Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 515.1

О τ–ПСЕВДОКОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Ю. Н. Миронова

Аннотация: Рассмотрена задача распространения понятия τ-псевдокомпактности с пространств на непрерывные отображения, получены условия, при которых произведение τ-псевдокомпактных отображений τ-псевдокомпактно. Так как любое пространство X можно рассматривать как непрерывное отображение $f : X \to Y$ в точку, имеют место следствия теорем о мультипликативности τ-псевдокомпактности для пространств. Таким образом, изучено понятие τ-псевдокомпактного отображения, а также некоторые его свойства, аналогичные свойствам псевдокомпактного пространства, и следствия полученных утверждений для пространств. Библиогр. 12.

Введение. В работе рассмотрена задача распространения понятия τ-псевдокомпактности с пространств на непрерывные отображения.

Напомним, что тихоновское пространство X называется *псевдокомпактным*, если любая непрерывная на X функция ограничена. Произведение псевдокомпактных пространств не обязано быть псевдокомпактным, однако есть условия, при которых псевдокомпактность произведения сохраняется. Комфорт и Росс [1] доказали, что произведение псевдокомпактных топологических групп является псевдокомпактной топологической группой. М. Г. Ткаченко [2], обобщая это утверждение, показал, что произведение относительно псевдокомпактных подмножеств топологических групп относительно псевдокомпактно в произведении. Аналогичный факт рассмотрел В. В. Успенский [3] для относительно псевдокомпактных подмножеств d-пространств. М. Г. Ткаченко [4] установил наиболее общий в этом ряду факт: если на пространствах X_α имеются счетно-направленные решетки d-открытых отображений на полные по Дьедонне пространства и множества C_α относительно псевдокомпактны в X_α, $\alpha \in A$, то подпроизведение $\prod\limits_{\alpha\in A} C_\alpha$ относительно псевдокомпактно в произведении $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Б. А. Пасынковым была поставлена задача дальнейшего обобщения этих утверждений. В результате возникло понятие τ-псевдокомпактного пространства [5] и было получено искомое обобщение для τ-псевдокомпактных пространств.

Теорема [5]. *Если на топологических пространствах X_s, $s \in S$, имеются τ-направленные решетки d-открытых отображений на c-τ-ограниченные пространства и множества C_s относительно τ-псевдокомпактны в X_s, $s \in S$, то множество $C = \prod\{C_s : s \in S\}$ относительно τ-псевдокомпактно в $X = \prod\{X_s : s \in S\}$.*

Возникла задача распространения понятия τ-псевдокомпактности с пространств на отображения. Распространяя понятие τ-псевдокомпактности на отображения, получаем свойства τ-псевдокомпактности отображения, аналогичные свойствам τ-псевдокомпактности пространства, полученным в [5].

Так как любое пространство X можно рассматривать как непрерывное отображение $f : X \to Y$ в точку, мы получаем следствия теорем о мультипликативности τ-псевдокомпактности для пространств, которые, в частности, включают в себя перечисленные выше результаты из [1–5].

1. τ-Псевдокомпактные и τ-компактные отображения. Пусть X — топологическое пространство, τ — бесконечный кардинал. Назовем систему λ *τ-локальной в X*, если для любой точки $x \in X$ существует ее окрестность Ox такая, что $|\operatorname{St}(Ox, \lambda)| < \tau$.

Определение 1. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ назовем *τ-псевдокомпактным*, если для любых открытого в Y множества O, точки $y \in O$ и τ-локальной открытой в $f^{-1}O$ системы λ существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \tau$.

При $\tau = \omega$ τ-псевдокомпактность отображения совпадает с его o-псевдокомпактностью (см. [6]).

Свойство 1. *Пусть отображения $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$, $g : X_1 \to X_2$ непрерывны, отображение g сюръективно и $f_1 = f_2 \circ g$. Тогда из τ-псевдокомпактности отображения f_1 следует τ-псевдокомпактность отображения f_2.*

Доказательство. Предположим, что отображение $f_2 : X_2 \to Y$ не τ-псевдокомпактно. Тогда существуют открытое в Y множество O, точка $y \in O$ и τ-локальная открытая в прообразе $f_2^{-1}O$ система λ_2 такие, что для любой окрестности Oy точки y имеем $\left|\operatorname{St}\left(f_2^{-1}Oy, \lambda_2\right)\right| \geq \tau$.

Так как отображение g непрерывно и сюръективно, система $g^{-1}\lambda_2$ τ-локальна и открыта в пространстве $g^{-1}\left(f_2^{-1}O\right) = f_1^{-1}O$. Поскольку отображение f_1 τ-псевдокомпактно, для системы $g^{-1}\lambda_2$ существует окрестность O_2y точки y такая, что $\left|\operatorname{St}\left(f_1^{-1}O_1y, g^{-1}\lambda_2\right)\right| < \tau$. Следовательно, $\left|\operatorname{St}\left(g\left(f_1^{-1}O_1y\right), g(g^{-1}\lambda_2)\right)\right| \geq \tau$. Но у нас $g\left(f_1^{-1}O_1y\right) = \left(f_2^{-1} \circ f_1\right)\left(f_1^{-1}O_1y\right) = f_2^{-1}O_1y, g(g^{-1}\lambda_2) = \lambda_2$ и $\left|\operatorname{St}\left(f_2^{-1}Oy, \lambda_2\right)\right| \geq \tau$ для любой окрестности Oy точки y. Полученное противоречие доказывает свойство 1.

Пусть даны отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $\alpha \in A$. Будем далее послойное произведение f отображений $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $\alpha \in A$ (см. [7]) называть *произведением отображений* $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $\alpha \in A$, и обозначать через $f = \prod\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$.

Имеем отображение $f : X \to Y$ и для любого $y \in Y$

$$f^{-1}y = \prod_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}y \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Известно

Свойство 2. *Послойное произведение совершенных отображений совершенно.*

2. Относительно τ-псевдокомпактные отображения.

Определение 1. Пусть дано непрерывное отображение $f : X \to Y$, $X_1 \subset X$. Подотображение $g = f|_{X_1} : X_1 \to Y$ отображения f называется *относительно τ-псевдокомпактным в f*, если для любых открытого в Y множества O, точки $y \in O$ и открытой τ-локальной в $f^{-1}O$ системы λ существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $|\operatorname{St}(g^{-1}Oy, \lambda)| < \tau$.

Замечание 1. Ясно, что любое τ-псевдокомпактное отображение $f : X \to Y$ является относительно τ-псевдокомпактным в себе.

Свойство 1. *Непрерывный образ относительно τ-псевдокомпактного отображения относительно τ-псевдокомпактен.*

Доказательство. Пусть имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X_1' \subset & X_1 & \xrightarrow{\xi} & X_2 & \supset X_2' \\ {}_{g_1}\searrow & {}_{f_1}\searrow & & \swarrow_{f_2} & \swarrow_{g_2} \\ & & Y & & \end{array}$$

Отображение $g_1 : X_1' \to Y$ относительно τ-псевдокомпактно в f_1. Докажем, что отображение $g_2 = \xi(g_1)$ относительно τ-псевдокомпактно в f_2. Рассмотрим открытое в Y множество O и точку $y \in O$. Пусть система λ_2 τ-локальна и открыта в трубке $f_2^{-1}O$. Тогда система $\lambda_1 = \xi^{-1}\lambda_2$ открыта и τ-локальна в трубке $f_1^{-1}O = \xi^{-1}f_2^{-1}O$. Так как отображение $g_1 : X_1' \to Y$ относительно τ-псевдокомпактно в f_1, существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $\left|\mathrm{St}\big(g_1^{-1}Oy, \lambda_1\big)\right| < \tau$. Тогда $\left|\mathrm{St}\big(\xi\big(g_1^{-1}Oy\big), \xi_1^2\big)\right| < \tau$, следовательно, $\left|\mathrm{St}\big(g_2^{-1}Oy\big), \lambda_2\right| < \tau$.

Свойство 2. *Пусть отображение $f_1 : X_1 \to Y$, $f_1 = f|_{X_1}$ относительно τ-псевдокомпактно в $f : X \to Y$, $X_1 \subset X$ и $X_2 \subset X_1$. Тогда отображение $f_2 = f|_{X_2} : X_2 \to Y$ относительно τ-псевдокомпактно в f.*

Доказательство. Рассмотрим открытое в Y множество O, точку $y \in O$ и открытую τ-локальную в трубке $f^{-1}O$ систему λ. Так как отображение $f_1 = f|_{X_1}$ относительно τ-псевдокомпактно в f, существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $\left|\mathrm{St}\big(f_1^{-1}Oy, \lambda\big)\right| < \tau$. Поскольку $f_2^{-1}Oy \subset f_1^{-1}Oy$, то $\left|\mathrm{St}\big(f_2^{-1}Oy, \lambda\big)\right| < \tau$.

Свойство 3. *Пусть $X_2 \subset X_1 \subset X$, где $f_2 = f|_{X_2} : X \to Y$ — отображение, $f : X \to Y$ относительно τ-псевдокомпактно в $f_1 : X_1 \to Y$, $f_1 = f|_{X_1}$. Тогда f_2 относительно τ-псевдокомпактно в f.*

Доказательство. Рассмотрим открытое в Y множество O, точку $y \in O$ и τ-локальную открытую в $f^{-1}O$ систему λ. Тогда система $\lambda \cap f_1^{-1}O$ открыта и τ-локальна в $f_1^{-1}O$, следовательно, существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $\left|\mathrm{St}\big(f_2^{-1}O, \lambda \cap f_1^{-1}O\big)\right| < \tau$. Так как $f_2^{-1}O \subset f_1^{-1}O$, то и $\left|\mathrm{St}\big(f_2^{-1}Oy, \lambda\big)\right| < \tau$.

3. c-τ-Ограниченные отображения.

Определение 1. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ назовем *c-τ-ограниченным*, если любое его замкнутое относительно τ-псевдокомпактное подотображение $g = f|_{X_1}$, где X_1 замкнуто в X, является совершенным отображением.

Рассмотрим некоторые примеры c-τ-ограниченных отображений. Напомним [8], что отображение $f : X \to Y$ называется *T_0-отображением*, если для любых двух точек x и $x' \neq x$ таких, что $fx = fx'$, хотя бы у одной из точек x, x' в X найдется окрестность, не содержащая другую точку, и *вполне регулярным*, если для любых точки $x \in X$ и замкнутого в X множества F ($F : x \notin F$) найдется окрестность O точки fx такая, что в прообразе $f^{-1}O$ точка x и множество F функционально отделимы. *Тихоновским отображением* называется вполне регулярное T_0-отображение. Напомним также [8], что отображение $bf : X \to Y$ называется *бикомпатификацией отображения* $f : X \to Y$, если $X \subseteq X$, $[X] = X$, $bf|_X = f$ и bf — бикомпактное (совершенное) отображение. Для двух бикомпактификаций $b_1f : X_1 \to Y$, $b_2f : x_2 \to Y$ отображения $f : X \to Y$ считается

$b_2 f \geq b_1 f$, если существует естественное отображение X_2 в X_1 . Любое тихоновское отображение $f : X \to Y$ обладает хотя бы одной тихоновской бикомпактификацией, и среди всех тихоновских бикомпактификаций отображения f существует его максимальная бикомпактификация $\beta f : \beta_f X \to Y$.

Обобщая определение Б. А. Пасынкова трубчато-полного по Дьедонне отображения [9], получаем следующее

Определение 2. Тихоновское отображение $f : X \to Y$ назовем *обобщенно-полным по Дьедонне*, если для любой точки $x \in \beta_f X \setminus X$ существуют окрестность U точки $(\beta f)x$ в Y и открытое локально конечное в $f^{-1}U$ покрытие λ трубки $f^{-1}U$ такое, что $x \notin U[\lambda]^{-1}_{(\beta f)U} \equiv \cup\{[O](\beta f)^{-1}U : O \subset \lambda\}$.

Заметим, что трубчато-полные по Дьедонне отображения, а также $\mathbb{R}$-полные отображения [10] представляют собой обобщенно-полные по Дьедонне отображения.

Лемма 1. *Обобщенно-полное по Дьедонне отображение $f : X \to Y$, где Y — T_1-пространство, является c-ω-ограниченным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим относительно псевдокомпактное замкнутое подотображение $f_1 = f|_{X_1}$ отображения f, где X_1 замкнуто в X. Докажем, что отображение $f_1 : X_1 \to Y$ совершенно. Пусть $y \in Y$. Покажем, что прообраз $f_1^{-1}y$ бикомпактен.

Так как Y представляет собой T_1-пространство и множество $\{y\}$ замкнуто в Y, множество $f_1^{-1}y$ замкнуто в X_1. Поскольку отображение f обобщенно-полно по Дьедонне, для любого $x \in \beta_f X \setminus X$ такого, что $(\beta f)x = y$, существуют окрестность O точки y в пространстве Y и открытое локально конечное покрытие λ трубки $f^{-1}O$ такое, что $x \notin \cup[\lambda]_{(\beta f)^{-1}O}$. Так как отображение $f_1 : X_1 \to Y$ относительно псевдокомпактно в f, существует окрестность $O_1 y$ точки y, лежащая в O, такая, что $\left|\mathrm{St}\left(f_1^{-1}O_1 y, \lambda\right)\right| < \omega$. Значит, поскольку $x \notin \cup[\lambda]_{\beta_f X}$, имеем

$$\begin{aligned} f_1^{-1}y \subset f_1^{-1}Oy \subset B(x) = \cup\left[\mathrm{St}\left(f_1^{-1}O_1 y, \lambda\right)\right]_{\beta_f X} \cap X_1 \\ = \left[\cup \mathrm{St}\left(f_1^{-1}O_1 y, \lambda\right)\right]_{\beta_f X} \cap X_1 \not\ni x. \end{aligned}$$

Множество $B(x)$ замкнуто в $\beta_f X$, и $f_1^{-1}y \subset B(x)$ для любого $x \in \beta_f X \setminus X$ такого, что $(\beta f)x = y$. В силу того, что отображение $\beta f : \beta_f X \to Y$ совершенно, множество $(\beta f)^{-1}y$ бикомпактно, причем $f^{-1}y \subset (\beta f)^{-1}y$. Тогда $B = (\cap\{B(x) = x \in \beta_f X \setminus X, (\beta f)x = y\}) \cap (\beta f)^{-1}y$ — бикомпакт такой, что $f_1^{-1}y \subset B \subset (\beta_f X \setminus ((\beta_f X) \setminus X)) \cap X_1 = X_1$. Тем самым $f_1^{-1}y$ — бикомпакт как замкнутое подмножество бикомпакта B. Отображение f_1 совершенно, ибо оно замкнуто.

Следствие 1. *Трубчато $\mathbb{R}$-полное отображение $f : X \to Y$, где Y представляет собой T_1-пространство, является c-ω-ограниченным отображением.*

Следствие 2. *Полное по Дьедонне отображение $f : X \to Y$, где Y представляет собой T_1-пространство, является c-ω-ограниченным отображением.*

Известно [11, теорема 3.1.1], что пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда оно псевдокомпактно и $\mathbb{R}$-полно.

Теорема 1. *Замкнутое тихоновское отображение $f : X \to Y$ совершенно тогда и только тогда, когда оно псевдокомпактно* [6] *и $\mathbb{R}$-полно.*

Доказательство. 1. Совершенное отображение псевдокомпактно и $\mathbb{R}$-полно [6].

2. Псевдокомпактное замкнутое $\mathbb{R}$-полное отображение совершенно (см. [5]).

Теорема 2. *Отображение $f : X \to Y$ совершенно тогда и только тогда, когда оно псевдокомпактно, c-ω-ограничено и замкнуто.*

Доказательство. 1. Совершенное отображение псевдокомпактно, замкнуто и c-ω-ограничено. Действительно, пусть X_1 замкнуто в X, тогда $f_1 = f|_{X_1} : X_1 \to Y$ совершенно.

2. Псевдокомпактное замкнутое c-ω-ограниченное отображение совершенно (из определения).

4. Мультипликативность c-τ-ограниченности отображений.

Предложение 1. *Пусть отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ замкнуты и c-τ-ограничены для любого $\alpha \in A$. Тогда их послойное произведение $f : X \to Y$ также c-τ-ограничено.*

Доказательство. Пусть $f_1 : X_1 \to Y$ — относительно τ-псевдокомпактное замкнутое подотображение отображения f, причем множество X_1 замкнуто в $X_0 \subset \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. (Заметим, что $X_0 \neq \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, см. [7].) Докажем, что f_1 совершенно.

Так как отображения $\pi_\alpha|_{X_1} : X_1 \to X_\alpha$, где $\pi_\alpha : X_0 \to X_\alpha$ — проекция, сюръективны и непрерывны для любого $\alpha \in A$, отображения $f_\alpha|_{\pi_\alpha} X_1 : X_1 \to Y$ относительно τ-псевдокомпактны в f_α для любого $\alpha \in A$ (свойство 1 из п. 2).

Поскольку множество X_1 замкнуто в X_0 и $X_1 = \prod\limits_{\alpha \in A} \pi_\alpha X_1$, множества $\pi_\alpha X_1$ замкнуты в пространствах X_α для любого $\alpha \in A$ [11]. Следовательно, отображения $f_\alpha|_{\pi_\alpha} X_1$ замкнуты для любого $\alpha \in A$.

В силу того, что отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ c-ω-ограничены, отображения $f_\alpha|_{\pi_\alpha X_1} : X_1 \to Y$ совершенны для всех $\alpha \in A$. Но тогда по свойству 2 отображение $\prod\limits_{\alpha \in A} (f_\alpha|_{\pi_\alpha X_1}) \equiv f_1 : X_1 \to Y$ совершенно.

5. Решетки непрерывных морфизмов на отображениях.

Определение 1. Пусть даны отображения $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$. Морфизм $\varphi : f_1 \to f_2$ называется *вложением*, если непрерывное отображение $\varphi : X_1 \to X_2$ является вложением ($f_2|_{\varphi X_1} \equiv f_2$).

Замечание. Здесь и далее одним и тем же символом φ удобно обозначать морфизм $\varphi : f_1 \to f_2$ и соответствующее ему непрерывное отображение $\varphi : X_1 \to X_2$, где $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$.

Определение 2. Пусть дано непрерывное отображение $f : X \to Y$. Назовем систему $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$, состоящую из направленного множества A, непрерывных сюръективных морфизмов φ_α отображения $f : \varphi_\alpha : f \to f_\alpha$, где $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $f_\alpha = \varphi_\alpha f$, $\alpha \in A$, и непрерывных сюръективных морфизмов $\varphi_{\beta\alpha} : \varphi_\beta \circ f \to \varphi_\alpha \circ f$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$, *решеткой непрерывных морфизмов на отображении* $f : X \to Y$, если выполнены следующие условия:

1) $\Delta = \Delta_{\alpha \in A} \varphi_\alpha : f \to \prod\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ — вложение;

2) $\varphi_\alpha = \varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_\beta$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$.

Напомним [2], что отображение $f : X \to Y$ называется d-открытым, если образ любого открытого в X множества плотен в некотором открытом в Y множестве.

Определение 3. Решетка L называется *τ-направленной*, если множество A τ-направлено, и *d-открытой*, если все морфизмы φ_α d-открыты.

Замечание. Решетке $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$ непрерывных морфизмов на отображении $f : X \to Y$ соответствует решетка $L_0 = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$ непрерывных отображений пространства X, где $\varphi_\alpha : X \to X_\alpha$ являются непрерывными сюръективными отображениями пространства X для всех $\alpha \in A$, отображения $\varphi_{\beta\alpha} : \varphi_\beta X \to \varphi_\alpha X$ — отображения образов пространства X при $\varphi_\beta, \varphi_\alpha, \alpha, \beta \in A$.

Если решетка L τ-направлена (d-открыта), то соответствующая ей решетка L_0 также τ-направлена (d-открыта).

Определение 4. Пусть дана система морфизмов $\{\varphi_\alpha : f_\alpha \to g_\alpha,\ \alpha \in A\}$. *Произведением морфизмов* $\varphi = \prod\limits_{\alpha\in A} \varphi_\alpha$ называется морфизм, переводящий произведение отображений $f = \prod\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ в произведение отображений $f = \prod\limits_{\alpha\in A} g_\alpha$ так, что $f = g \circ \varphi$.

6. Теоремы о мультипликативности относительно τ-псевдокомпактных отображений.

Предложение 1. *Пусть дано непрерывное отображение $f : X \to Y$ и имеется τ-направленная решетка $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$ d-открытых морфизмов на отображении f. Подотображение $f_1 : X_1 \to y$, $X_1 \subset X$, относительно τ-псевдокомпактно в f тогда и только тогда, когда его образ $\varphi_\alpha \circ f_1 = f_{1\alpha}$ относительно τ-псевдокомпактен в $f_\alpha = \varphi_\alpha \circ f$ для любого $\alpha \in A$.*

Доказательство. 1. Если отображение $f_1 : X_1 \to Y$ относительно τ-псевдокомпактно в $f : X \to Y$, то его образ $f_{1\alpha} = X_{1\alpha} = \varphi_\alpha X_1 \to Y$ относительно τ-псевдокомпактен в f_α по свойству 1 из п. 2.

2. Пусть для любого $\alpha \in A$ отображение $f_{1\alpha} : X_{1\alpha} \to Y$ относительно τ-псевдокомпактно в f_α. Предположим, что отображение $f_1 : X_1 \to Y$ не является относительно τ-псевдокомпактным в f. Тогда существуют открытое в Y множество O, точка $y \in O$ и τ-локальная в $f^{-1}O$ система $\lambda = \{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, состоящая из элементов базы пространства X, такие, что $|\Gamma| \geq \tau$ и $\left|\mathrm{St}\big(f_1^{-1}Oy, \lambda\big)\right| \geq \tau$ для любой окрестности Oy точки y, лежащей в O. Из τ-направленности решетки I_0 следует, что $\forall U_\gamma \in \lambda\ \exists W_\gamma \subset X_{\alpha 0} = \varphi_{\alpha(0)} X : \varphi^{-1}_{\alpha(0)} W_\gamma = U_\gamma$. Получаем открытую систему $\nu = \{W_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в пространстве $X_{\alpha(0)}$ (здесь $\alpha(0) \in A$ — индекс такой, что $\alpha(0) > \alpha(\gamma)$ для любого $\gamma \in \Gamma$).

Так как система ν открыта в пространстве $\varphi_{\alpha(0)}(f^{-1}O)$, отображение $\varphi_{\alpha(0)}$ d-открыто и система $\varphi^{-1}_{\alpha(0)}\nu = \lambda$ τ-локальна в $f^{-1}O$, то система ν τ-локальна в $\varphi_{\alpha(0)}(f^{-1}O)$ [5]. Поскольку $f = f_{\alpha[0]} \circ \varphi_{\alpha(0)}$, то $f^{-1}O = (f_{\alpha(0)} \circ \varphi_{\alpha(0)})^{-1}O = \varphi^{-1}_{\alpha(0)}\big(f^{-1}_{\alpha(0)}O\big)$, т. е. система ν τ-локальна в $f^{-1}_{\alpha(0)}O$. Ввиду того, что отображение $f_{\alpha(0)} : X_{\alpha(0)} \to Y$ относительно τ-псевдокомпактно в $f_{\alpha(0)}$, для нашего $y \in O$ и системы ν существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $\left|\mathrm{St}\big(f^{-1}_{1\alpha(0)}Oy, \nu\big)\right| < \tau$, следовательно, $\left|\mathrm{St}\big(f_1^{-1}Oy, \lambda\big)\right| < \tau$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Лемма 1. *Пусть отображение $f : X \to Y$ d-открыто, $X_1 \subset X$. Тогда подотображение $f_1 = f|_{X_1} : X_1 \to Y$ d-открыто.*

Доказательство. Известно [2], что отображение $f : X \to Y$ d-открыто тогда и только тогда, когда для любого открытого в Y множества V выполняется условие $[f^{-1}V] = f^{-1}[V]$. Рассмотрим открытое в Y множество V. Имеем

$f_1^{-1}[V]_{X_1} = f^{-1}[V] \cap X_1 = [f^{-1}V] \cap X_1 = \left[f_1^{-1}V\right]_{X_1}$. Следовательно, отображение $f_1 : X_1 \to Y$ d-открыто.

Лемма 2. *Пусть отображение $f : X \to Y$ c-τ-ограничено, X_1 замкнуто в X. Тогда подотображение $f_1 = f|_{X_1} : X_1 \to Y$ c-τ-ограничено*

Доказательство. Пусть отображение $f_2 : X_2 \to Y$, где X_2 замкнуто в X_1, относительно τ-псевдокомпактно в f_1 и замкнуто. Имеем $f_2 = f_1|_{X_2} = f|_{X_2}$. Так как X_2 замкнуто в X_1, X_1 замкнуто в X, то X_2 замкнуто в X [11]. Поскольку $X_2 \subset X_1$, то по свойству 3 из п. 2 отображение $f_2 : X_2 \to Y$ относительно τ-псевдокомпактно в f.

Ввиду c-τ-ограниченности отображения $f : X \to Y$ отображение $f_2 : X_2 \to Y$ совершенно.

Теорема 1. *Если отображения $f_1^s : X_1^s \to Y$ замкнуты, c-τ-ограничены и относительно τ-псевдокомпактны в $f^s : X^s \to Y$, где $f_1^s = f^s|_{X_1^s}$, $X_1^s \subset X^s$, $s \in S$, то отображение $f_1 = \prod\limits_{s\in S} f_1^s$ относительно τ-псевдокомпактно в $f = \prod\limits_{s\in S} f^s$.*

Доказательство. Рассмотрим открытое в Y множество O, точку $y \in O$ и открытую τ-локальную систему $\lambda = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в пространстве $f^{-1}O$.

Отображение f_1^s совершенно для любого $s \in S$. Значит, отображение $f_1 = \prod\limits_{s\in S} f_1^s$ совершенно. Следовательно, прообраз $f_1^{-1}y$ точки y бикомпактен.

Согласно τ-локальности системы λ в пространстве $f^{-1}O$ для любой точки $x \in f_1^{-1}y$ существует ее окрестность Ox в пространстве $f^{-1}O$ такая, что $|\operatorname{St}(\lambda, Ox)| < \tau$. Так как пространство $f_1^{-1}y$ бикомпактно, из открытого покрытия $\mu = \left\{Ox \wedge f_1^{-1}y,\, x \in f^{-1}y\right\}$ пространства $f_1^{-1}y$ можно выделить конечное подпокрытие μ' такое, что $f^{-1}y \subset \cup\mu'$. Тогда существуют $x_1, \dots, x_k \in f^{-1}y$ такие, что $f^{-1}y \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} Ox_j = V$. Поскольку отображение f_1 замкнуто, существует окрестность Oy точки y такая, что $f_1^{-1}Oy \subset V$. Таким образом, получаем $|\operatorname{St}(\lambda, V)| < \tau$, следовательно, $\left|\operatorname{St}\left(\lambda, f_1^{-1}Oy\right)\right| < \tau$. Значит, отображение f_1 относительно τ-псевдокомпактно в f.

Теорема 2. *Пусть отображения $f^s : X^s \to Y$ замкнуты и на них имеются τ-направленные решетки $L^s = \{\varphi_{\alpha(s)}, \varphi_{\beta(s)\alpha(s)}; A(s)\}$, $s \in S$, d-открытых морфизмов на c-τ-ограниченные отображения $f_{\alpha(s)} : f_{\alpha(s)} = \varphi_{\alpha(s)} \circ f^s$, $s \in S$, $\alpha(s) \in A(s)$. Пусть также отображения $f_1^s = f^s|_{X_1^s}$, $f_1^s : X_1^s \to Y$, где X_1^s замкнуто в X^s, замкнуты и относительно τ-псевдокомпактны в f^s, $s \in S$. Тогда произведение $f_1 = \prod\limits_{s\in S} f_1^s$ относительно τ-псевдокомпактно в $f = \prod\limits_{s\in S} f^s$.*

Доказательство. По предложению 1 из п. 6 отображения $f^1_{\alpha(s)} = \varphi_{\alpha(s)} \circ f_1^s$ относительно τ-псевдокомпактны в $f_{\alpha(s)} = \varphi_{\alpha(s)} \circ f^s$ для любого $\alpha(s) \in A(s)$.

Пусть $A \in \prod\limits_{s\in S} A(s)$. Рассмотрим решетку $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$ на отображения f. Здесь

$$\varphi_\alpha = \prod_{s\in S} \varphi_{\alpha(s)},\ \varphi_\alpha : f \to f_\alpha, \quad f_\alpha = \prod_{s\in S} f_{\alpha(s)}, \quad \alpha \in A,\ s \in S,$$

$$\varphi_{\beta\alpha} = \prod_{s\in S} \varphi_{\beta(s)\alpha(s)},\ \beta > \alpha,\ \beta \in A, \quad \varphi_{\beta\alpha} : f \to f_\alpha.$$

Порядок на множестве A вводится следующим образом. Для $\alpha = \{\alpha(s) : s \in S\}$ и $\beta = \{\beta(s) : s \in S\}$, $\alpha(s), \beta(s) \in A(s)$, $s \in S$, считаем $\beta > \alpha$, если $\beta(s) > \alpha(s)$ для любого $s \in S$. Множество A с введенным порядком является τ-направленным, ибо для любого $s \in S$ множество $A(s)$ τ-направлено.

Так как морфизмы $\varphi_{\alpha(s)}$ d-открыты для любого $s \in S$, произведения $\varphi_\alpha = \prod\limits_{s \in S} \varphi_{\alpha(s)}$ d-открыты как произведения d-открытых морфизмов. Кроме того, поскольку $\varphi_{\alpha(s)} = \varphi_{\beta(s)\alpha(s)} \circ \varphi_{\beta(s)}$ для любого $s \in S$, то $\varphi_\alpha = \varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_\beta$, $\beta > \alpha$, $\beta, \alpha \in A$.

Поскольку $\Delta\{\varphi_{\alpha(s)} : \alpha(s) \in A(s)\} : f_s \to \prod\limits_{\alpha(s) \in A(s)} f_{\alpha(s)}$ — вложение для любого $s \in S$, то $\Delta\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\} : f \to \prod\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ тоже вложение.

Таким образом, L является τ-направленной решеткой d-открытых морфизмов на отображении $f = \prod\limits_{s \in S} f^s$, и отображения $f_1 = \prod\limits_{s \in S} f_1^s$ относительно τ-псевдокомпактны в произведении $f_\alpha = \prod\limits_{s \in S} f_{\alpha(s)}$ по теореме 1 из п. 6.

По предложению 1 п. 6 отображение f_1 относительно τ-псевдокомпактно в f.

Как следствие теоремы 2 при $\tau = \omega$ получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть на замкнутых отображениях $f^s : X^s \to Y$ имеются счетно-направленные решетки d-открытых морфизмов на обобщенно-полные по Дьедонне отображения (в частности, на полные по Дьедонне или $\mathbb{R}$-полные отображения) и отображения $f^s : X^s \to Y$, $f_1^s = f^s|_{X_1^s}$, $X_1^s \subset X^s$ относительно псевдокомпактны в f_s, $s \in S$. Тогда их произведение $f_1 = \prod\limits_{s \in S} f_1^s$ относительно псевдокомпактно в $f = \prod\limits_{s \in S} f^s$.*

7. Следствия теоремы о мультипликативности τ-псевдокомпактности для пространств. Так как любое пространство X можно рассматривать как непрерывное отображение $f : X \to Y$ в точку, причем наше отображение замкнуто и пространство $Y = \{y\}$ локально бикомпактно, то мы получаем следующие следствия теорем о мультипликативности τ-псевдокомпактности для пространств [5].

7.1. c-τ-Ограниченные пространства. Напомним [5], что множество $B \subset X$ называется относительно *τ-псевдокомпактным в X*, если $|\operatorname{St}(\lambda, B)| < \tau$ для любой τ-локальной открытой в X системы λ.

При $\tau = \omega$ относительная τ-псевдокомпактность множества B в тихоновском пространстве X равносильна его ограниченности, или относительной псевдокомпактности [2], т. е. ограниченности на B любой непрерывной функции $\varphi = X \to \mathbb{R}$.

Из определения относительной τ-псевдокомпактности вытекают следующие свойства.

Свойство 1. *Если отображение $f : X \to Y$ непрерывно и множество B относительно τ-псевдокомпактно в X, то образ $f(B)$ относительно τ-псевдокомпактен в Y.*

Свойство 2. *Если множество B относительно τ-псевдокомпактно в X, то его замыкание $[B]$ относительно τ-псевдокомпактно в X.*

Свойство 3. *Если B — относительно τ-псевдокомпактное подмножество подпространства Y пространства X, то B относительно τ-псевдокомпактно в X.*

Определение 1. Пространство X называется *c-τ-ограниченным*, если замыкание любого относительного τ-псевдокомпактного подмножества в X бикомпактно.

Замечание 1. Замкнутое подпространство Y c-τ-ограниченного пространства X само c-τ-ограничено.

Предложение 1. *Класс c-τ-ограниченных пространств мультипликативен.*

Доказательство. Пусть для любого $\alpha \in A$ пространство X_α является c-τ-ограниченным, и пусть множество B относительно τ-псевдокомпактно в $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Для любого $\alpha \in A$ множество $\pi_\alpha B$, где π_α — проекция X на X_α, относительно τ-псевдокомпактно в X_α. Поэтому замыкание $[\pi_\alpha B]$ бикомпактно. Тогда произведение $C = \prod\{[\pi_\alpha B] : \alpha \in A\}$ также бикомпактно и $[B] \subset C$. Следовательно, замыкание $[B]$ бикомпактно.

Лемма 1. *Отображение f c-ограниченного пространства X в точку $\{y\}$ c-τ-ограничено.*

Доказательство. Для любого подотображения $f_1 = f|_{X_1}$, где X_1 замкнуто в X, для точки y имеем $\left|\mathrm{St}\left(f_1^{-1}y, \lambda\right)\right| < \tau$. Пространство X_1 относительно τ-псевдокомпактно в X, и так как X_1 замкнуто в X, пространство $[X_1] = X_1$ бикомпактно. Следовательно, отображение f_1 совершенно.

Таким образом, c-τ-ограниченные пространства являются частным случаем c-τ-ограниченных отображений.

7.2. c-ω-Ограниченные пространства. Укажем некоторые классы c-ω-ограниченных пространств.

Определение 2 (Б. А. Пасынков). Тихоновское пространство X называется *обобщенно-полным по Дъедонне пространством*, если для любой точки $x \in \beta X \setminus X$ существует открытое локально конечное покрытие ω пространства X со свойством $x \notin \cup[\omega]_{\beta X} \equiv \cup\{[O]_{\beta X} : O \in \omega\}$.

Предложение 2. *Обобщенно-полное по Дьедонне пространство является c-ω-ограниченным* [5].

Следствие. *Полные по Дьедонне пространства c-ω-ограничены.*

Лемма 2. *Если пространство X нормально, множество B относительно псевдокомпактно в X и замкнуто в X, то пространство B счетно-компактно* [5].

Следствие 1. *Замыкание относительно псевдокомпактного подмножества B нормального пространства X счетно-компактно.*

Напомним, что пространство X называется *изокомпактным*, если любое счетно-компактное замкнутое подпространство пространства X бикомпактно.

Следствие 2. *Нормальное изокомпактное пространство c-ω-ограничено.*

Следствие 3. *Замкнутое подпространство произведения нормальных изокомпактных пространств c-ω-ограничено.*

Следствие 4. *Замкнутое подпространство произведения нормальных слабо паракомпактных пространств c-ω-ограничено.*

Другие примеры c-ω-ограниченных пространств можно найти в работах [4, 12].

Утверждение 6 [4]. *Пусть пространство X уплотняется на метризуемое пространство и множество B ограничено в X. Тогда $[B]_X$ — компакт.*

Значит, пространства, уплотняемые на метризуемые пространства, $c-\omega$-ограничены.

Определение [4]. Подгруппа H топологической группы G называется *допустимой*, если существует последовательность $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых окрестностей единицы в G такая, что $U_n^{-1} = U_n$, $U_{n+1}^3 \subseteq U_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $H = \cap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Известно [4], что любая допустимая подгруппа группы G замкнута в G.

Утверждение 3 [4]. *Пусть H — допустимая подгруппа топологической группы G. Тогда G/H уплотняется на метризуемое пространство.*

Следствие. *Если H — допустимая подгруппа топологической группы G, то пространство G/H c-ω-ограничено.*

В работе [12] дается определение μ-пространства.

Определение [12]. Если A — компакт для любого ограниченного $A \subset X$, то X является μ-пространством.

Ясно, что классы μ-пространств и c-ω-ограниченных пространств совпадают. Там же указываются некоторые свойства μ-пространств.

Теорема 1 [12]. *Если X — μ-пространство и Y замкнуто в X, то каноническое отображение $i_Y : F(Y) \to F(X)$ является k-отображением (т. е. $i^{-1}y(\Phi)$ — компакт для любого компакта $\Phi \subset F(X)$).*

Таким образом, рассмотрено несколько классов $c-\omega$-ограниченных пространств. Можно построить ряд классов c-ω-ограниченных отображений, соответствующих им.

Напомним [12], что отображение $f : X \to Y$ называется *d-открытым*, если для любого открытого множества $O \subset X$ существует открытое в Y множество V такое, что $fO \subset V \subset [fO]$.

Свойство 1. *Произведение d-открытых отображений d-открыто [2].*

Теорема 1 [5]. *Если на топологических пространствах X_s, $s \in S$, имеются τ-направленные решетки d-открытых отображений на c-τ-ограниченные пространства, множества C_s относительно τ-псевдокомпактны в X_s, $s \in S$, то множество $C = \prod\{C_s : s \in S\}$ относительно τ-псевдокомпактно в $X = \prod\{X_s : s \in S\}$.*

Доказательство следует из теоремы 1 п. 1 и леммы 1.

Учитывая приведенные выше примеры c-ω-ограниченных пространств, при $\tau = \omega$ получаем следствия данной теоремы.

Теорема 2. *Если на топологических пространствах X_s, $s \in S$, имеются счетно-направленные решетки d-открытых отображений на c-τ-ограниченные пространства, в частности, на*

1) *обобщенно-полные по Дьедонне пространства;*
2) *полные по Дьедонне пространства;*
3) *нормальные изокомпактные пространства;*
4) *замкнутые подпространства нормальных изокомпактных пространств;*
5) *замкнутые подпространства нормальных слабо паракомпактных пространств;*

6) *пространства, уплотняемые на метризуемые пространства;*
7) *фактор-пространства топологических групп по допустимым подгруппам этих групп;*
8) *свободные топологические группы над μ-пространствами множества C_s относительно псевдокомпактны в X_s, $s \in S$,*

то множество $C = \prod\{C_s : s \in S\}$ относительно псевдокомпактно в $X = \prod\{X_s : s \in S\}$.

Следствие 1 [1]. *Произведение псевдокомпактных топологических групп является псевдокомпактной топологической группой*

Следствие 2 [3]. *Подпроизведение относительно псевдокомпактных подмножеств d-пространств относительно псевдокомпактно в произведении.*

Замечание. П. 2 теоремы 2 доказан в [4].

Таким образом, в работе рассмотрено понятие τ-псевдокомпактного отображения, а также некоторые его свойства, аналогичные свойствам псевдокомпактного пространства, и следствия полученных утверждений для пространств.

Все задачи поставлены Б. А. Пасынковым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Comfort W., Kenneth A. R.* Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups // Pacific J. Math. 1966. V. 16, N 3. P. 483–496.

2. *Ткаченко М. Г.* Обобщение теоремы Комфорта — Росса. I // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 3. С. 377–382.

3. *Успенский В. В.* Топологические группы и компакты Дугунджи // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 8. С. 1092–1118.

4. *Ткаченко М. Г.* Обобщение теоремы Комфорта — Росса. II // Укр. мат. журн. 1989. Т. 41, № 7. С. 939–952.

5. *Миронова Ю. Н.* Мультипликативность относительной τ-псевдокомпактности // Общая топология. Отображения, произведения и размерность пространств. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 77–82.

6. *Миронова Ю. Н.* Свойства o-псевдокомпактных отображений // Математика. Образование. Экономика: Тез. докл./ VI междунар. конф. женщин-математиков, Чебоксары, 25–30 мая 1998 г. Чебоксары, 1998. С. 54.

7. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.

8. *Пасынков Б. А.* О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 77–82.

9. *Бузулина Т. И., Пасынков Б. А.* О полных по Дьедонне отображениях // Геометрия погруженных многообразий: Межвузовский сб. науч. тр. М.: МГПИ, 1989. С. 95–99.

10. *Ильина Н. И., Пасынков Б. А.* Об $\mathbb{R}$-полных отображениях // Геометрия погруженных многообразий: Межвузовский сб. науч. тр. М.: МГПИ, 1989. С. 125–131.

11. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

12. *Arhangel'skii A. B.* Free topological groups: the theory of present and problems // Бакинская междунар. топологическая конф.: Тез. докл. Баку, 1987. С. 18.

Статья поступила 10 января 1999 г.,
Окончательный вариант — 30 июля 1999 г.

Миронова Юлия Николаевна
Московская гос. юридическая академия, г. Москва
mironovajn@mail.ru