Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.53

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ВИМАНА — ВАЛИРОНА ДЛЯ ЦЕЛЫХ И СЛУЧАЙНЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОРЯДКА

П. В. Филевич

Аннотация: Пусть f — целая функция,

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\},\ \mu_f(r) = \max\{|f^{(n)}(0)/n!|r^n : n \geq 0\},\ G_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)/n!|r^n,$$

$\alpha \in (0; +\infty)$, а l — выпуклая относительно логарифма на $(1; +\infty)$ действительная функция, $\ln r = o(l(r))$, $r \to +\infty$. Доказаны следующие утверждения:

1) для того чтобы для любой целой функции f, для которой $\ln M_f(r) \leq l(r)$, $r \geq r_0$, выполнялось соотношение

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln M_f(r) - \ln \mu_f(r)}{\ln \ln \mu_f(r)} \leq \alpha,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varlimsup\limits_{r \to +\infty} (\ln l(r) / \ln \ln r) \leq \alpha + 1$;

2) для того чтобы для любой целой функции f, для которой $\ln M_f(r) \leq l(r)$, $r \geq r_0$, выполнялось соотношение

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln G_f(r) - \ln M_f(r)}{\ln \ln M_f(r)} \leq \alpha,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varlimsup\limits_{r \to +\infty} (\ln l(r) / \ln \ln r) \leq 2\alpha + 1$.

Библиогр. 19.

Введение

Пусть T — класс трансцендентных целых функций, а $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ — максимум модуля $f \in T$. Разложим функцию f в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{0.1}$$

и пусть $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \geq 0\}$, $\nu_f(r) = \max\{n \geq 0 : |a_n|r^n = \mu_f(r)\}$ — максимальный член и центральный индекс f соответственно.

Согласно неравенству Коши $\mu_f(r) \leq M_f(r)$ для всех $r \geq 0$. С другой стороны, как утверждает классическая теорема Вимана — Валирона (см., например, [1, с. 22]), для любой $f \in T$ и любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$M_f(r) \leq \mu_f(r)\{\ln \mu_f(r)\}^{1/2+\varepsilon} \tag{0.2}$$

выполняется для всех $r > 1$ вне некоторого исключительного множества $E_f(\varepsilon)$, зависящего, вообще говоря, от f и ε и имеющего конечную логарифмическую меру, т. е. $\int\limits_{E_f(\varepsilon)} r^{-1}dr < +\infty$. Если $f(z) = e^z$, то (см., например, [2])

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_f(r)}{\mu_f(r)\{\ln\mu_f(r)\}^{1/2}} = \sqrt{2\pi},$$

откуда следует невозможность замены показателя $1/2$ в неравенстве (0.2) меньшим числом (с соблюдением, естественно, утверждения теоремы Вимана — Валирона).

В работе [3] П. Розенблум, используя простые вероятностные методы, установил более тонкие, нежели неравенство Вимана — Валирона (0.2), и, как оказалось, точные (см. [4, 5]) соотношения между максимальным членом и максимумом модуля целой функции. В качестве следствия из этих соотношений получено неравенство

$$M_f(r) \le \mu_f(r)\{\ln\mu_f(r)\}^{1/2}\{\ln\ln\mu_f(r)\}^{1+\delta}, \tag{0.3}$$

которое выполняется для любой $f \in T$ и любого $\delta > 0$ при $r > 1$ вне некоторого множества $E_f(\delta)$ конечной логарифмической меры. Отсюда следует, что неравенство (0.2) выполняется при любом $\varepsilon > 0$ для всех $r \ge r(\varepsilon)$ вне множества конечной логарифмической меры E_f, не зависящего от ε. В связи с этим мы будем говорить, что *исключительное множество в неравенстве Вимана — Валирона отсутствует*, если и только если

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r) - \ln\mu_f(r)}{\ln\ln\mu_f(r)} \le \frac{1}{2}. \tag{0.4}$$

Отметим некоторые результаты, указывающие на то, что исключительное множество в (0.2) может существовать. В работе [6], в частности, приведен принадлежащий А. А. Гольдбергу пример целой функции f, для которой

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln\mu_f(r)} > 1. \tag{0.5}$$

Насколько автору известно из статьи Р. Лондона [7], пример функции со свойством (0.5) построен также в книге Ж. Валирона [8, с. 33]. Наиболее общий результат в этом направлении принадлежит П. Локгарту и Е. Страусу [9]: для каждой функции двух переменных Ψ, определенной на $\mathbb{R}^2_+$, существует такая целая функция f, что

$$M_f(r_n) \ge \Psi(r_n, \ln\mu_f(r)u_f(r_n)), \quad r_n \uparrow +\infty,\ n \to +\infty.$$

Из последнего результата следует, что максимум модуля целой функции в сравнении с максимальным членом может расти на некоторой последовательности как угодно быстро. С другой стороны, это утверждение перестает быть верным, если на рост логарифма максимального члена наложены ограничения сверху. В частности, для любой $f \in T$ порядка $\rho_f < +\infty$ выполняется (см. [10, с. 17] или [11, с. 31]) известное соотношение Бореля

$$\ln M_f(r) \sim \ln\mu_f(r), \quad r \to +\infty. \tag{0.6}$$

(Напомним, см. [10, с. 17; 12, с. 63], что для любой целой функции f

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln\mu_f(r)}{\ln r} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\nu_f(r)}{\ln r},$$

а общее значение этих трех пределов называется порядком функции f и обозначается через ρ_f.) Отметим еще в связи с соотношением Бореля работу М. Н. Шереметы [13], из результатов которой следует, что существуют целые функции бесконечного порядка, логарифм максимального члена которых растет как угодно медленно и для которых соотношение (0.6) не выполняется.

В § 1 настоящей работы мы, в частности, рассматриваем вопрос о возможности установления ограничения сверху на рост $\ln\mu_f(r)$, при котором выполняется соотношение (0.4), т. е. для всех $f \in T$, удовлетворяющих этому ограничению, исключительное множество в неравенстве Вимана — Валирона отсутствует. Из несколько более общих результатов будет следовать, что соотношение (0.4) имеет место, если логарифмический порядок функции f не превышает $3/2$, т. е.

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln\mu_f(r)}{\ln\ln r} \le \frac{3}{2}, \tag{0.7}$$

причем условие (0.7) является точным в том смысле, что постоянную $3/2$ в нем заменить бо́льшим числом, вообще говоря, нельзя.

Аналогичный вопрос рассмотрен в § 2 и для случайных целых функций. Из результатов, полученных для таких функций, вытекает, что для выполнения соотношения (0.4) более типичным, нежели условие (0.7), является условие

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln\mu_f(r)}{\ln\ln r} \le 2. \tag{0.8}$$

Иными словами, для «большинства» из таких $f \in T$, логарифмический порядок которых не превышает 2, исключительное множество в неравенстве Вимана — Валирона отсутствует.

Пусть $\Omega = [0;1]$, а P — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Рассмотрим вероятностное пространство Штейнгауза $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, где $\mathscr{A}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств Ω (см. [14, с. 9]), и пусть $\{\xi_n\}$ — фиксированная последовательность случайных величин, вообще говоря, комплексных, заданная на этом вероятностном пространстве. Будем предполагать, что $|\xi_n| = 1$ для всех $n \ge 0$. Поставим в соответствие каждой целой функции f вида (0.1) случайную целую функцию

$$f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\xi_n(\omega)a_n z^n, \tag{0.9}$$

которая полностью определяется через f и $\{\xi_n\}$. Таким образом, случайная целая функция — это класс целых функций, имеющий мощность континуума, если, например, $\{\xi_n(\omega_1)\} \ne \{\xi_n(\omega_2)\}$ для любых фиксированных $\omega_1 < \omega_2$ из Ω. Заметим также, что при любом фиксированном ω функция f_ω имеет те же максимальный член и центральный индекс, что и функция f.

В работе [2] П. Ердеш и А. Реньи показали, что если $\{\xi_n\} = \{\varepsilon_n\}$, где $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения $+1$ и -1 с одинаковой вероятностью $1/2$ (т. е. $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность Радемахера; см. [14, с. 15]), то для любой f, любого $\delta > 0$ и почти всех ω

$$M_{f_\omega}(r) \le \mu_f(r)\{\ln\mu_f(r)\}^{1/4}\{\ln\ln\mu_f(r)\}^{1+\delta}, \quad r \ge 1,\ r \notin E_f(\delta,\omega),$$

где $E_f(\delta,\omega)$ — множество конечной логарифмической меры. Такое же утверждение получено в [2] и для случая $\{\xi_n\} = \{\exp(2\pi i\omega_n)\}$, где $\{\omega_n\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных на $[0;1]$ случайных величин (последовательность Штейнгауза [14, с. 15]). На самом деле это утверждение справедливо при гораздо более общих предположениях относительно последовательности $\{\xi_n\}$, что и показано в работах автора [15, 16].

Последовательность $\{\eta_n\}$ действительных случайных величин называется *мультипликативной системой* (см., например, [17]), если $\mathrm{M}\eta_{i_1}\eta_{i_2}\dots\eta_{i_k}=0$ для любых $i_1<i_2<\dots<i_k$ и любого $k\geq 1$; здесь $\mathrm{M}\eta$ — математическое ожидание случайной величины η. В частности, каждая последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями — мультипликативная система.

Обозначим через Ξ класс последовательностей $\{\xi_n\}$ случайных величин таких, что каждая из последовательностей $\{\operatorname{Re}\xi_n\}$ и $\{\operatorname{Im}\xi_n\}$ является мультипликативной системой, причем, как уже предполагалось, $|\xi_n|=1$ для всех $n\geq 0$. Оказывается [15, 16], что сформулированное выше утверждение П. Ердеша и А. Реньи имеет место в случае любой $\{\xi_n\}\in\Xi$.

Это утверждение [18] выполняется также и для последовательности $\{\xi_n\}=\{\exp(2\pi\theta_n i)\}$, где $\{\theta_n\}$ — лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел, т. е. существует такое $q>1$, что $\theta_{n+1}/\theta_n\geq q$, $n\geq 0$. Различные варианты ослабления последнего условия на последовательность $\{\theta_n\}$ (с сохранением утверждения П. Ердеша и А. Реньи) предложены в [19]. В частности, достаточно потребовать, чтобы

$$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\geq 1+\frac{1}{\varphi_n},\quad n\geq 0, \tag{0.10}$$

где все $\varphi_n>0$ и $\ln\varphi_n=o(\ln\ln n)$, $n\to+\infty$.

Из перечисленных результатов для случайных целых функций можно сделать вывод, что для «большинства» целых функций показатель $1/2$ в неравенстве (0.3) с сохранением утверждения П. Розенблума можно заменить на $1/4$. Это значит, что максимум модуля целой функции существенно зависит от аргументов коэффициентов ее степенного разложения и эта зависимость приводит к улучшению оценки максимума модуля через максимальный член сверху для «большинства» целых функций.

Здесь в связи с этим мы рассматриваем вопрос о возможности получения условия на рост $\ln\mu_f(r)$, более слабого по сравнению с (0.7), при котором для каждой случайной функции f_ω вида (0.9) почти наверное выполняется соотношение (0.4). Искомое условие и будет совпадать с условием (0.8). Кроме того, в § 3 вопрос о влиянии аргументов коэффициентов ряда (0.1) на рост его максимума модуля рассмотрен в более конкретной форме.

§ 1. Неравенства типа Вимана — Валирона для целых функций

Обозначим через H класс непрерывных справа на $(1;+\infty)$ действительных функций h, для которых $h(r)\nearrow+\infty$, $r\to+\infty$. Пусть

$$\Delta(h)=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln h(r)}{\ln\ln r},\quad h\in H.$$

Будем рассматривать также подкласс L класса H, состоящий из выпуклых относительно логарифма функций l, для которых $\ln r=o(l(r))$, $r\to+\infty$. Ясно, что $\nu_f\in H$ для любой $f\in T$, а поскольку [10, с. 33]

$$\ln\mu_f(r)-\ln\mu_f(r_0)=\int\limits_{r_0}^{r}x^{-1}\nu_f(x)dx, \tag{1.1}$$

то $\ln\mu_f \in L$. Хорошо известно также, что $\ln M_f \in L$.

Пусть $\alpha \in (0;+\infty)$. В следующих теоремах указаны ограничения на рост $\nu_f(r)$, $\ln\mu_f(r)$ и $\ln M_f(r)$, при которых выполняется соотношение

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)-\ln\mu_f(r)}{\ln\ln\mu_f(r)} \le \alpha, \tag{1.2}$$

несколько более общее, чем (0.4).

Теорема 1.1. *Пусть $\alpha \in (0;+\infty)$, а $h \in H$. Для того чтобы для любой $f \in T$ такой, что $\nu_f(r) \le h(r)$, $r \ge r_0$, выполнялось соотношение* (1.2), *необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(h) \le \alpha$.*

Теорема 1.2. *Пусть $\alpha \in (0;+\infty)$, а $l \in L$. Для того чтобы для любой $f \in T$ такой, что $\ln\mu_f(r) \le l(r)$, $r \ge r_0$, выполнялось соотношение* (1.2), *необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(l) \le \alpha+1$.*

Теорема 1.3. *Пусть $\alpha \in (0;+\infty)$, а $l \in L$. Для того чтобы для любой $f \in T$ такой, что $\ln M_f(r) \le l(r)$, $r \ge r_0$, выполнялось соотношение* (1.2), *необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(l) \le \alpha+1$.*

Теорему 1.3 легко получить из теоремы 1.2, если только учесть, что для любой функции конечного порядка выполняется соотношение Бореля (0.6). Теорема 1.2, в свою очередь, получается из теоремы 1.1. Докажем это.

Можем считать, не уменьшая общности, что функция l в теореме 1.2 является непрерывно дифференцируемой. Пусть $h \in H$ такова, что $h(r) = rl'(r)$, $r > 1$. Достаточно доказать, как легко видеть, что $\Delta(l) = \Delta(h)+1$ и

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln\mu_f(r)}{\ln\ln r} = \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\nu_f(r)}{\ln\ln r}+1 \tag{1.3}$$

для любой $f \in T$. Имеем

$$\Delta(l) = \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\left(\int_1^r x^{-1}h(x)\,dx\right)}{\ln\ln r} \le \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln(h(r)\ln r)}{\ln\ln r}$$
$$= 1+\Delta(h) \le 1+\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\left(\ln^{-1}r\int_r^{r^2} x^{-1}h(x)\,dx\right)}{\ln\ln r} \le \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln l(r^2)}{\ln\ln r} = \Delta(l),$$

откуда получаем $\Delta(l) = \Delta(h)+1$. Аналогично, учитывая соотношение (1.1), доказывается равенство (1.3). Следовательно, теорему 1.2 в предположении справедливости теоремы 1.1 можно считать доказанной.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\alpha \in (0;+\infty)$, а $h \in H$ такова, что $\Delta(h) \le \alpha$. Рассмотрим любую $f \in T$ вида (0.1), для которой $\nu_f(r) \le h(r)$, $r \ge r_0$, и докажем, что f удовлетворяет соотношению (1.1).

Из определения центрального индекса непосредственно следуют неравенства

$$|a_n|(2r)^n \le |a_{\nu_f(2r)}|(2r)^{\nu_f(2r)} \le \mu_f(r)2^{\nu_f(2r)}, \quad n \ge 0,$$

откуда получаем $|a_n|r^n \le \mu_f(r)2^{\nu_f(2r)-n}$, $n \ge 0$. Тогда

$$\sum_{n=\nu_f(2r)}^{+\infty}|a_n|r^n \le 2\mu_f(r), \tag{1.4}$$

а поэтому

$$M_f(r) \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\nu_f(2r)-1} |a_n| r^n + \sum_{n=\nu_f(2r)}^{+\infty} |a_n| r^n \le \mu_f(r)(\nu_f(2r)+2).$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r) - \ln \mu_f(r)}{\ln\ln \mu_f(r)} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \nu_f(2r)}{\ln\ln r} \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln h(2r)}{\ln\ln r} = \Delta(h) \le \alpha.$$

Первая часть теоремы 1.1 доказана.

Предположим теперь, что $\Delta(h) > \alpha$, и докажем, что существует $f \in T$, для которой $\nu_f(r) \le h(r)$, $r \ge r_0$, но соотношение (1.1) не выполняется.

Пусть β — любое действительное число такое, что $\Delta(h) > \beta > \alpha$. Тогда

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{h(r)}{\ln^\beta r} = +\infty,$$

а поэтому, как легко видеть, существует строго возрастающая к $+\infty$ последовательность $\{c_n\}$ с такими свойствами:

1) $c_0 > 1$, $h(c_0) > 1$;

2) $[h(c_n)] \ge \max\{2[h(c_{n-1})];\ 2[h(c_{n-1})]^\beta \ln^\beta c_n\}$, $n \ge 1$.

(Здесь и далее $[x]$ — целая часть x.) Положим $\lambda_0 = 0$, $a_0 = 1$,

$$\lambda_n = [h(c_{n-1})], \quad a_n = \left(c_0^{\lambda_1-\lambda_0} c_1^{\lambda_2-\lambda_1} \dots c_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\right)^{-1}, \quad n \ge 1.$$

Так как

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^{-1}} = c_n \uparrow +\infty, \quad n \to +\infty,$$

то функция

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

целая и, как хорошо известно (см., например, [13]), $\mu_g(r) = a_n r^{\lambda_n}$, $\nu_g(r) = \lambda_n$ для всех $r \in [c_{n-1}; c_n)$ при любом $n \ge 0$. Ясно, что $\nu_g(r) \le h(r)$, $r \ge c_0$. Кроме того, $\mu_g(c_n) = a_n c_n^{\lambda_n}$.

Рассмотрим, далее, целую функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\lambda_{n+1}-\lambda_n-1} a_n c_n^{-k} z^{\lambda_n+k}, \tag{1.5}$$

имеющую при $r \ge c_0$ те же максимальный член и центральный индекс, что и функция g. Для функции f, воспользовавшись свойством 2 последовательности $\{c_n\}$, получаем

$$\begin{aligned} M_f(c_n) &\ge a_n c_n^{\lambda_n}(\lambda_{n+1}-\lambda_n) \\ &\ge \mu_f(c_n)\lambda_{n+1}/2 \ge \mu_f(c_n)\lambda_n^\beta \ln^\beta c_n \ge \mu_f(c_n) \ln^\beta \mu_f(c_n), \quad n \ge 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что соотношение (1.1) для функции f не выполняется. Теорема полностью доказана.

§ 2. Неравенства типа Вимана — Валирона для случайных функций

Пусть $f \in T$, $\{\xi_n\} \in \Xi$, а f_ω — случайная целая функция вида (0.9), которая, как уже отмечалось, полностью определяется через функцию f и последовательность $\{\xi_n\}$. В приведенных ниже теоремах указаны ограничения сверху на рост $\nu_f(r)$, $\ln \mu_f(r)$ и $\ln M_f(r)$, при которых для почти всех ω или, что одно и то же, почти наверное для f_ω выполняется соотношение

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_{f_\omega}(r) - \ln \mu_f(r)}{\ln\ln \mu_f(r)} \le \gamma, \tag{2.1}$$

где $\gamma \in (0;+\infty)$.

Теорема 2.1. *Пусть $\{\xi_n\} \in \Xi$, $\gamma \in (0;+\infty)$, а $h \in H$. Для того чтобы при любой $f \in T$ такой, что $\nu_f(r) \le h(r)$, $r \ge r_0$, почти наверное для f_ω выполнялось соотношение* (2.1), *необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(h) \le 2\gamma$.*

Теорема 2.2. *Пусть $\{\xi_n\} \in \Xi$, $\gamma \in (0;+\infty)$, а $l \in L$. Для того чтобы при любой $f \in T$ такой, что $\ln \mu_f(r) \le l(r)$, $r \ge r_0$, почти наверное для f_ω выполнялось соотношение* (2.1), *необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(l) \le 2\gamma + 1$.*

Теорема 2.3. *Пусть $\{\xi_n\} \in \Xi$, $\gamma \in (0;+\infty)$, а $l \in L$. Для того чтобы при любой $f \in T$ такой, что $\ln M_f(r) \le l(r)$, $r \ge r_0$, почти наверное для f_ω выполнялось соотношение* (2.1), *необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(l) \le 2\gamma + 1$.*

В силу сделанных в § 1 замечаний будем доказывать лишь теорему 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Докажем вначале необходимость условия $\Delta(h) \le 2\gamma$. Предположим, что $\Delta(h) > \beta > \alpha = 2\gamma$, и докажем, что существует целая функция f такая, что $\nu_f(r) \le h(r)$, $r \ge r_0$, и при любом ω неравенство (2.1) не выполняется.

Пусть

$$S_f(r) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2}$$

для любой $f \in T$ вида (0.1). Рассмотрим функцию (1.5), построенную при доказательстве теоремы 1.1, и покажем, что она и является искомой. Вспоминая свойства этой функции, а также равенство Парсеваля, имеем для любого ω

$$\begin{aligned} M_{f_\omega}(c_n) &\ge \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_\omega(c_n e^{i\varphi})|^2\, d\varphi\right)^{1/2} = S_f(c_n) \\ &\ge \mu_f(c_n)(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{1/2} \ge \mu_f(c_n) \ln^{\beta/2} \mu_f(c_n), \quad n \ge 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что неравенство (2.1) не выполняется. Одна часть теоремы 2.1 доказана.

Для доказательства достаточности условия $\Delta(h) \le 2\gamma$ нам будет нужна следующая

Лемма 2.4 [15, 16]. *Пусть $\{\xi_n\} \in \Xi$, $\eta > 0$. Тогда для любой последовательности $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$ и любого целого $N \ge 2$*

$$P\left\{\max_{\varphi\in[0;2\pi]} \left|\sum_{n=0}^{N} b_n \xi_n e^{in\varphi}\right| \ge C(\eta)\{\ln N\}^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} |b_n|^2\right)^{1/2}\right\} \le \frac{1}{N^\eta},$$

где $C(\eta)$ — положительная постоянная, зависящая лишь от η.

Предположим, что f — любая трансцендентная целая функция вида (0.1), $\Delta(\nu_f) = \Delta(\ln\mu_f) - 1 \le 2\gamma$. Пусть $\{\xi_n\} \in \Xi$. Нужно доказать, что почти наверное для функции f_ω вида (0.9) выполняется неравенство (2.1).

Так как

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\nu_f(2r)}{\ln\ln r} \le 2\gamma,$$

а $\ln r = o(\ln\mu_f(r))$, $r \to +\infty$, то существует непрерывная на $[1; +\infty)$ функция d такая, что $d(r) \searrow 0$, $r \to +\infty$, и

$$\nu_f(2r) \le \{\ln\mu_f(r)\}^{2\gamma+d(r)}, \quad r \ge 1. \tag{2.2}$$

Пусть $r_0 \ge 1$ — наименьшее действительное число такое, что $\ln\mu_f(r_0) = p$, где $p \ge 2^{1/(2\gamma)}$ — любое целое число. Определим строго возрастающую к $+\infty$ последовательность $\{r_k\}$, исходя из равенства $\ln\mu(r_k) = p + k$, $k \ge 0$; положим $N(r_k) = \{\ln\mu_f(r_k)\}^{2\gamma+d(r_k)} + 1$ и рассмотрим последовательность событий $\{A_k\}$ такую, что

$$A_k = \left\{ \max_{\varphi\in[0;2\pi]} \left| \sum_{n=0}^{[N(r_k)]} a_n r_k^n \xi_n e^{in\varphi} \right| \right.$$
$$\left. \ge C\{\ln[N(r_k)]\}^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{[N(r_k)]} |a_n|^2 r_k^{2n} \right)^{1/2} \right\}, \quad k \ge 0,$$

где C — абсолютная постоянная, получаемая из $C(\eta)$ в лемме 2.4 при $\eta = 1/\gamma$. Из леммы 2.4 следует, что

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) \le \sum_{k=0}^{+\infty} [N(r_k)]^{-1/\gamma} \le \sum_{k=0}^{+\infty} (p+k)^{-2} < +\infty.$$

Воспользовавшись леммой Бореля — Кантелли [14, с. 18], можем сделать вывод, что бесконечное число событий A_k может наступить лишь с вероятностью 0. Поэтому почти наверное

$$\max_{\varphi\in[0;2\pi]} \left| \sum_{n=0}^{[N(r_k)]} a_n r_k^n \xi_n e^{in\varphi} \right| < C\{\ln[N(r_k)]\}^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{[N(r_k)]} |a_n|^2 r_k^{2n} \right)^{1/2}, \quad k \ge k(\omega). \tag{2.3}$$

Тогда, применяя неравенства (1.4), (2.2) и (2.3), почти наверное для f_ω при $k \ge k(\omega)$ имеем

$$M_{f_\omega}(r_k) < \mu_f(r_k)(C\{[N(r_k)] + 1\}^{1/2}\{\ln[N(r_k)]\}^{1/2} + 2)$$
$$\le \mu_f(r_k)\{\ln\mu_f(r_k)\}^{\gamma+d(r_k)} \ln\ln\mu_f(r_k),$$

а поэтому если $r \in (r_m; r_{m+1})$, то

$$M_{f_\omega}(r) < M_{f_\omega}(r_{m+1}) \le e\mu_f(r_m)\{1 + \ln\mu_f(r_m)\}^{\gamma+d(r_{m+1})} \ln\{1 + \ln\mu_f(r_m)\}$$
$$\le e\mu_f(r)\{1 + \ln\mu_f(r)\}^{\gamma+d(r)} \ln\{1 + \ln\mu_f(r)\}.$$

Непосредственно отсюда для почти всех ω получаем (2.1). Теорема полностью доказана.

Замечание. Аналоги теорем 2.1–2.3 имеют место также и для последовательности $\{\xi_n\} = \{\exp(2\pi i\theta_n)\}$, где $\{\theta_n\}$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию (0.10), если только $0 < \varphi_n \nearrow +\infty$, $\ln\varphi_n = O(\ln\ln n)$, $n \to +\infty$. Это утверждение получается, как нетрудно увидеть, с помощью следующей леммы.

Лемма 2.5 [19]. *Пусть $\{\theta_n\}$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию* (0.10), *причем $0 < \varphi_n \nearrow +\infty$, $n \to +\infty$; пусть также $\eta > 0$. Тогда для любой последовательности $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$ и любого целого $N \geq 2$*

$$P\left\{\max_{\varphi\in[0;2\pi]}\left|\sum_{n=0}^{N} b_n e^{2\pi i\theta_n} e^{in\varphi}\right| \geq C(\eta)\left(\varphi_N \ln N \sum_{n=0}^{N} |b_n|^2\right)^{1/2}\right\} \leq \frac{1}{N^\eta},$$

где $C(\eta)$ — положительная постоянная, зависящая лишь от η.

§ 3. О влиянии аргументов коэффициентов степенного ряда на рост его максимума модуля

Для любой $f \in T$ вида (0.1) введем обозначение

$$G_f(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n, \quad r \geq 0,$$

и будем рассматривать вопрос об установлении возможных ограничений сверху на рост функции f, при которых для нее выполняется соотношение

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_f(r) - \ln M_f(r)}{\ln\ln M_f(r)} \leq \alpha, \tag{3.1}$$

где $\alpha \in (0; +\infty)$.

Имеют место следующие теоремы, легко получаемые одна из другой.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha \in (0; +\infty)$, а $l \in L$. Для того чтобы для любой $f \in T$ такой, что $\ln M_f(r) \leq l(r)$, $r \geq r_0$, выполнялось соотношение* (3.1), *необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(l) \leq 2\alpha + 1$.*

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha \in (0; +\infty)$, а $l \in L$. Для того чтобы для любой $f \in T$ такой, что $\ln G_f(r) \leq l(r)$, $r \geq r_0$, выполнялось соотношение* (3.1), *необходимо и достаточно, чтобы $\Delta(l) \leq 2\alpha + 1$.*

Из теорем 3.1, 3.2 следует, что уже для целых функций конечного логарифмического порядка аргументы коэффициентов их степенного разложения могут существенно влиять на рост максимума модуля.

Доказательство теоремы 3.1. Докажем достаточность условия $\Delta(l) \leq 2\alpha+1$. Действительно, так как $\Delta(\ln M_f) = \Delta(\ln \mu_f) = 1+\Delta(\nu_f)$, то $\Delta(\nu_f) \leq 2\alpha$. Воспользовавшись неравенством (1.4) и неравенством Коши — Буняковского, имеем

$$G_f(r) \leq \sum_{n=0}^{\nu_f(2r)-1} |a_n| r^n + 2\mu_f(r)$$
$$\leq \{\nu_f(2r)\}^{1/2} S_f(r) + 2\mu_f(r) \leq M_f(r)(\{\nu_f(2r)\}^{1/2} + 2),$$

откуда, учитывая неравенство $\Delta(\nu_f) \leq 2\alpha$, легко получаем соотношение (3.1).

Перейдем к доказательству необходимости условия $\Delta(l) \leq 2\alpha + 1$. Предположим, что последнее неравенство не выполняется, и докажем существование $f \in T$ такой, что $\ln M_f(r) \leq l(r)$, $r \geq r_0$, но соотношение (3.1) не выполняется. Будем считать, что $\Delta(l) < +\infty$ (это не ограничивает общности), и пусть $\Delta(l) = 2\gamma + 1$, $\gamma > \alpha$.

Положим $\varepsilon = (\gamma - \alpha)/3$. Тогда из теорем 2.3 и 1.3 следует, что существует целая функция f, для которой $\ln M_f(r) \le l(r)$, $r \ge r_0$, и

$$M_f(r) \le \mu_f(r)\{\ln \mu_f(r)\}^{\gamma+\varepsilon}, \quad r \ge r(\varepsilon),$$
$$G_f(r_n) \ge \mu_f(r_n)\{\ln \mu_f(r_n)\}^{2\gamma-\varepsilon}, \quad r_n \uparrow +\infty, \quad n \to +\infty.$$

Поскольку для функции f как функции конечного порядка выполняется соотношение (0.6), то

$$2G_f(r_n) \ge 2M_f(r_n)\{\ln \mu_f(r_n)\}^{\gamma-2\varepsilon}$$
$$\ge M_f(r_n)\{\ln M_f(r_n)\}^{\gamma-2\varepsilon} = M_f(r_n)\{\ln M_f(r_n)\}^{\alpha+\varepsilon}, \quad n \ge n_0.$$

Понятно, что соотношение (3.1) для f не выполняется. Тем самым теорема 3.1 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: Физматгиз, 1960.
2. *Erdös P., Rényi A.* On random entire functions // Zastosowania Mat. 1969. V. 10. P. 47–55.
3. *Rosenbloom P. C.* Probability and entire functions // Studies in Mathematical Analysis and Related Topics. Stanford: Calif. Univ. Press, 1963. P. 325–332.
4. *Сулейманов Н. М.* Оценки типа Вимана — Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 4. С. 822–824.
5. *Щерба А. И.* К вопросу об оценке максимума целой функции через максимальный член степенного ряда / Ред. Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1988. Деп. в ВИНИТИ 14.06.88, № 8520–88.
6. *Щучинская Е. Ф.* Об исключительных значениях в теореме Вимана / Ростовск. гос. ун-т Ростов-на-Дону, 1976. Деп. в ВИНИТИ 17.02.77, № 650–77.
7. *London R.* Note on a lemma of Rosenblom // Quart. J. Math. 1970. V. 21, N 1. P. 67–69.
8. *Valiron G.* Theory of integral functions. New York: Chelsea, 1949.
9. *Lockhart P., Straus E. G.* Relations between the maximum modulus and maximum term of entire functions // Pacific J. Math. 1985. V. 118, N 2. P. 479–485.
10. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. 2.
11. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1972.
12. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
13. *Шеремета М. Н.* О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 5. С. 141–148.
14. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.
15. *Филевич П. В.* Оценки типа Вимана — Валирона для случайных целых функций // Докл. НАН Украины. 1997. № 12. С. 41–43.
16. *Филевич П. В.* Соотношения между максимумом модуля и максимальным членом для случайных целых функций // Мат. студии. Тр. Львов. мат. о-ва. 1997. Т. 7, № 2. С. 157–166.
17. *Jakubowski J., Kwapień S.* On multiplicative systems of functions // Bull. L'Acad. Pol. Sci. 1979. V. 27. P. 325–332.
18. *Steele J. M.* Sharper Wiman inequality for entire functions with rapidly oscillating coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 123. P. 550–558.
19. *Филевич П. В.* Некоторые классы целых функций, в которых почти наверное можно улучшить неравенство Вимана — Валирона // Мат. студии. Тр. Львов. мат. о-ва. 1996. Т. 6. С. 59–66.

Статья поступила 18 июня 1999 г.

Филевич Петр Васильевич
Львовский национальный университет им. И. Франко, мех.-мат. факультет
ул. Университетская, 1, Львов 79000, Украина
tftj@franko.lviv.ua