Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.988.8

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННО–РАЗНОСТНОГО МЕТОДА СО СХЕМОЙ КРАНКА — НИКОЛСОН ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Смагин

Аннотация: В сепарабельном гильбертовом пространстве абстрактная параболическая задача решается приближенно проекционно-разностным методом. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галеркина, а по времени используется схема Кранка — Николсон. В условиях обобщенной разрешимости точной задачи в работе установлены эффективные энергетические оценки погрешности приближенных решений. Эти оценки позволяют получать порядок скорости сходимости приближенных решений к точному по времени вплоть до второго. Кроме того, эти оценки учитывают аппроксимационные свойства проекционных подпространств, что иллюстрируется на подпространствах типа конечных элементов. Библиогр. 10.

1. Основные предположения

Пусть V и H — сепарабельные гильбертовы пространства такие, что $V \subset H$, а вложение плотно и непрерывно. Обозначим через V' пространство, двойственное V. Тогда, отождествляя H с его двойственным, получим $V \subset H \subset V'$. Под выражением вида (z, v) далее понимаем значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. В случае $z \in H$ выражение (z, v) совпадает со скалярным произведением элементов $z, v \in H$. Норму элемента z в пространстве H обозначаем через $\|z\|$.

Пусть для $t \in [0, T]$, где $T < \infty$, на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных симметричных форм $a(t, u, v)$. Предположим также, что функция $t \to a(t, u, v)$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$ и выполнены условия

$$|a(t, u, v)| \le M_1 \|u\|_V \|v\|_V, \tag{1}$$

$$a(t, u, u) \ge \delta \|u\|_V^2 \quad (\delta > 0), \tag{2}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} a(t, u, v) \right| \le M_2 \|u\|_V \|v\|_V. \tag{3}$$

Здесь и далее производные понимаются в обобщенном смысле.

Форма $a(t, u, v)$ порождает линейный ограниченный из V в V' оператор $A(t)$, определяемый соотношением $a(t, u, v) = (A(t)u, v)$. Из (1) следует оценка $\|A(t)u\|_{V'} \le M_1 \|u\|_V$. Для всех $u \in V$ функция $t \to A(t)u \in V'$ дифференцируема и $\partial a(t, u, v)/\partial t = (A'(t)u, v)$. Функция $t \to A'(t)u \in V'$ измерима, и из (3) следует почти при всех $t \in [0, T]$ оценка $\|A'(t)u\|_{V'} \le M_2 \|u\|_V$.

Определим для $t \in [0, T]$ множество $D[A(t)] = \{u \in V \mid A(t)u \in H\}$. Заметим, что оператор $A(t)$, рассматриваемый в H с областью определения

$D[A(t)] \subset H$, является самосопряженным и положительно определенным. При этом для операторов $A^{1/2}(t)$ области определения $D[A^{1/2}(t)] = V$.

Предположим существование гильбертова пространства E такого, что для $t \in [0,T]$ выполняется $D[A(t)] \subset E \subset V$, пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ (см. [1]) и для $t \in [0,T]$, $u \in D[A(t)]$ выполняется оценка $\|u\|_E \le d\|A(t)u\|$.

Предположим, что на V определены почти при всех $t \in [0,T]$ линейные операторы $B(t) : V \to H$ такие, что

$$\|B(t)u\| \le M_3\|u\|_V \quad (u \in V). \tag{4}$$

Считаем, что для $u \in V$ функция $t \to B(t)u \in H$ измерима на $[0,T]$.

В описанных выше предположениях рассмотрим в пространстве H задачу

$$u'(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u^0 \in V. \tag{5}$$

Считаем, что $f \in L_2(0,T;H)$. Тогда [2] задача (5) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u(t) \in C([0,T],V) \cap L_2(0,T,E)$; $u'(t), A(t)u(t) \in L_2(0,T,H)$; выполняются начальное условие и почти всюду на $[0,T]$ уравнение (5). Кроме того, справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T (\|u'(t)\|^2 + \|A(t)u(t)\|^2)\,dt \le M\left(\|u^0\|_V^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|^2\,dt\right). \tag{6}$$

Такое решение $u(t)$ далее называется обобщенным. Обратим внимание, что в [2] приводятся условия существования у (5) и более гладких решений.

Отметим здесь также, что результаты настоящей работы формально справедливы и без предположения симметричности форм $a(t,u,v)$. Конечно, при этом ссылки на обобщенную разрешимость задачи (5) следует заменить предположением о существовании решения соответствующей гладкости.

Примеры модельных параболических задач, сводящихся к (5), можно найти в [1–3]. Отметим, что задача (5) является абстрактным аналогом начально-краевых задач для параболических уравнений как с краевыми условиями Дирихле, так и с условиями Неймана, а также и со смешанными краевыми условиями. Кроме того, можно рассматривать задачи произвольного $2m$ ($m \ge 1$) порядка по пространственным переменным.

В работе [3] задача (5) решается приближенно проекционно-разностным методом с неявной схемой Эйлера по времени. В [3] получены эффективные энергетические оценки погрешности приближенных решений. Проекционно-разностный метод со схемой Кранка — Николсон по времени позволяет, естественно при некоторых дополнительных минимальных условиях гладкости исходной задачи, получить оценки погрешности, обеспечивающие по времени более высокий, чем в [3], вплоть до второго, порядок скорости сходимости погрешности к нулю.

Заметим, что для уравнения теплопроводности типа (5) с $A(t) \equiv -\Delta$, где Δ — оператор Лапласа, и $B(t) \equiv 0$ в 3-мерном параллелепипеде и краевыми условиями Дирихле на границе проекционно-разностная схема Кранка — Николсон рассматривалась в [4, 5] для проекционных подпространств специального вида. В [4, 5] оценка погрешности со вторым порядком по времени установлена в L_2-норме по совокупности переменных. В [6] соответствующая L_2-оценка погрешности получена уже для уравнения типа (5) в произвольной области

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и также с краевыми условиями Дирихле на границе. При этом в [6] $A(t) \equiv A$ — симметричный эллиптический оператор второго порядка, не зависящий от t, и $B(t) \equiv 0$. В общем случае для задачи (5) общего вида L_2-оценки погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка — Николсон по времени установлены в [7]. Кроме L_2-оценки в [6] приведена оценка погрешности и в более сильной норме, однако только с первым порядком по времени. Отметим, что справедливость подобной оценки следует из [8] для проекционно-разностного метода с простейшей неявной схемой по времени и параболического уравнения (5) более общего вида, чем в [6].

Построение приближенной задачи проведем по методике, предложенной в [9] и примененной также в [7]. Через V_h, где $h > 0$, обозначим конечномерное подпространство пространства V. Определим на элементах $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup|(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ с $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V'_h} \le \|u_h\|_{V'}$. Пусть P_h — ортопроектор в пространстве H на V_h. В [10] показано, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V'_h$ и $\|\overline{P}_h u\|_{V'_h} \le \|u\|_{V'}$ для $u \in V'$. Отметим для $u \in V'$, $v \in H$ важное в приложениях соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$, полученное в [9].

Задаче (5) сопоставим разностную задачу в V_h:

$$\big(u_k^h - u_{k-1}^h\big)\tau^{-1} + \big(A_h^k + B_h^k\big)\big(u_k^h + u_{k-1}^h\big)2^{-1} = f_h^k, \tag{7}$$

где $k = 1, 2, \dots, N$ (N — натуральное число) и элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным. В (7)

$$\tau N = T, \quad t_k = k\tau, \quad A_h^k = \overline{P}_h[A(t_k) + A(t_{k-1})]2^{-1},$$

$$B_h^k = \tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P_h B(t)\,dt, \quad f_h^k = \tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P_h f(t)\,dt.$$

Установим однозначную разрешимость задачи (7), т. е. обратимость в V_h оператора $I + \tau 2^{-1}\big(A_h^k + B_h^k\big)$. Действительно, пусть $v_h \in V_h$ таков, что $v_h + \tau 2^{-1}(A_h^k + B_h^k)v_h = 0$. Тогда

$$\|v_h\|^2 + 4^{-1}\tau[a(t_k, v_h, v_h) + a(t_{k-1}, v_h, v_h)] + 2^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(B(t)v_h, v_h)\,dt = 0.$$

Воспользовавшись (2) и (4), для произвольного $\varepsilon > 0$ получим

$$\|v_h\|^2 + 2^{-1}\tau\delta\|v_h\|_V^2 \le 4^{-1}\tau M_3\big(\varepsilon\|v_h\|_V^2 + \varepsilon^{-1}\|v_h\|^2\big).$$

Возьмем в последней оценке $\varepsilon = 2\delta {M_3}^{-1}$. При $0 < \tau \le 8\delta {M_3}^{-2}$ имеем $v_h = 0$ и, следовательно, однозначную разрешимость задачи (7).

2. Базовая оценка погрешности

Лемма 1. *Для решения u_k^h задачи* (7) *справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^N\big(\big\|\big(u_k^h - u_{k-1}^h\big)\tau^{-1}\big\|_{V'_h}^2 + \big\|\big(u_k^h + u_{k-1}^h\big)2^{-1}\big\|_V^2\big)\tau + \max_{1\le k\le N}\big\|u_k^h\big\|^2 \le M\left(\big\|u_0^h\big\|^2 + \sum_{k=1}^N\big\|f_h^k\big\|_{V'_h}^2\tau\right). \tag{8}$$

Доказательство. Умножим (7) скалярно в H на $\bigl(u_k^h+u_{k-1}^h\bigr)2^{-1}$ и от полученного тождества возьмем удвоенную вещественную часть. При этом заметим, что

$$\left(\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau},\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right)=\frac{1}{2\tau}\bigl\|u_k^h\bigr\|^2-\frac{1}{2\tau}\bigl\|u_{k-1}^h\bigr\|^2+\frac{i}{\tau}\operatorname{Im}\bigl(u_k^h,u_{k-1}^h\bigr),$$

где i — мнимая единица. Таким образом, придем к соотношению

$$\frac{1}{\tau}\bigl\|u_k^h\bigr\|^2-\frac{1}{\tau}\bigl\|u_{k-1}^h\bigr\|^2+2\left(A_h^k\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2},\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right)$$
$$=2\operatorname{Re}\left(f_h^k,\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right)-2\operatorname{Re}\left(B_h^k\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2},\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right)=I_1+I_2. \quad (9)$$

Из (2) следует оценка

$$2\left(A_h^k\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2},\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right)\ge 2\delta\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2. \quad (10)$$

Оценим слагаемые в правой части (9). Имеем

$$I_1\le\frac{1}{\varepsilon_1}\bigl\|f_h^k\bigr\|_{V_h'}^2+\varepsilon_1\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2. \quad (11)$$

Из предположения (4) получаем

$$I_2\le 2M_3\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|$$
$$\le\varepsilon_2\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\frac{M_3^2}{2\varepsilon_2}\bigl(\bigl\|u_k^h\bigr\|^2+\bigl\|u_{k-1}^h\bigr\|^2\bigr). \quad (12)$$

Положим в (11) и (12) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=2^{-1}\delta$. Тогда тождество (9) и оценки (10)–(12) приводят к неравенству

$$\frac{1}{\tau}\bigl\|u_k^h\bigr\|^2-\frac{1}{\tau}\bigl\|u_{k-1}^h\bigr\|^2+\delta\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\le c_1\bigl\|f_h^k\bigr\|_{V_h'}^2+c_2\bigl(\bigl\|u_k^h\bigr\|^2+\bigl\|u_{k-1}^h\bigr\|^2\bigr). \quad (13)$$

Умножим (13) на τ и просуммируем по k от 1 до $m\le N$. Получим

$$\bigl\|u_m^h\bigr\|^2+\delta\sum_{k=1}^m\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\tau$$
$$\le c_1\sum_{k=1}^m\bigl\|f_h^k\bigr\|_{V_h'}^2\tau+2c_2\sum_{k=1}^m\bigl\|u_k^h\bigr\|^2\tau+(1+c_2\tau)\bigl\|u_0^h\bigr\|^2. \quad (14)$$

Из (14) вытекает для всех $m\le N$ неравенство

$$\bigl\|u_m^h\bigr\|^2\le c_3\left(\bigl\|u_0^h\bigr\|^2+\sum_{k=1}^N\bigl\|f_h^k\bigr\|_{V_h'}^2\tau\right)+2c_2\sum_{k=1}^m\bigl\|u_k^h\bigr\|^2\tau,$$

являющееся дискретным аналогом интегрального неравенства Гроноулла — Беллмана. Отсюда для достаточно малых τ индукцией по $m\le N$ приходим к оценке

$$\bigl\|u_m^h\bigr\|^2\le c_3\left(\bigl\|u_0^h\bigr\|^2+\sum_{k=1}^N\bigl\|f_h^k\bigr\|_{V_h'}^2\tau\right)(1-2c_2\tau)^{-m}.$$

Заметим теперь, что при $N \to \infty$

$$(1-2c_2\tau)^{-m} \le (1-2c_2\tau)^{-N} \to \exp\{2c_2T\}.$$

В результате оценка (8) установлена для $\max\left\|u_k^h\right\|^2$. Теперь в правой части (14) под знаком суммы можно оценить $\left\|u_k^h\right\|^2$, что приведет к оценке

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u_k^h\right\|^2 + \sum_{k=1}^N \left\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2 \tau \le c\left(\left\|u_0^h\right\|^2 + \sum_{k=1}^N \left\|f_h^k\right\|_{V_h'}^2 \tau\right). \tag{15}$$

Оценка выражения $\left\|\left(u_k^h - u_{k-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{V_h'}$ следует теперь из (7) и (15).

Обратим внимание, что в случае $B(t) \equiv 0$ разрешимость задачи (7) и оценка решения (8) получаются без предположения малости τ.

Далее через Q_h обозначаем ортопроектор в пространстве V на $V_h \subset V$.

Теорема 1. *Пусть $u(t)$ — обобщенное решение задачи* (5), *а u_k^h — решение задачи* (7). *Тогда справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\max_{1\le k\le N}\left\|Q_h u(t_k) - u_k^h\right\|^2 + \sum_{k=1}^N \left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2 \tau \\
&\le M\Bigg\{\left\|Q_h u^0 - u_o^h\right\|^2 + \int_0^T \|(Q_h - I)u(t)\|_V^2\,dt \\
&+ \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N \left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\right]dt\right\|_V^2 \\
&+ \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N \left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2} - A(t)\right]u(t)\,dt\right\|_{V'}^2 \\
&+ \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N \left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k} B(t)Q_h\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\right]dt\right\|_{V'}^2 \\
&+ \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N \|(Q_h - I)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_{V'}^2\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Уравнение (5) интегрируем от t_{k-1} до t_k, результат делим на τ и применяем проектор P_h. В результате получим тождество

$$\begin{aligned}
&Q_h[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1} + A_h^k Q_h[u(t_k) + u(t_{k-1})]2^{-1} \\
&= f_h^k + \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[A_h^k Q_h \frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - P_h A(t)u(t)\right]dt \\
&+ (Q_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1} - \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h B(t)u(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) вычитаем (7). Для $z_k^h = Q_h u(t_k) - u_k^h$ получаем

$$\begin{aligned}\big(z_k^h - z_{k-1}^h\big)\tau^{-1} + \big(A_h^k + B_h^k\big)\big(z_k^h + z_{k-1}^h\big)2^{-1} &= \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[A_h^k Q_h \frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - P_h A(t)u(t)\right]dt \\ &+ \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[B_h^k Q_h \frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - P_h B(t)u(t)\right]dt \\ &+ (Q_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1} = I_1 + I_2 + I_3. \quad (18)\end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые I_1 и I_2 в правой части (18). Имеем

$$I_1 = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} A_h^k Q_h\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\right]dt + \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} A_h^k(Q_h - I)u(t)\,dt + \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\big[A_h^k - P_h A(t)\big]u(t)\,dt. \quad (19)$$

Переходим к слагаемому

$$I_2 = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P_h B(t) Q_h\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\right]dt + \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P_h B(t)(Q_h - I)u(t)\,dt. \quad (20)$$

Применим к (18), учитывая (19) и (20), оценку (8):

$$\begin{aligned}&\max_{1\le k\le N}\big\|z_k^h\big\|^2 + \sum_{k=1}^N \left\|\frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2 \tau \\ &\le M\Bigg\{\big\|Q_h u^0 - u_0^h\big\|^2 + \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N\left\|A_h^k Q_h \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\right]dt\right\|_{V_h'}^2 \\ &+ \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N\left\|A_h^k\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(Q_h - I)u(t)\,dt\right\|_{V_h'}^2 + \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\big[A_h^k - P_h A(t)\big]u(t)\,dt\right\|_{V_h'}^2 \\ &+ \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P_h B(t) Q_h\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\right]dt\right\|_{V_h'}^2 \\ &+ \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P_h B(t)(Q_h - I)u(t)\,dt\right\|_{V_h'}^2 + \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N \|P_h(Q_h - I)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_{V_h'}^2\Bigg\} \\ &= M\sum_{i=1}^7 I_i. \quad (21)\end{aligned}$$

Оцениваем слагаемые I_i в правой части (21). При этом используем тот факт, что $\|\overline{P}_h\|_{V'\to V'_h} \leq 1$. Таким образом,

$$I_4 \leq \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2}-A(t)\right]u(t)\,dt\right\|^2_{V'},$$

$$I_5 \leq \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}B(t)Q_h\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]dt\right\|^2_{V'}.$$

Подобным же образом оцениваем и I_7. Воспользовавшись, кроме того, (1), получаем оценки

$$I_2 \leq \frac{M_1^2}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]dt\right\|^2_{V},$$

$$I_3 \leq \frac{M_1^2}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(Q_h-I)u(t)\,dt\right\|^2_{V} \leq M_1^2\int\limits_0^T\|(Q_h-I)u(t)\|^2_V\,dt.$$

Условие (4) и непрерывность вложения $H\subset V'$ позволяют получить оценку

$$I_6 \leq cM_3^2\int\limits_0^T\|(Q_h-I)u(t)\|^2_V\,dt.$$

Для завершения доказательства оценки (16) осталось оценить погрешность:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}&\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|^2_V\tau\\
&\leq \frac{4}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]dt\right\|^2_V+\frac{4}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(I-Q_h)u(t)\,dt\right\|^2_V\\
&\qquad+\frac{4}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}Q_h\left[u(t)-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\right]dt\right\|^2_V+4\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|^2_V\tau.\end{aligned}$$

Отсюда и из (21), учитывая оценки слагаемых I_i, приходим к окончательной оценке (16).

Замечание 1. Справедлива оценка погрешности

$$\max_{1\leq t\leq N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|^2 \leq 2\max_{0\leq t\leq T}\|(I-Q_h)u(t)\|^2+2\max_{1\leq k\leq N}\left\|Q_hu(t_k)-u_k^h\right\|^2. \quad (22)$$

3. Оценки погрешности с порядком скорости сходимости

Теорема 2. *Пусть* $u(t)$ *— решение задачи* (5) *такое, что* $u' \in L_2(0,T;V)$. *Пусть* u_k^h *— решение задачи* (7). *Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|^2+\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\tau$$
$$\le M\Biggl\{\left\|P_hu^0-u_0^h\right\|^2+\tau^2\int\limits_0^T\left[\|u(t)\|_V^2+\|u'(t)\|_V^2\right]dt+\max_{0\le t\le T}\|(Q_h-I)u(t)\|^2$$
$$+\int\limits_0^T\left[\|(Q_h-I)u(t)\|_V^2+\|(Q_h-I)u'(t)\|^2\right]dt\Biggr\}. \quad (23)$$

Доказательство. Оценим слагаемые I_i в правой части (16). Так как

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-2t+t_{k-1})u'(t)\,dt,$$

для третьего слагаемого I_3 получим

$$I_3=\frac{1}{4\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-2t+t_{k-1})u'(t)\,dt\right\|_V^2$$
$$\le\frac{\tau}{4}\sum_{k=1}^{N}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(t)\|_V\,dt\right)^2\le\frac{\tau^2}{4}\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt. \quad (24)$$

С учетом непрерывности вложения $H\subset V'$ и условия (4) оцениваем

$$I_5\le c\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right\|_V^2dt$$
$$\le c\tau^2\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(t)\|_V^2\,dt=c\tau^2\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt.$$

Оценим четвертое слагаемое в правой части (16). Получим

$$I_4\le\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2}-A(t)\right\|_{V\to V'}^2\|u(t)\|_V^2\,dt.$$

Заметим, что

$$\left\|\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2}-A(t)\right\|_{V\to V'}^2\le\tau\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|A'(s)\|_{V\to V'}^2ds\le\tau^2M_2^2. \quad (25)$$

Таким образом,

$$I_4 \le \tau^2 M_2^2 \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt.$$

Наконец, оцениваем

$$I_6 \le \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N \left\|(Q_h - I)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt\right\|_{V'}^2 \le c\int\limits_0^T \|(Q_h - I)u'(t)\|^2\,dt.$$

Оценка (23) следует теперь из полученных оценок слагаемых I_i , оценки (22) и того, что

$$\left\|Q_h u^0 - u_0^h\right\| \le \max_{0\le t\le T}\|(Q_h - I)u(t)\| + \left\|P_h u^0 - u_0^h\right\|.$$

Далее, покажем, что небольшая дополнительная гладкость по t операторов $A(t)$ и $B(t)$, а также точного решения $u(t)$ задачи (5) позволяют увеличить скорость сходимости погрешности к нулю по τ на порядок.

Пусть функция $t \to \partial a(t,u,v)/\partial t$ для $u, v \in V$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$ и

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(t,u,v)\right| \le M_4\|u\|_V\|v\|_V. \tag{26}$$

В таком случае для $u \in V$ функция $t \to A'(t)u \in V'$ дифференцируема и $(A''(t)u, v) = \partial^2 a(t,u,v)/\partial t^2$ для $u, v \in V$. Функция $t \to A''(t)u \in V'$ измерима, и из (26) для $u \in V$ следует оценка $\|A''(t)u\|_{V'} \le M_4\|u\|_V$ почти при всех $t \in [0, T]$.

Пусть операторы $B(t)$ для $u \in V$ и $t, s \in [0, T]$ удовлетворяют условию

$$\|[B(t) - B(s)]u\| \le M_5|t - s|^\gamma\|u\|_V \quad (0 < \gamma \le 1). \tag{27}$$

Теорема 3. *Предположим, что форма $a(t,u,v)$ и оператор $B(t)$ удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям. Пусть $u(t)$ — решение задачи (5) такое, что $u'' \in L_p(0,T;V)$ для $1 \le p \le 2$. Пусть u_k^h — решение задачи (7). Тогда справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k) - u_k^h\right\| + \sum_{k=1}^N\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\tau \\
&\quad\le M\Biggl\{\left\|P_h u^0 - u_0^h\right\|^2 + \max_{0\le t\le T}\|(Q_h - I)u(t)\|^2 \\
&\quad+ \int\limits_0^T [\|(Q_h - I)u(t)\|_V^2 + \|(Q_h - I)u'(t)\|^2]\,dt + \tau^{2\gamma+2}\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt \\
&\quad+ \tau^{5-2/p}\left[\int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_V^2\right)dt + \left(\int\limits_0^T \|u''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p}\right]\Biggr\}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Доказательство. Как и в теореме 2, необходимо оценить уже иначе слагаемые в правой части (16). Перед оценкой слагаемого I_3 заметим, что

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\right]dt = \frac{1}{8}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[\tau^2 - (t_k - 2t + t_{k-1})^2]u''(t)\,dt. \tag{29}$$

В таком случае

$$I_3 \le \frac{1}{64\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[\tau^2-(t_k-2t+t_{k-1})^2]u''(t)\,dt\right\|_V^2.$$

Так как $|\tau^2-(t_k-2t+t_{k-1})^2|\le\tau^2$ для $t\in[t_{k-1},t_k]$, получим

$$I_3 \le \frac{\tau^{5-2/p}}{64}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p} \le \frac{\tau^{5-2/p}}{64}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p}. \tag{30}$$

Оценим слагаемое I_4 в (16). Для этого сделаем в нем некоторые преобразования:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2}-A(t)\right]u(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2}-A(t)\right]\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t)-u(s)]\,ds\right]dt$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2}-A(t)\right]dt\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(s)\,ds.$$

Таким образом, приходим к оценке

$$I_4 \le \frac{2}{\tau^2}\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2}-A(t)\right\|_{V\to V'}^2\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t)-u(s)]\,ds\right\|_V^2 dt$$
$$+\frac{2}{\tau^3}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2}-A(t)\right]dt\right\|_{V\to V'}^2\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(s)\,ds\right\|_V^2=I_4^1+I_4^2.$$

Оценивая I_4^1, воспользуемся оценкой (25). Получим

$$I_4^1 \le 2M_2^2\tau^4\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_V^2\,ds = 2M_2^2\tau^4\int_0^T\|u'(s)\|_V^2\,ds.$$

При оценке I_4^2 заметим, что подобно (29)

$$\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{A(t_k)+A(t_{k-1})}{2}-A(t)\right]dt\right\|_{V\to V'}^2$$
$$=\frac{1}{64}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[\tau^2-(t_k-2t+t_{k-1})^2]A''(t)\,dt\right\|_{V\to V'}^2 \le \frac{1}{64}M_4^2\tau^6.$$

Отсюда

$$I_4^2 \le \frac{1}{32}\tau^4M_4^2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)\|_V^2\,dt = \frac{1}{32}\tau^4M_4^2\int_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt.$$

Переходим к оценке в (16) слагаемого I_5. Имеем

$$I_5 \le \frac{2}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[B(t)-B(t_k)]Q_h\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]dt\right\|_{V'}^2$$
$$+\frac{2}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|B(t_k)Q_h\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]dt\right\|_{V'}^2 = I_5^1+I_5^2.$$

Учитывая непрерывность вложения $H\subset V'$ и оценку (27), получим

$$I_5^1 \le c\tau^{2\gamma+2}\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt.$$

При оценке слагаемого I_5^2 пользуемся непрерывностью вложения $H\subset V'$, оценками (4) и (30):

$$I_5^2 \le c\tau^{5-2/p}\left(\int\limits_0^T \|u''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p}.$$

Оценку слагаемого I_6 в (16) проведем, как и в теореме 2.

Собирая оценки слагаемых I_i и (22), приходим к оценке (28).

Замечание 2. В условиях теорем 2 и 3 можно установить подобные оценки для погрешности

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|u(t_{k-1/2})-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\tau \le 2\sum_{k=1}^{N}\left\|u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\right\|_V^2\tau$$
$$+2\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\tau. \quad (31)$$

Оценка второго слагаемого в правой части (31) уже установлена в (23) и (28). Поэтому достаточно проследить, что первое слагаемое в правой части (31) дает в соответствующих условиях тот же порядок по τ. Например, если выполнены условия теоремы 3, то из представления

$$u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k-1/2}}(t_{k-1}-s)u''(s)\,ds+\int\limits_{t_{k-1/2}}^{t_k}(s-t_k)u''(s)\,ds$$

следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\right\|_V^2\tau \le \tau^{5-2/p}\left(\int\limits_0^T\|u''(s)\|_V^p\,ds\right)^{2/p}.$$

Замечание 3. Оценки погрешности (23), (28) и (22) позволяют получать порядок скорости сходимости и по пространственным переменным. В сходной ситуации это было продемонстрировано, например, в [3, 7]. Пусть подпространства V_h обладают аппроксимационным свойством, типичным для метода конечных элементов:

$$\|(I-Q_h)v\|_V \le ch\|v\|_E \quad (v\in E), \quad (32)$$

где константа $c > 0$ не зависит от v и h. Из (32) в условиях теоремы 2 следует оценка

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k) - u_k^h\right\|^2 + \sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\tau \le M\Biggl\{\left\|P_h u^0 - u_0^h\right\|^2 + h^2\int_0^T\bigl(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_V^2\bigr)\,dt + \tau^2\int_0^T\bigl(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_V^2\bigr)\,dt\Biggr\}. \quad (33)$$

Если же выполнены условия теоремы 3, то справедлива оценка

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k) - u_k^h\right\|^2 + \sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\tau \le M\Biggl\{\left\|P_h u^0 - u_0^h\right\|^2 + h^2\int_0^T\bigl(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_V^2\bigr)\,dt + \tau^{2\gamma+2}\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt + \tau^{5-2/p}\left[\int_0^T\bigl(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_V^2\bigr)\,dt + \left(\int_0^T\|u''(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p}\right]\Biggr\}. \quad (34)$$

Необходимые подробности обоснования оценок (33) и (34) можно найти в [3]. Кроме того, при выводе (33) и (34) используется оценка [1, гл.1]

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_V^2 \le M\int_0^T\bigl(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|^2\bigr)\,dt.$$

Замечание 4. Результаты данной работы, как легко видеть, остаются справедливыми, если равномерную сетку по времени заменить произвольной $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. При этом в оценках погрешности, например (34), в левой части вместо τ следует писать $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, а в правой части под τ надо понимать $\max\tau_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. *Смагин В. В.* О разрешимости абстрактного параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 5. С. 711–712.
3. *Смагин В. В.* Коэрцитивные оценки погрешностей проекционно-разностного метода для параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 406–418.
4. *Злотник А. А., Туретаев И. Д.* О точных оценках погрешности и оптимальности двухслойных экономичных методов решения уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 6. С. 1306–1311.
5. *Злотник А. А., Туретаев И. Д.* Точные оценки погрешности некоторых двухслойных методов решения трехмерного уравнения теплопроводности // Мат. сб. 1985. Т. 128, № 4. С. 530–544.

6. *Туретаев И. Д.* Точные оценки градиента погрешности проекционно-разностных схем для параболических уравнений в произвольной области // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 11. С. 1748–1751.

7. *Смагин В. В.* Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 908–919.

8. *Смагин В. В.* Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактного параболического уравнения // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 6. С. 898–909.

9. *Смагин В. В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 3. С. 143–160.

10. *Вайникко Г. М., Оя П. Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 7. С. 1269–1277.

Статья поступила 1 сентября 1998 г.

Смагин Виктор Васильевич
Воронежский гос. университет, математический факультет
Университетская пл., 1, Воронеж 394693
mfkfa@main.vsu.ru