с множеством свободных порождающих $e_1, \dots, e_n$.*

Следствие [2]. *Коммутант L' алгебры L совпадает с* $\mathrm{Ker}(l)$.

В частности, P-модуль M_n' является подмодулем свободного модуля и, следовательно, есть модуль без кручения, а действие P на W продолжает естественное действие P на M_n'. Мы обозначаем буквой θ вложение M_n в W, при котором $y_i\theta = e_i$.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть $y \in M_n$, z — примитивный элемент M_n, z принадлежит идеалу $\langle y \rangle$, порожденному в M_n элементом y. Можно считать, что $z = y_1$. Факторизуя по коммутанту и заменяя, если необходимо, y пропорциональным элементом, получаем $y = y_1 + c$ $(c \in M_n')$. Если $c = 0$, то доказывать нечего, поэтому далее считаем, что $c \neq 0$. Так как $y_1 \in \langle y \rangle$, для некоторого $f \in U$ такого, что $f\varepsilon = 0$, будет $y_1 = y_1 + c + (y_1 + c) \circ f$; следовательно, $(y_1 + c) \circ f = y_1 \circ c_1 + y_1 \circ f' + c \circ f'$, где $c_1 \in M_n'$, f' — линейная комбинация непустых произведений y_j $(1 \leq j \leq n)$, в частности, $f'\varepsilon = 0$. Применим к равенству $c + (y_1 + c) \circ f = 0$ вложение θ. Пусть

$$c\theta = \sum_{1 \leq i \leq n} e_i\alpha_i,\ \alpha_i \in P, \quad c_1\theta = \sum_{1 \leq i \leq n} e_i\beta_i,\ \beta_i \in P, \quad f' = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i f_i',\ f_i' \in U.$$

Тогда
$$\sum_{1\le i\le n} e_i\alpha_i - \sum_{1\le i\le n} e_i\beta_i x_1 + e_1\bar f' - \sum_{1\le i\le n} e_i x_1 \bar f_i' + \sum_{1\le i\le n} e_i\alpha_i\bar f' = 0$$
согласно определению операции умножения на модуле W. Собирая коэффициенты при e_i, получим
$$\alpha_i - x_1\beta_i - x_1\bar f_i' + \alpha_i\bar f' = 0 \quad (2\le i\le n),$$
$$\alpha_1 - x_1\beta_1 + \bar f' - x_1\bar f_1' + \alpha_1\bar f' = 0.$$
Первое равенство влечет $(1+\bar f')\alpha_i \in x_1P$ и, следовательно, $\alpha_i = x_1\alpha_i'$ ($\alpha_i' \in P$, $i=2,\dots,n$), поскольку $\bar f'\varepsilon = 0$. Из второго равенства следует, что $\alpha_1 + \bar f' + \alpha_1\bar f' \in x_1P$, поэтому $(1+\alpha_1)(1+\bar f') \equiv 1(\operatorname{mod} x_1P)$. Обратимыми элементами в кольце P/x_1P являются только скаляры, тем самым $1+\alpha_1 = \xi + x_1\alpha_1'$ ($\xi \in K\setminus\{0\}$). Так как $c\in M_n'$, по следствию из теоремы 3
$$0 = \sum_{1\le i\le n} \alpha_i x_i = (\xi - 1 + x_1\alpha_1')x_1 + \sum_{2\le i\le n} \alpha_i' x_1 x_i.$$
Следовательно, $\sum\limits_{1\le i\le n} \alpha_i' x_i = 1-\xi$, откуда $\xi = 1$, $\alpha_1 = x_1\alpha_1'$ для некоторого $\alpha_1' \in P$. Иными словами, $c \in \langle y_1\rangle$. Поэтому мы можем написать $c = y_1\circ g$ ($g\in U$), $y_1 = y_1 + y_1\circ g + (y_1 + y_1\circ g)\circ f$, что эквивалентно равенству $y_1\circ(g+f+gf) = 0$. Это означает, что правое умножение на f действует на y_1 нильпотентно, скажем, $y_1\circ f^k = 0$. Так как $y_1\circ f\in M_n'$, то $y_1\circ f^k = (y_1\circ f).\bar f^{k-1}$.

Если $y_1\circ f = 0$, то $c + c\circ f = c.(1+\bar f) = 0$, что невозможно, поскольку $\bar f\varepsilon = 0$, $c\ne 0$ и W — P-модуль без кручения.

Снова используем отсутствие кручения и целостность, чтобы получить равенства $\bar f^{k-1} = 0$ и $\bar f = 0$. Поэтому $f\in M_n'U$. Но так как любой элемент $M_n'U$ действует на M_n так же, как некоторый элемент M_n' (из-за тождества метабелевости), можем считать, что $f\in M_n'$. Поскольку $y_1 = y\circ(1+f)$, то $y_1 = y\lambda$ для внутреннего автоморфизма λ, определенного правилом $y_i\lambda = y_i\circ(1+f)$ $(1\le i\le n)$. Теорема доказана.

3. Проблема сопряженности. Отметим, что проблема сопряженности элементов алгебры M_n при помощи внутреннего автоморфизма решается положительно. В самом деле, пусть $s_1, s_2\in M_n$, $s_1 = l_1 + c_1$, $s_2 = l_2 + c_2$, где l_1, l_2 — линейные комбинации порождающих, а c_1, c_2 — элементы из коммутанта. Факторизуя по коммутанту, убеждаемся, что необходимым условием сопряженности является пропорциональность элементов l_1 и l_2. Поскольку умножение на ненулевой скаляр является внутренним автоморфизмом, считаем, что $l_1 = l_2$. Если $l_1 = 0$, то элементы s_1 и s_2 сопряжены тогда и только тогда, когда они совпадают. Если же $l_1\ne 0$, то можно считать, что l_1 является свободным порождающим y_1. Предположим, что $s_1\circ(1+c) = s_2$, где $c\in M_n'$. Отсюда следует, что $[y_1, c] = c_2 - c_2$. Применим вложение θ. Пусть
$$c\theta = \sum_{1\le i\le n} e_i\alpha_i, \quad c_1\theta = \sum_{1\le i\le n} e_i\beta_i, \quad c_2\theta = \sum_{1\le i\le n} e_i\gamma_i.$$
Тогда
$$\Big(\sum_{1\le i\le n} e_i\alpha_i\Big)x_1 = \sum_{1\le i\le n} e_i(\gamma_i - \beta_i).$$

Приравнивая коэффициенты при e_i, получаем $\alpha_i x_1 = \gamma_i - \beta_i$ $(i = 1, \dots, n)$. По следствию из теоремы 3 $\sum\limits_{1 \le i \le n} x_i(\gamma_i - \beta_i) = 0$, поэтому $x_1 \sum\limits_{1 \le i \le n} x_i \alpha_i = 0$, следовательно, $\sum\limits_{1 \le i \le n} x_i \alpha_i = 0$. Таким образом, если элементы s_1 и s_2 сопряжены, то

1) $\gamma_i - \beta_i = x_1 \alpha_i$, для некоторых $\alpha_i \in P$;
2) $\sum\limits_{1 \le i \le n} x_i \alpha_i = 0$.

Очевидно, эти условия являются и достаточными. Подытожим вышесказанное в виде утверждения.

Предложение. *Пусть $s_1 = l_1 + c_1$, $s_2 = l_2 + c_2$ — элементы алгебры M_n. Эти элементы сопряжены с помощью внутреннего автоморфизма тогда и только тогда, когда*

1) *l_1 и l_2 пропорциональны,*
2) *$\gamma_i - \beta_i = l_1 \alpha_i$, для некоторых $\alpha_i \in P$,*
3) $\sum\limits_{1 \le i \le n} x_i \alpha_i = 0$.

Авторы благодарны В. А. Романькову за внимание, проявленное к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Evans M. J.* Presentations of the free metabelian group of rank 2 // Canad. Math. Bull. 1994. V. 37, N 4. P. 468–472.
2. *Artamonov V. A.* The categories of free metabelian groups and Lie algebras // Comment. Math. Univ. Carolin. 1977. V. 18, N 1. P. 143–159.

Статья поступила 28 декабря 1999 г.

Чирков Игорь Викторович
Омский гос. университет, кафедра информационных систем, просп. Мира, 55-А, Омск 644077
chirkov@math.omsu.omskreg.ru

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры, просп. Мира, 55-А, Омск 644077
shevelin@math.omsu.omskreg.ru