*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2001. Том 42, № 3*

*УДК 517.948.5*

# О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

**Б. И. Пелешенко**

**Аннотация:** Доказана эквивалентность достаточных условий ограниченности интегральных операторов свертки в симметричных пространствах, полученных соответственно в работах С. Г. Крейна, Е. М. Семенова и автора. Первое из этих условий обобщает условие Харди — Литтлвуда — Соболева, а второе является модификацией условия Хёрмандера. Библиогр. 6.

**1.** В работе исследуется взаимосвязь между достаточными условиями типа Харди — Литтлвуда — Соболева и Хёрмандера ограниченности интегральных операторов свертки в симметричных пространствах, полученных соответственно в [1, 2]. Пусть $\Phi$ — множество таких вогнутых возрастающих на полуоси $[0,\infty)$ функций $\varphi(t)$, что $\varphi(0)=0$ и $\varphi(t)\to\infty$ при $t\to\infty$; $\alpha_\varphi$, $\beta_\varphi$ — нижний и верхний показатели растяжения функции $\varphi(t)\in\Phi$. Через $g^*(t)$ обозначается невозрастающая перестановка модуля измеримой на $\mathbb{R}^n$ функции $g(x)$,

$$g^{**}(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t g^*(\tau)\,d\tau.$$

Пусть $L_1(\mathbb{R}^n)$ — лебегово пространство интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, $M_\psi(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda_\varphi(\mathbb{R}^n)$ — пространства Марцинкевича и Лоренца соответственно с фундаментальными функциями $t/\psi(t)$, $\varphi(t)$ [1]. Наконец, $\chi_{B_S}(x)$ обозначает характеристическую функцию куба $B_s\in\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат и с длиной ребра $s>0$.

В работе доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть показатели растяжения вогнутых функций $\varphi_0(t)$, $\varphi(t)$ из $\Phi$ удовлетворяют условию $0<\alpha_{\varphi_0},\beta_\varphi<1$, а функция $\varphi(t)/\varphi_0(t)$ монотонно возрастает. Если локально интегрируемая функция $K(x)$ такова, что для любого $r>0$ и всех $|x|<r$ выполнено неравенство*

$$\|(1-\chi_{B_{2r}}(\cdot))(K(x-\cdot)-K(\cdot))_{M_{\varphi_0}}\|\le C \tag{1}$$

*и интегральный оператор свертки*

$$(K*f)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy \tag{2}$$

*ограниченно действует из* $\Lambda_\varphi(\mathbb{R}^n)$ *в* $M_\psi(\mathbb{R}^n)$, *где* $\psi(t) = t\varphi_0(t)/\varphi(t)$, *то для любой функции* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, *имеющей компактный носитель, и любого* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\frac{t(K * f)^{**}(t)}{\varphi_0(t)} \le C_1 \|f\|_{L_1}, \tag{3}$$

*где постоянная* $C_1$ *не зависит от* $f(x)$ *и* $t$.

**Теорема 2.** *Пусть функция* $\varphi_0(t)$ *принадлежит* $\Phi$. *Если для любой функции* $f(x)$ *из* $L_1(\mathbb{R}^n)$, *имеющей компактный носитель, и любого* $t > 0$ *выполняется неравенство* (3), *то ядро* $k(x)$ *принадлежит* $M_{\varphi_0}(\mathbb{R}^n)$.

**Теорема 3.** *Пусть функции* $\varphi_0(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *удовлетворяют условию теоремы* 1. *Для того чтобы ядро* $K(x)$ *принадлежало* $M_{\varphi_0}(\mathbb{R}^n)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (1) *и оператор свертки ограниченно действовал из* $\Lambda_\varphi(\mathbb{R}^n)$ *в* $M_\psi(\mathbb{R}^n)$.

**2.** Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1.** *Пусть функции* $\varphi_0(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $K(x)$ *и оператор свертки* $(K * f)(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы. Тогда неравенство*

$$\|(K * f)(\cdot)(1 - \chi_{B_{2r}}(\cdot))\|_{M_{\varphi_0}} \le C\|f\|_{L_1}$$

*выполняется, если*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 0 \quad \text{и } f(x) = 0 \quad \text{вне куба } B_r \tag{4}$$

*с той же постоянной* $C$, *что и в* (1), *для любого куба* $B_r$.

Доказательство. Пусть $r > 0$ и функция $f(x)$ из $L_1(\mathbb{R}^n)$ обращается в нуль вне куба $B_r$. Так как ядро $K(x)$ локально интегрируемо, свертка (2) существует почти всюду. Используя условие (4), ее можно записать в виде

$$(K * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} [K(x - y) - K(y)] f(y)\,dy.$$

Из обобщенного неравенства Минковского для интегралов в симметричных пространствах из [1] и условия (1) получаем неравенство

$$\|(K * f)(\cdot)(1 - \chi_{B_{2r}}(\cdot))\|_{M_{\varphi_0}} \le \|K(\cdot - y) - K(\cdot)\|_{M_{\varphi_0}} \|f\|_{L_1} \le C\|f\|_{L_1}. \tag{5}$$

Как и при доказательстве леммы 2.1 в [3], можно убедиться, что неравенство (5) эквивалентно неравенству (1). Из инвариантности неравенства (5) относительно сдвига следует, что для любой функции $f(x)$ из $L_1(\mathbb{R}^n)$, имеющей носителем куб $B_r(x_0)$ со стороной $r > 0$ и с центром в точке $x_0$, выполняется неравенство

$$\|(K * f)(\cdot)(1 - \chi_{B_{2r}}(\cdot - x_0))\|_{M_{\varphi_0}} \le C\|f\|_{L_1} \tag{6}$$

с постоянной $C$, не зависящей от $f$, $r$, $x_0$. Лемма доказана.

Приведем формулировку леммы Кальдерона — Зигмунда о покрытии в форме, данной в работе [3].

**Лемма 2.** *Пусть $f(x)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}^n)$ и $s>0$. Тогда*

$$f(x)=v(x)+\sum_{k=1}^{\infty} w_k(x),$$

*где $v(x)$ и все $w_k(x)$ принадлежат $L_1(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|v\|_{L_1}+\sum_{k=1}^{\infty}\|w_k\|_{L_1}\le 3\|f\|_{L_1}, \tag{7}$$

$$|v(x)|\le 2^n s \quad \text{почти всюду}, \tag{8}$$

*и для некоторых непересекающихся кубов $B^{(k)}=B_{r_k}(x_k)$*

$$\int\limits_{B^{(k)}} w_k(x)\,dx=0, \quad w_k(x)=0, \quad \text{если } x\notin B^{(k)}, \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B^{(k)})\le s^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx.$$

*Если $f(x)$ имеет компактный носитель, то носители $v(x)$ и всех $w_k(x)$ содержатся в некотором фиксированном компактном множестве.*

**3.** Доказательство теоремы 1. Пусть $f(x)\in L_1(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель. Без ограничения общности можем считать, что $\|f\|_{L_1}=1$. Для упрощения записи положим $\tilde f(x)=(K*f)(x)$. Функция $\tilde f(x)$ как абсолютно сходящийся интеграл существует почти всюду и принадлежит $L_1(\mathbb{R}^n)$. Разложим $f$ в соответствии с леммой 2. Тогда неравенство

$$|\tilde f(x)|\le|\tilde v(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde w_k(x)| \tag{10}$$

выполняется почти всюду. Пусть $\overline{B}$ — куб, полученный растяжением куба $B$ в два раза относительно своего центра. Учитывая условие (9), по лемме 1 (неравенство (6)) имеем

$$\|\tilde w_k(1-\chi_k(\cdot-x_k))\|_{M_{\varphi_0}}\le C\|w_k\|_{L_1}, \tag{11}$$

$$\operatorname{mes}\Bigl(\bigcup_k \overline{B}^{(k)}\Bigr)\le 2^n s^{-1}\|f\|_{L_1}=2^n s^{-1}. \tag{12}$$

Применяя сначала обобщенное неравенство Минковского [1], а затем неравенства (11) и (7), получаем

$$\biggl\|\sum_{k=1}^{\infty}\tilde w_k(\cdot)(1-\chi_{\overline{B}_{r_k}}(\cdot-x_k))\biggr\|_{M_{\varphi_0}}\le C\sum_{k=1}^{\infty}\|w_k\|_{L_1}\le 3C\|f\|_{L_1}=3C.$$

Так как оператор свертки (2) по условию теоремы действует из $\Lambda_\varphi(\mathbb{R}^n)$ в $M_\psi(\mathbb{R}^n)$ ограниченно, для функции $\tilde v(x)=(K*v)(x)$ имеем

$$\|\tilde v\|_{M_\psi}=C_0\left\{\int\limits_0^{1/2^n s} v^*(t)\,d\varphi(t)+\int\limits_{1/2^n s}^{\infty} v^*(t)\,d\varphi(t)\right\}.$$

Из оценки (8) и свойств неотрицательной вогнутой на полуоси $(0,\infty)$ функции [1] следует, что правая часть полученного неравенства не превышает

$$C_0\{2^n s\varphi(1/2^n s)+2^n s\varphi(1/2^n s)\}\|f\|_{L_1}.$$

Пусть $t>0$ и $\tilde f^{**}(t)\neq 0$, $\bar\varphi_0(t)=t/\varphi_0(t)$, $\bar\psi_0(t)=t/\psi_0(t)$, $\bar\varphi_0^{-1}(t)$ — обратная функция к $\bar\varphi_0(t)=t/\varphi_0(t)$. Выберем $s^{-1}=2^n\bar\varphi_0^{-1}(8C_0/\tilde f^{**}(t))$. Тогда, учитывая соотношение $t\varphi_0(t)=\varphi(t)\psi(t)$, имеем

$$\begin{aligned}\|\tilde v\|_{M_\psi}&\le 2C_0\varphi(1/2^n s)2^n s=2C_0\bar\psi(1/2^n s)/\bar\varphi_0(1/2^n s)\\&\le \tilde f^{**}(t)\bar\psi\big(\overline{\varphi}_0^{-1}(8C_0/\tilde f^{**}(t))\big)/4.\end{aligned}$$

Если $\tilde f^{**}(t)/4\le\tilde v^{**}(t)$, то отсюда следует неравенство

$$\tilde f^{**}(t)\overline{\varphi}_0(t)\le 8C_0.$$

Если

$$\tilde f^{**}(t)/4>\tilde v^{**}(t), \tag{13}$$

то из неравенства (10) получаем, что $\tilde f^{**}(t)\le\tilde w^{**}(t)+\tilde v^{**}(t)$ и

$$3/4\tilde f^{**}(t)\le(\chi_{\mathbb{R}^n-\Omega}\tilde w)^{**}(t)+(\chi_\Omega\tilde w)^{**}(t)=\widetilde{W}_1^{**}(t)+\widetilde{W}_2^{**}(t).$$

Вначале предположим, что $\tilde f^{**}(t)/4\le\widetilde{W}_1^{**}(t)$. Тогда из неравенства (11) вытекает $\tilde f^{**}(t)\overline{\varphi}(t)\le 4C$. Затем рассмотрим случай, когда

$$\tilde f^{**}(t)/4>\widetilde{W}_1^{**}(t) \tag{14}$$

и, следовательно, выполняется неравенство $\tilde f^{**}(t)/2\le\widetilde{W}_2^{**}(t)$. В этом случае из (13) и (14) находим, что

$$\widetilde{W}_2^{**}(t)\le\tilde f^{**}(t)+\tilde v^{**}(t)+\widetilde{W}_1(t)\le 3/2\tilde f^{**}(t). \tag{15}$$

Далее, полагая в неравенстве (12) $s^{-1}=2^n\overline{\varphi}^{-1}(8C_0/\tilde f^{**}(t))$, имеем $\operatorname{mes}\Omega\le 4^n\overline{\varphi}^{-1}(8C_0/T\tilde f^{**}(t))$. Из этого неравенства и условия вогнутости функции $\overline{\varphi}_0(t)$ следует, что

$$4^{-n}\tilde f^{**}(t)\overline{\varphi}_0(t)\le 4^{-n}\tilde f^{**}(t)\overline{\varphi}_0(\operatorname{mes}\Omega)\le\tilde f^{**}(t)\overline{\varphi}(4^{-n}\operatorname{mes}\Omega)\le 8C_0 \tag{16}$$

для всех $0<t\le\operatorname{mes}\Omega$. Пусть $\operatorname{mes}\Omega<t<\infty$. Так как носитель функции $\widetilde{W}_2(x)$ — множество $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{B}^{(k)}$, тогда $\widetilde{W}_2^{*}(t)=0$ для всех $t>\operatorname{mes}\Omega$. Используя условие вогнутости функции $\overline{\varphi}_0(t)$ и неравенства (15), (16), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned}\tilde f^{**}(t)\overline{\varphi}_0(t)/2&\le\widetilde{W}_2^{**}(t)\overline{\varphi}_0(t)\le t^{-1}\operatorname{mes}\Omega\widetilde{W}_2^{**}(\operatorname{mes}\Omega)\overline{\varphi}_0\left(\frac{t\operatorname{mes}\Omega}{\operatorname{mes}\Omega}\right)\\&\le\widetilde{W}_2^{**}(\operatorname{mes}\Omega)\overline{\varphi}_0(\operatorname{mes}\Omega)\le 3/2\tilde f^{**}(\operatorname{mes}\Omega)\overline{\varphi}_0(\operatorname{mes}\Omega)\le 3\cdot 4^{n+1}C_0.\end{aligned}$$

Таким образом, для любого $t>0$ выполняется неравенство

$$\tilde f^{**}(t)\overline{\varphi}_0(t)\le\max\{4C,3\cdot 4^{n+1}C_0\}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим семейство функций $f_r(x) = \chi_{B_r}(x)/\operatorname{mes} S_r$, $r > 0$, определенных на $\mathbb{R}^n$. Норма $\|f_r\|_{L_1}$ равна 1 для любого $r > 0$. Представим ядро свертки в виде

$$K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [K(x-y) - K(x)] f_r(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f_r(y)\, dy = I_r(x) + J_r(x).$$

Из условия теоремы получаем, что для любого $t > 0$ выполняется неравенство

$$J_r^{**}(t) \le \frac{C_1 \|f_r\|_{L_1}}{\overline{\varphi}_0(t)} = \frac{C_1}{\overline{\varphi}_0(t)}. \tag{17}$$

Но это значит, что интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f_r(y)\, dy$ может расходиться только для $x$ из множества меры нуль. Для любого компактного множества $G \subset \mathbb{R}^n$ можно выбрать такие $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$, чтобы $G$ принадлежало шару $x + S_r$ и интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f_r(y)\, dy$$

существовал. Тогда из соотношения

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f_r(y)\, dy \right| = \frac{1}{\operatorname{mes} Sr} \left| \int_{Sr} K(x-y)\, dy \right| = \frac{1}{\operatorname{mes} Sr} \left| \int_{x+Sr} K(y)\, dy \right|$$

получаем, что $K(x)$ интегрируема на $G$ и, следовательно, локально интегрируема. Тогда для всякого $x$ из лебегова множества полной меры в $\mathbb{R}^n$ функции $K(x)$ имеем

$$\lim_{r \to 0} \int |K(x-y) - K(x)| f_r(y)\, dy = 0.$$

Так как сходимость почти всюду влечет сходимость по мере на измеримом множестве конечной меры, для любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ при достаточно малом $r > 0$ получаем

$$\operatorname{mes} \left\{ x \in S_N : \int_{\mathbb{R}^n} |K(x-y) - K(x)| f_r(y)\, dy > \varepsilon \right\} \le \frac{\eta}{2}.$$

В силу определения невозрастающей перестановки функции из этого неравенства следует, что $(\chi_N \cdot I_r)^*(\eta) \le \varepsilon$. Пусть $t > 0$. Тогда найдется такое положительное число $t_1 > 0$, что

$$(\chi_N I_r)^{**}(t) \le (\chi_N I_r)^*(t_1).$$

Выбрав $\eta = t_1$ и $\varepsilon = 1/\overline{\varphi}_0(t)$, имеем

$$(\chi_N \cdot I_r)^{**}(t) \le (\chi_N \cdot I_r)^*(t_1) \le \frac{1}{\overline{\varphi}_0(t)}. \tag{18}$$

Из полученных неравенств (17), (18) и условия вогнутости функции следует, что

$$(\chi_N \cdot K)^*(2t) \le (\chi_N \cdot K)^{**}(2t) \le \frac{C_2}{\overline{\varphi}_0(2t)}, \tag{19}$$

где $C_2$ не зависит от $t$. Последовательность измеримых функций $\{\chi_N(x) K(x)\}$ сходится к измеримой функции $K(x)$ на множестве $M$ полной меры в $\mathbb{R}^n$, при этом $|\chi_N(x)K(x)| \leq |\chi_{N+1}(x)K(x)|$ для всех $x \in M$ и $N \in \mathbb{N}$. Тогда из неравенства (19) по лемме 3.5 из [4] вытекает, что для каждого $t > 0$

$$\lim_{N\to\infty} (\chi_N \cdot K)^*(t) = K^*(t) < \infty.$$

Из теоремы Леви [5] и неравенства (19) для любого $t > 0$ приходим к неравенству

$$K^{**}(t) = \lim_{N\to\infty} (\chi_N \cdot K)^{**}(t) \leq \frac{C_2}{\overline{\varphi}_0(t)}.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Необходимость следует из теорем 1 и 2. Достаточность получаем из теоремы 6.16 из [1] и неравенства треугольника для нормы пространства $M_{\varphi_0}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание. Доказанные теоремы дополняют, а в случае, когда $\varphi_0(t) = t^{1/a}$, $\varphi(t) = t^{1/p}$, $(t) = t^{1-1/q}$, $1 < a,\ p, q < \infty$, $p^{-1} - q^{-1} = 1 - a^{-1}$, уточняют теорему 2.2 из работы [3] и теорему 3 из работы [6].

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
2. *Пелешенко Б. И.* К теореме Хёрмандера об интегральном операторе свертки // Вопросы математического анализа и прикладные задачи механики. Днепропетровск, 1998. С. 3–12.
3. *Хёрмандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Иностр. лит., 1962.
4. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
5. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Физматгиз, 1974.
6. *Степанов В. Д.* Об интегральных операторах свертки // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 1. С. 45–48.


*Статья поступила 28 февраля 2000 г.*

*Пелешенко Борис Игнатьевич*
*Днепропетровский гос. агроуниверситет, кафедра высшей математики*
*ул. Ворошилова, 25, Днепропетровск 49027, Украина*
dsaupelesh@mail.ru