Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.95

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРОПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ. СУЩЕСТВОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

М. М. Лаврентьев (мл.), Р. Спиглер, Д. Р. Ахметов

Аннотация: Развиваются необходимые математические средства для исследования одной задачи, возникающей в приложениях. Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного интегропараболического уравнения типа Фоккера — Планка, которая является регуляризацией исходной физической постановки. Доказывается существование классических решений этой задачи, обладающих рядом специальных свойств, необходимых для исследования исходной задачи. Библиогр. 15.

1. Введение

В работе развиваются необходимые математические средства для исследования одной задачи, возникающей в физике, математическая формулировка которой была предложена в [1]. Точная постановка и обсуждение соответствующих физических результатов выходят за рамки настоящей работы.

Рассматривается задача классической разрешимости одного нелинейного интегропараболического уравнения типа Фоккера — Планка. Эта задача является регуляризацией исходной постановки задачи, возникающей в приложениях и сформулированной в [1]. Необходимо получить решение, обладающее рядом специальных свойств, а именно: решение должно быть положительным и нормированным, а также периодическим по одной из пространственных переменных и экспоненциально убывающим на бесконечности — по другой. Эти свойства будут использованы в дальнейшем при исследовании исходной «физической» задачи.

Регуляризованная краевая задача формулируется так. В области $Q_T = [0,2\pi]\times\mathbb{R}\times[0,T]\times[-G,G]$ изменения переменных (θ,ω,t,Ω) найти непрерывную функцию $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$, достаточно гладкую в области $Q_T\cap\{t>0\}$, удовлетворяющую при $t>0$ уравнению

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial^2\rho}{\partial\omega^2} + \varepsilon\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2} - F\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\omega}(F\rho) - \Omega\frac{\partial\rho}{\partial\omega} - \mathscr{K}_s\frac{\partial\rho}{\partial\omega} \tag{1.1}$$

и граничным условиям

$$(\rho,\rho_\theta)|_{\theta=0} = (\rho,\rho_\theta)|_{\theta=2\pi}, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01–05–64704, 00–07–90343, 00–15–99092 и 00–01–00912), the GNFM of the Italian INdAM, фонда ЮНЕСКО (по контракту UVO–ROSTE 875.629.9) и CASPUR–Rome.

а при $t = 0$ — начальным данным

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(\theta, \omega, \Omega), \tag{1.3}$$

где для сокращения записи мы положили

$$\mathscr{K}_s(\theta, t) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} g(\Omega)\sin(\varphi - \theta)\rho(\varphi, \omega, t, \Omega)\, d\varphi d\omega d\Omega. \tag{1.4}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — произвольный параметр, не обязательно малый, а $g(\Omega)$ и $F(\omega)$ — функции, свойства которых будут определены ниже.

Пусть $l_0 \geq 0$ — целое число, а $\alpha_0 \in (0, 1)$ — вещественное. Всюду в дальнейшем данные, входящие в задачу (1.1)–(1.3), предполагаются следующими.

(A) Задающая начальные данные функция $\rho_0(\theta, \omega, \Omega)$ является: (a_1) непрерывной по совокупности аргументов $(\theta, \omega, \Omega) \in Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-G, G]$, принадлежащей пространству Гёльдера $C^{l_0+\alpha_0}(Q)$; (a_2) 2π-периодической по переменной θ; (a_3) положительной во всей области Q; (a_4) нормированной при всех $\Omega \in [-G, G]$, т. е.

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\theta, \omega, \Omega)\, d\omega d\theta = 1; \tag{1.5}$$

и (a_5) экспоненциально убывающей на бесконечности по переменной ω вместе со своими частными производными в соответствии со следующей оценкой: для данного целого $l_0 \geq 0$ выполнены неравенства

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}, \Omega\in[-G,G]} \left|D^{l_1,l_2,l_3}_{\theta,\omega,\Omega}\rho_0(\theta, \omega, \Omega)\right| \leq C_0 e^{-M_0\omega^2}$$

при $\omega \in \mathbb{R}$ и $l_1 + l_2 + l_3 \leq l_0$, где $C_0, M_0 > 0$ — некоторые постоянные, а $l_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ — целые числа.

Здесь и далее символ D^l_ξ, где l и ξ — мультииндексы, означает оператор дифференцирования, имеющий порядки l_i по переменным ξ_i соответственно.

(B) «Срезающая функция» $g(\Omega)$ предполагается: (b_1) принадлежащей пространству $L^1(\mathbb{R})$ и (b_2) имеющей компактный носитель, сосредоточенный на отрезке $[-G, G]$.

(C) Коэффициент $F(\omega)$ предполагается принадлежащим пространству Гёльдера $C^{1+l_0+\alpha_0}(\mathbb{R})$ с теми же параметрами l_0 и α_0, что и в (a_1).

Подчеркнем, что «свободный параметр» Ω в уравнении (1.1) выбирается из носителя функции $g(\Omega)$ (см. (1.4) и (b_2)).

Такую задачу можно считать нестандартной по нескольким причинам:

(1) уравнение (1.1) рассматривается в слое $(\theta, \omega, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times [0, T]$, т. е. в области, неограниченной по переменной ω;

(2) уравнение (1.1) содержит интеграл, берущийся по неограниченной области;

(3) имеется дополнительный параметр Ω, по которому не производится дифференцирования, но который одновременно является и коэффициентом уравнения (1.1), и переменной интегрирования в (1.4);

(4) согласно вышеупомянутым соображениям прикладного характера решение задачи (1.1)–(1.3) должно быть 2π-периодическим по переменной θ, положительным, нормированным, т. е.

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(\theta, \omega, t, \Omega)\, d\omega d\theta = 1$$

при $t \in [0, T]$ и $\Omega \in [-G, G]$ (отрезок $[-G, G]$ совпадает с носителем функции $g(\Omega)$), и обладать заданным экспоненциальным убыванием при $\omega \to \pm\infty$.

Поэтому известные в литературе результаты по линейным и нелинейным параболическим [2–8], а также интегропараболическим уравнениям [9] не применимы в рассматриваемом случае.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 устанавливаются точные оценки убывания сверток непрерывных функций с фундаментальными решениями линейных параболических уравнений в неограниченных областях в пространствах $\mathbb{R}^n$. Эти результаты являются новыми и представляют самостоятельный интерес. Далее в этом же разделе приводятся используемые в дальнейшем точные коэрцитивные оценки классических решений параболических уравнений. Наконец, в разд. 3 методом последовательных приближений доказывается теорема о классической разрешимости рассматриваемой задачи. Устанавливаются также и вышеупомянутые специальные свойства этих решений.

2. Некоторые качественные свойства решений линейных параболических уравнений

Для того чтобы доказать классическую разрешимость регуляризованной задачи (1.1)–(1.3), нам необходимо установить некоторые свойства решений линейных параболических уравнений. Эти свойства будут сформулированы в общем виде для многомерного случая. Результаты этого раздела имеют самостоятельный интерес для качественной теории параболических уравнений.

2.1. Об убывании сверток с фундаментальным решением. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — произвольный элемент пространства $\mathbb{R}^n$, $|\xi| = \left(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2\right)^{1/2}$ — его евклидова норма, $l = (l_1, \dots, l_n)$ — мультииндекс, $|l| = l_1 + \dots + l_n$ и $H(T) = \{(\xi, t) : \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0, T)\}$ — полоса в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Мы будем также представлять точки пространства $\mathbb{R}^n$ в виде $\xi = (x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ и $m \geq 0$, $m < n$ — целые числа.

Обозначим через $C^{\alpha,0}_{\xi,t}$ множество непрерывных в полосе $\overline{H}(T)$ функций $u(\xi, t)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{C^{\alpha,0}_{\xi,t}} := \sup_{(\xi,t)\in\overline{H}(T)} |u(\xi, t)| + \sup_{\xi,\eta\in\mathbb{R}^n, \xi\neq\eta, t\in[0,T]} \frac{|u(\xi, t) - u(\eta, t)|}{|\xi - \eta|^\alpha},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — произвольная фиксированная постоянная. Символом L обозначим линейный равномерно параболический дифференциальный оператор 2-го порядка общего вида, т. е.

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(\xi, t) \frac{\partial u}{\partial \xi_i} - c(\xi, t) u \tag{2.1}$$

и существует такая постоянная $a_0 > 0$, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi, t) v_i v_j \geq a_0 \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

для всех $(\xi, t) \in \overline{H}(T)$ и $v \in \mathbb{R}^n$; эта положительная постоянная a_0 называется *константой параболичности* оператора L.

Определение 2.1. Функция $w(\delta)$, определенная и непрерывная при $\delta \geq 0$, называется *модулем непрерывности*, если выполнены следующие условия: $w(0) = 0$, $w(\delta_1) \leq w(\delta_2)$ при $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$, $w(\delta_1+\delta_2) \leq w(\delta_1)+w(\delta_2)$ при $\delta_1, \delta_2 \geq 0$.

Замечание 2.1. Если функция $\varphi(\xi) \in C(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна, то функция

$$w_\varphi(\delta) := \sup_{|\xi-\eta|\leq\delta} |\varphi(\xi) - \varphi(\eta)|$$

удовлетворяет приведенным выше условиям и называется *модулем непрерывности функции* φ.

Справедливо следующее утверждение (см. [10]).

Лемма 2.1. *Любой модуль непрерывности w обладает следующими свойствами:*

$$w(\beta\delta) \leq (\beta+1)w(\delta) \quad \text{для всех } \beta, \delta \geq 0, \qquad \frac{w(t)}{t} \leq 2\frac{w(\delta)}{\delta} \quad \text{для } 0 < \delta \leq t.$$

Сейчас мы установим основные свойства сверток непрерывных функций с фундаментальным решением данного линейного равномерно параболического оператора L с коэффициентами из $C^{\alpha,0}_{\xi,t}$.

Теорема 2.1. *Пусть коэффициенты равномерно параболического оператора L принадлежат пространству $C^{\alpha,0}_{\xi,t}$, а функция $f(\xi,t)$ непрерывна в $H(T)$ и удовлетворяет условию*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m, t\in(0,T)} |f(x,y,t)| \leq \varphi(|y|), \tag{2.2}$$

где $\varphi(\delta)$ — невозрастающая функция при $\delta \geq 0$. Тогда для свертки

$$u(\xi,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} Z(\xi,t,\eta,\tau) f(\eta,\tau)\, d\eta d\tau, \tag{2.3}$$

где $Z(\xi,t,\eta,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$ в полосе $H(T)$, справедливы следующие оценки:

$$\left|D^l_\xi u(\xi,t)\right| \leq Ct^{1-|l|/2}(\varphi(q|y|) + \varphi(0)e^{-M(1-q)^2|y|^2/t})$$

в $H(T)$ для всех $q \in (0,1)$ и $|l| \leq 1$. Здесь постоянные C и $M > 0$ не зависят от φ, ξ, t, q, а зависят только от T, α, n, максимума $C^{\alpha,0}_{\xi,t}$-норм коэффициентов оператора L и константы параболичности a_0.

Доказательство. Хорошо известно [4], что если коэффициенты равномерно параболического оператора L из (2.1) принадлежат пространству $C^{\alpha,0}_{\xi,t}$, то фундаментальное решение $Z(\xi,t,\eta,\tau)$ уравнения $Lu = 0$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|D^{k,l}_{t,\xi} Z(\xi,t,\eta,\tau)\right| \leq \frac{C}{(t-\tau)^{n/2+k+|l|/2}} e^{-M|\xi-\eta|^2/(t-\tau)} \tag{2.4}$$

для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$ и $2k + |l| \leq 2$. Известно также, что при $|l| \leq 1$ производные $D^l_\xi u(\xi,t)$ функции (2.3) вычисляются в $H(T)$ по формулам

$$D^l_\xi u(\xi,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} D^l_\xi Z(\xi,t,\eta,\tau) f(\eta,\tau)\, d\eta d\tau.$$

Поэтому в силу (2.2) и (2.4) имеем оценку

$$\begin{aligned}
&\left|D_\xi^l u(x_0,y_0,t)\right| \\
&\quad\le \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{C}{(t-\tau)^{n/2+|l|/2}} e^{-M|x_0-x|^2/(t-\tau)} e^{-M|y_0-y|^2/(t-\tau)} \varphi(|y|)\,dxdyd\tau \\
&\qquad\qquad\le \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \frac{C}{(t-\tau)^{(n-m)/2+|l|/2}} e^{-M|y_0-y|^2/(t-\tau)} \varphi(|y|)\,dyd\tau
\end{aligned}$$

в $H(T)$ для $|l|\le 1$. После замены переменных $y=y_0+z\sqrt{t-\tau}$ данное неравенство принимает вид

$$\begin{aligned}
\left|D_\xi^l u(x_0,y_0,t)\right| &\le \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \frac{C}{(t-\tau)^{|l|/2}} e^{-M|z|^2} \varphi(|y_0+z\sqrt{t-\tau}|)\,dzd\tau \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_{|y_0+z\sqrt{t-\tau}|\ge q|y_0|} \frac{C}{(t-\tau)^{|l|/2}} e^{-M|z|^2} \varphi(|y_0+z\sqrt{t-\tau}|)\,dzd\tau \\
&\quad + \int\limits_0^t \int\limits_{|y_0+z\sqrt{t-\tau}|\le q|y_0|} \frac{C}{(t-\tau)^{|l|/2}} e^{-M|z|^2} \varphi(|y_0+z\sqrt{t-\tau}|)\,dzd\tau.
\end{aligned}$$

Из этого представления, пользуясь монотонностью функции φ, извлекаем искомый результат:

$$\begin{aligned}
\left|D_\xi^l u(x_0,y_0,t)\right| &\le \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \frac{C}{(t-\tau)^{|l|/2}} e^{-M|z|^2} \varphi(q|y_0|)\,dzd\tau \\
&\quad + \int\limits_0^t \int\limits_{|z|\ge(1-q)\frac{|y_0|}{\sqrt{t-\tau}}} \frac{C}{(t-\tau)^{|l|/2}} e^{-M|z|^2} \varphi(0)\,dzd\tau \\
&\qquad\le Ct^{1-|l|/2}\left(\varphi(q|y_0|)+\varphi(0)e^{-M(1-q)^2|y_0|^2/t}\right),
\end{aligned}$$

где постоянные C и $M>0$ не зависят от φ, x_0, y_0, t и $q\in(0,1)$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть коэффициенты равномерно параболического оператора L принадлежат пространству $C_{\xi,t}^{\alpha,0}$, а функция $f(\xi)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^m}|f(x,y)|\le\varphi(|y|)$, где $\varphi(\delta)$ — невозрастающая функция при $\delta\ge 0$. Тогда для свертки*

$$u(\xi,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(\xi,t,\eta,0)f(\eta)\,d\eta,$$

где $Z(\xi,t,\eta,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения $Lu=0$ в полосе $H(T)$, справедливы следующие оценки:

$$\left|D_{t,\xi}^{k,l}u(\xi,t)\right|\le\frac{C}{t^{k+|l|/2}}\left(\varphi(q|y|)+\varphi(0)e^{-M(1-q)^2|y|^2/t}\right)$$

в $H(T)$ для всех $q \in (0,1)$ и $2k+|l| \le 2$. Здесь постоянные C и $M > 0$ не зависят от φ, ξ, t, q, а зависят только от T, α, n, максимума $C^{\alpha,0}_{\xi,t}$-норм коэффициентов оператора L и константы параболичности a_0.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1 и поэтому опускается.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2.2 и, кроме того, функция $f(\xi)$ удовлетворяет дополнительному соотношению*

$$|f(\xi) - f(\xi_0)| \le w(|\xi - \xi_0|)\varphi(\min\{|y|, |y_0|\}), \tag{2.5}$$

где $w(\delta)$ — модуль непрерывности. Тогда для свертки

$$u(\xi,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(\xi,t,\eta,0)f(\eta)d\eta, \tag{2.6}$$

где $Z(\xi,t,\eta,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$ в полосе $H(T)$, следующие оценки справедливы для всех $(\xi,t), (\xi_0,t), (\xi,t+\delta) \in H(T)$ $(\delta > 0)$:

$$|u(\xi,t)| \le C(\varphi(|y|/2) + \varphi(0)e^{-M|y|^2/t}), \tag{2.7}$$

$$\left|D^{k,l}_{t,\xi}u(\xi,t)\right| \le C\frac{w(\sqrt{t})}{t^{k+|l|/2}}(\varphi(|y|/2) + \varphi(0)e^{-M|y|^2/t}) \quad \text{для } 2k+|l| = 1,2, \tag{2.8}$$

$$|u(\xi,t) - u(\xi,t+\delta)| \le Cw(\sqrt{\delta})(\varphi(|y|/2) + \varphi(0)e^{-M|y|^2/(t+\delta)}), \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\left|D^l_\xi u(\xi,t) - D^l_\xi u(\xi_0,t)\right| \le C\frac{w(|\xi-\xi_0|)}{t^{|l|/2}}&(\varphi(\min\{|y|/2, |y_0|/2\}) \\ &+ \varphi(0)e^{-M\min\{|y|^2,|y_0|^2\}/t}) \quad \text{для } |l| \le 1.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь постоянные C и $M > 0$ не зависят от φ, ξ, ξ_0, t, δ, а зависят только от T, α, w, n, максимума $C^{\alpha,0}_{\xi,t}$-норм коэффициентов оператора L и константы параболичности a_0.

Доказательство. Заметим, что неравенство (2.7) является следствием теоремы 2.2, так как

$$|u(\xi,t)| \le C(\varphi(q|y|) + \varphi(0)e^{-M(1-q)^2|y|^2/t}) \tag{2.11}$$

для всех $q \in (0,1)$. Для того чтобы рассмотреть случаи $2k+|l| = 1,2$, введем обозначение

$$L_1u := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j} - \sum_{i=1}^n b_i(\xi,t)\frac{\partial u}{\partial\xi_i}.$$

Тогда $Lu = L_1u - c(\xi,t)u$. В условиях теоремы функция $u(\xi,t)$ из (2.6) — ограниченное классическое решение однородной задачи Коши (см. [4])

$$Lu = 0 \quad \text{в } H(T), \quad u(\xi,0) = f(\xi) \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.12}$$

С другой стороны, $u(\xi,t)$ является решением задачи Коши для уравнения

$$L_1u = c(\xi,t)u(\xi,t) \quad \text{в } H(T) \tag{2.13}$$

с начальными данными $u(\xi,0) = f(\xi)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, правая часть уравнения (2.13) — ограниченная функция (см. определение пространства $C^{\alpha,0}_{\xi,t}$

и уже доказанную оценку (2.7)), которая как функция переменной ξ обладает локальным модулем непрерывности $w(\delta) \le C\delta^\alpha$. Значит [4, 11],

$$D_\xi^l u(\xi,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\xi^l Z_1(\xi,t,\eta,0) f(\eta)\, d\eta + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\xi^l Z_1(\xi,t,\eta,\tau) c(\eta,\tau) u(\eta,\tau)\, d\eta d\tau := I_1^l + I_2^l \quad (2.14)$$

в $H(T)$ для $|l| \le 2$, где $Z_1(\xi,t,\eta,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения $L_1 u = 0$ в полосе $H(T)$. Производные этого фундаментального решения Z_1 обладают следующими свойствами [4]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\xi^l Z_1(\xi,t,\eta,\tau)\, d\eta = \begin{cases} 1 & \text{при } |l| = 0, \\ 0 & \text{при } |l| = 1,2. \end{cases} \quad (2.15)$$

Поэтому для $|l| = 1,2$ имеем равенство

$$I_1^l(\xi,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\xi^l Z_1(\xi,t,\eta,0)(f(\eta) - f(\xi))\, d\eta,$$

а значит, для $\xi_0 = (x_0, y_0)$ справедливо неравенство

$$\left| I_1^l(\xi_0,t) \right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{t^{n/2+|l|/2}} e^{-M|\xi_0-\eta|^2/t} |f(\eta) - f(\xi_0)|\, d\eta$$

(ср. с (2.4)). Отсюда после замены переменных $\eta = \xi_0 + \xi\sqrt{t}$, где $\xi = (x,y)$, в силу (2.5) и леммы 2.1 вытекает оценка

$$\begin{aligned} \left| I_1^l(\xi_0,t) \right| &\le \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{C}{t^{|l|/2}} e^{-M(|x|^2+|y|^2)} (|x|+1)(|y|+1) w(\sqrt{t}) \\ &\qquad \times \varphi(\min\{|y_0 + y\sqrt{t}|, |y_0|\})\, dxdy \\ &\le C \frac{w(\sqrt{t})}{t^{(n-m)/2+|l|/2}} \Bigg(\int\limits_{|y_0+y\sqrt{t}| \ge q|y_0|} (|y|+1) e^{-M|y|^2} \varphi(q|y_0|)\, dy \\ &\qquad + \int\limits_{|y_0+y\sqrt{t}| \le q|y_0|} (|y|+1) e^{-M|y|^2} \varphi(0)\, dy \Bigg), \end{aligned}$$

из которой так же, как при доказательстве теоремы 2.1, выводим окончательный результат:

$$\left| I_1^l(\xi_0,t) \right| \le C \frac{w(\sqrt{t})}{t^{|l|/2}} (\varphi(q|y_0|) + \varphi(0) e^{-M(1-q)^2|y_0|^2/t}) \quad (2.16)$$

для $|l| = 1,2$, где константы $C, M > 0$ не зависят ни от φ, ξ_0, t, ни от $q \in (0,1)$.

Далее, используя оценку (2.11) и теорему 2.1, приходим к соотношению

$$\left| I_2^l(\xi,t) \right| \le C t^{1-|l|/2} (\varphi(qp|y|) + \varphi(0) e^{-M(1-q)^2 p^2 |y|^2/t} + \varphi(0) e^{-M(1-p)^2|y|^2/t}) \quad (2.17)$$

для $|l| \le 1$, где постоянные C и $M > 0$ опять не зависят ни от φ, ξ, t, ни от $q, p \in (0,1)$.

Таким образом, для того чтобы установить неравенство (2.8), осталось рассмотреть только слагаемые $I_2^l(\xi,t)$ с $|l|=2$ в (2.14), так как оценка для $u_t(\xi,t)$ будет вытекать из уравнения (2.12).

Как известно [12], для $|l|\le 2$ и $0\le\tau<t\le T$ имеет место неравенство

$$\left|D_\xi^l Z(\xi,t,\eta,\tau)-D_\xi^l Z(\xi_0,t,\eta,\tau)\right| \le \frac{C|\xi-\xi_0|^\alpha}{(t-\tau)^{n/2+|l|/2+\alpha/2}}\left(e^{-M|\xi-\eta|^2/(t-\tau)}+e^{-M|\xi_0-\eta|^2/(t-\tau)}\right).$$

Это означает, что для любых точек $\xi_0=(x_0,y_0)$ и $\xi_0'=(x_0',y_0')$ справедлива оценка

$$|u(\xi_0,t)-u(\xi_0',t)|\le\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{C|\xi_0-\xi_0'|^\alpha}{t^{n/2+\alpha/2}}e^{-M|x_0-x|^2/t}e^{-M|y_0-y|^2/t}\varphi(|y|)\,dxdy + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{C|\xi_0-\xi_0'|^\alpha}{t^{n/2+\alpha/2}}e^{-M|x_0'-x|^2/t}e^{-M|y_0'-y|^2/t}\varphi(|y|)\,dxdy,$$

из которой так же, как и при доказательстве теоремы 2.1, вытекает неравенство

$$|u(\xi_0,t)-u(\xi_0',t)|\le C\frac{|\xi_0-\xi_0'|^\alpha}{t^{\alpha/2}}\left(\varphi(q\delta(\xi_0,\xi_0'))+\varphi(0)e^{-M(1-q)^2\delta^2(\xi_0,\xi_0')/t}\right),$$

где $\delta(\xi_0,\xi_0')=\min\{|y_0|,|y_0'|\}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|c(\xi_0,t)u(\xi_0,t)-c(\xi_0',t)u(\xi_0',t)| &\le |c(\xi_0,t)-c(\xi_0',t)||u(\xi_0,t)|+|c(\xi_0',t)||u(\xi_0,t)-u(\xi_0',t)|\\ &\le C\frac{|\xi_0-\xi_0'|^\alpha}{t^{\alpha/2}}\left(\varphi(q\delta(\xi_0,\xi_0'))+\varphi(0)e^{-M(1-q)^2\delta^2(\xi_0,\xi_0')/t}\right).\end{aligned}$$

Поэтому (см. (2.4) и (2.15)) для $|l|=1,2$ имеем

$$\begin{aligned}\left|I_2^l(\xi_0,t)\right| &= \left|\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_\xi^l Z_1(\xi_0,t,\eta,\tau)(c(\eta,\tau)u(\eta,\tau)-c(\xi_0,\tau)u(\xi_0,\tau))\,d\eta d\tau\right|\\ &\le\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{C|\xi_0-\eta|^\alpha}{(t-\tau)^{n/2+|l|/2}\tau^{\alpha/2}}e^{-M|\xi_0-\eta|^2/(t-\tau)}\\ &\qquad\times\left(\varphi(q\delta(\xi_0,\eta))+\varphi(0)e^{-M(1-q)^2\delta^2(\xi_0,\eta)/\tau}\right)d\eta d\tau.\end{aligned}$$

После замены переменных $\eta=\xi_0+\xi\sqrt{t-\tau}$, где $\xi=(x,y)$, из последнего неравенства следует, что

$$\begin{aligned}\left|I_2^l(\xi_0,t)\right| &\le\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{C}{(t-\tau)^{|l|/2-\alpha/2}\tau^{\alpha/2}}(|x|+1)(|y|+1)e^{-M|x|^2}e^{-M|y|^2}\\ &\quad\times\left(\varphi(q\delta(y_0,y_0+y\sqrt{t-\tau}))+\varphi(0)e^{-M(1-q)^2\delta^2(y_0,y_0+y\sqrt{t-\tau})/\tau}\right)dxdyd\tau\\ &\le\int\limits_0^t\int\limits_{|y_0+y\sqrt{t-\tau}|\ge p|y_0|}\frac{C(|y|+1)}{(t-\tau)^{|l|/2-\alpha/2}\tau^{\alpha/2}}e^{-M|y|^2}\end{aligned}$$

$$\times \left(\varphi(qp|y_0|) + \varphi(0)e^{-M(1-q)^2p^2|y_0|^2/\tau}\right) dyd\tau$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|y_0 + y\sqrt{t-\tau}| \le p|y_0|} \frac{C}{(t-\tau)^{|l|/2-\alpha/2}\tau^{\alpha/2}} (|y|+1)e^{-M|y|^2}\varphi(0)\, dyd\tau$$

$$\le C\left(\varphi(qp|y_0|) + \varphi(0)e^{-M(1-q)^2p^2|y_0|^2/t}\right) \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{|l|/2-\alpha/2}\tau^{\alpha/2}}$$

$$+ C\varphi(0) \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{|l|/2-\alpha/2}\tau^{\alpha/2}} \int\limits_{|y| \ge (1-p)\frac{|y_0|}{\sqrt{t}}} (|y|+1)e^{-M|y|^2}\, dy$$

$$\le C\left(\varphi(qp|y_0|) + \varphi(0)e^{-M(1-q)^2p^2|y_0|^2/t} + \varphi(0)e^{-M(1-p)^2|y_0|^2/t}\right)$$

для $|l| = 2$, где постоянные C и $M > 0$ не зависят ни от φ, ξ_0, t, ни от $q, p \in (0, 1)$. Это неравенство вместе с (2.16) и (2.17) дает (2.8).

Перейдем к доказательству оценки (2.9). Если $\delta < t$, то, используя теорему Лагранжа, оценку (2.8) для $|u_t|$ (только что доказанную) и лемму 2.1, заключаем, что

$$|u(\xi, t) - u(\xi, t+\delta)| \le C\frac{w(\sqrt{t})}{t}\delta\left(\varphi(|y|/2) + \varphi(0)e^{-M|y|^2/(t+\delta)}\right)$$

$$\le Cw(\sqrt{\delta})\left(\varphi(|y|/2) + \varphi(0)e^{-M|y|^2/(t+\delta)}\right).$$

Если $\delta \ge t$, то рассмотрим разложение (см. (2.14) и (2.15))

$$u(\xi, t) - u(\xi, t+\delta) = u(\xi, t) - u(\xi, 0) + u(\xi, 0) - u(\xi, t+\delta)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(\xi, t, \eta, 0)(f(\eta) - f(\xi))\, d\eta + I_2^0(\xi, t)$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(\xi, t+\delta, \eta, 0)(f(\eta) - f(\xi))\, d\eta - I_2^0(\xi, t+\delta).$$

Из этого представления вытекает следующее неравенство (см. (2.17) и доказательство оценки (2.16)):

$$|u(\xi, t) - u(\xi, t+\delta)| \le C(w(\sqrt{\delta}) + \delta)\left(\varphi(|y|/2) + \varphi(0)e^{-M|y|^2/(t+\delta)}\right)$$

для $\delta \ge t$, которое совпадает с (2.9), так как по лемме 2.1 $\delta \le \frac{2T}{w(\sqrt{T})}w(\sqrt{\delta})$ при $0 < \delta \le T$.

Неравенство (2.10) устанавливается аналогичным образом. Для того чтобы оценить разность $D_\xi^l u(\xi, t) - D_\xi^l u(\xi_0, t)$ для $|l| \le 1$ и $|\xi - \xi_0| < \sqrt{t}$, нужно снова использовать теорему Лагранжа, оценку (2.8) и лемму 2.1. Наконец, в случае $|\xi - \xi_0| \ge \sqrt{t}$ достаточно рассмотреть разложение

$$|u(\xi, t) - u(\xi_0, t)| \le |u(\xi, t) - u(\xi, 0)| + |u(\xi, 0) - u(\xi_0, 0)| + |u(\xi_0, 0) - u(\xi_0, t)|$$

и использовать тривиальное неравенство

$$\left|D_\xi^l u(\xi, t) - D_\xi^l u(\xi_0, t)\right| \le \left|D_\xi^l u(\xi, t)\right| + \left|D_\xi^l u(\xi_0, t)\right|$$

для $|l| = 1$. Теорема доказана.

2.2. Точные коэрцитивные оценки для классических решений линейных параболических уравнений. Рассмотрим задачу Коши

$$Lu = f(x,t) \quad \text{в } H(T), \quad u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n \tag{2.18}$$

с равномерно параболическим оператором L, определенным в (2.1), и $H(T) = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T)\}$. Напомним, что *классическим* решением задачи (2.18) называется функция $u(x,t) \in C(\overline{H}(T)) \cap C^{2,1}_{x,t}(H(T))$, удовлетворяющая (2.18).

Для того чтобы дать точную формулировку теоремы о коэрцитивных оценках, введем следующие функциональные пространства.

Определение 2.2. Пусть w — произвольный модуль непрерывности. Будем говорить, что функция $u(x,t)$ *принадлежит множеству* $C_{w,T}$, если эта функция непрерывна в $\overline{H}(T)$ и имеет конечную норму

$$\|u\|_{C_{w,T}} = \sup_{(x,t)\in\overline{H}(T)} |u(x,t)| + \sup \frac{|u(x,t) - u(y,t)|}{w(|x-y|)} + \sup \frac{|u(x,t) - u(x,t+\delta)|}{w(\sqrt{\delta})},$$

где второй супремум берется по всем точкам $(x,t) \neq (y,t)$ из $\overline{H}(T)$, а третий — по всем точкам (x,t), $(x,t+\delta)$ $(\delta > 0)$ из $\overline{H}(T)$.

Определение 2.3. Пусть w — модуль непрерывности. Будем говорить, что функция $u(x,t)$ *принадлежит множеству* $\mathscr{D}_{w,T}$, если эта функция

1) непрерывна в $\overline{H}(T)$ и имеет в $H(T)$ непрерывные производные $D^{k,l}_{t,x}u(x,t)$ при $2k + |l| \leq 2$;

2) обладает конечной нормой

$$\|u\|_{\mathscr{D}_{w,T}} = \|u\|_{C_{w,T}} + \sum_{0<2k+|l|\leq 2} \langle D^{k,l}_{t,x}u\rangle_{2k+|l|},$$

где

$$\langle u\rangle_i = \sup\left(\frac{t^{i/2}}{w(\sqrt{t})}|u(x,t)| + t^{i/2}\frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{w(|x-y|)} + t^{i/2}\frac{|u(x,t)-u(x,t+\delta)|}{w(\sqrt{\delta})}\right)$$

и супремум берется по всем точкам (x,t), (y,t), $(x,t+\delta)$ $(\delta > 0)$ из полосы $H(T)$ таким, что $x \neq y$.

Определение 2.4. Пусть w — модуль непрерывности. Будем говорить, что пара функций (f,φ) *принадлежит множеству* $\mathscr{R}_{w,T}$, если эта пара

1) имеет непрерывные компоненты $f(x,t)$ для $(x,t) \in H(T)$ и $\varphi(x)$ для $x \in \mathbb{R}^n$;

2) обладает конечной нормой $\|(f,\varphi)\|_{\mathscr{R}_{w,T}} = \|f\|_{w,T} + \|\varphi\|_w$, где

$$\|f\|_{w,T} = \langle f\rangle_2, \quad \|\varphi\|_w = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| + \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n, x\neq y} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{w(|x-y|)}.$$

Легко показать, что $C_{w,T}$, $\mathscr{D}_{w,T}$ и $\mathscr{R}_{w,T}$ — банаховы пространства.

Определение 2.5. Говорят, что модуль непрерывности w *удовлетворяет условиям Зигмунда*, если существует такая постоянная C, что при всех $\delta \in (0,1)$ справедливы неравенства

$$\int_0^\delta \frac{w(\tau)}{\tau}\,d\tau \leq Cw(\delta), \quad \int_\delta^1 \frac{w(\tau)}{\tau^2}\,d\tau \leq C\frac{w(\delta)}{\delta}.$$

Следующая теорема доказана в [13].

Теорема 2.4. *Пусть*

1) *модуль непрерывности w удовлетворяет условиям Зигмунда;*

2) *пара функций (f, φ) принадлежит множеству $\mathscr{R}_{w,T}$;*

3) *коэффициенты равномерно параболического оператора L из* (2.1) *принадлежат множеству $C_{w,T}$.*

Тогда в пространстве $\mathscr{D}_{w,T}$ существует единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (2.18), *причем*

$$\|u\|_{\mathscr{D}_{w,T}} \le C(\|f\|_{w,T} + \|\varphi\|_w),$$

где постоянная C не зависит ни от f, ни от φ. Эта постоянная зависит только от T, w, n, максимума $C_{w,T}$-норм коэффициентов оператора L и константы параболичности a_0.

3. Разрешимость задачи

В этом разделе мы докажем теорему существования классического решения задачи (1.1)–(1.3) (регуляризованной по сравнению с «физической» постановкой из [1]), используя свойство равномерной сходимости последовательности, построенной по методу последовательных приближений.

3.1. Последовательные приближения и некоторые их свойства. Для $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим последовательность уравнений

$$\frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho_{n+1}}{\partial \omega^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \rho_{n+1}}{\partial \theta^2} - F \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \omega}(F \rho_{n+1}) - \Omega \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \omega} - \mathscr{K}_s^n \frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \omega} \quad (3.1)$$

на множестве $Q_T^* = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, T] \times [-G, G]$ точек $(\theta, \omega, t, \Omega)$, где (см. (1.4))

$$\mathscr{K}_s^n(\theta, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g(\Omega) \sin(\varphi - \theta) \rho_n(\varphi, \omega, t, \Omega)\, d\varphi d\omega d\Omega. \quad (3.2)$$

Для каждого из уравнений (3.1) рассмотрим одни и те же данные Коши (ср. с (1.3))

$$\rho_{n+1}|_{t=0} = \rho_0(\theta, \omega, \Omega), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

для $(\theta, \omega, \Omega) \in Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-G, G]$ и выберем эти начальные данные ρ_0 в качестве первого приближения $\rho_1(\theta, \omega, t, \Omega)$.

Докажем существование последовательности классических (гладких) решений $\rho_{n+1}(\theta, \omega, t, \Omega)$ линейной параболической задачи (3.1), (3.3) и установим некоторые свойства этих решений.

Теорема 3.1. *Пусть данные задачи* (1.1)–(1.3) *удовлетворяют всем предположениям* (A) (*при $l_0 = 0$*), (B) *и* (C). *Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций $\rho_n(\theta, \omega, t, \Omega)$, $n = 2, 3, \dots$, со следующими свойствами: все функции ρ_n*

1) *непрерывны по совокупности аргументов в $\overline{Q_T^*}$ и обладают непрерывными частными производными $D_{t,\omega,\theta}^{k,l_1,l_2} \rho_n$ в Q_T^* для $2k + l_1 + l_2 \le 2$;*

2) *в классическом смысле удовлетворяют уравнению* (3.1) *в Q_T^* и начальным данным* (3.3) *в Q;*

3) *положительны в $\overline{Q_T^*}$;*

4) *2π-периодичны по переменной θ в $\overline{Q_T^*}$;*

5) *нормированы равенствами*

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta = 1$$

для всех $t\in[0,T]$ *и* $\Omega\in[-G,G]$;

6) *обладают как функции переменной* ω *свойством экспоненциального убывания на бесконечности, т. е.*

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R},\Omega\in[-G,G]}\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)\right| \le \frac{C_\rho}{t^{k+(l_1+l_2)/2}}e^{-M_\rho\omega^2}$$

для $2k+l_1+l_2\le 2$, $\omega\in\mathbb{R}$, $t\in(0,T]$, *где константы* C_ρ *и* $M_\rho>0$ *не зависят ни от* ω, t, *ни от* n (*они зависят лишь от* ε, $\|g\|_{L^1}$, $\|F\|_{C^{1+\alpha_0}}$, G, T, C_0 *и* M_0);

7) *интегралы* $\mathscr{K}^n_s(\theta,t)$ *являются непрерывными функциями по совокупности аргументов* $(\theta,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$ *вместе со своими частными производными любого порядка по* θ *и, кроме того,*

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R},t\in[0,T]}\left|\mathscr{K}^n_s(\theta,t)\right| + \sup_{\theta\in\mathbb{R},t\in[0,T]}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{K}^n_s(\theta,t)\right| \le 2\|g\|_{L^1}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Теорема будет доказана по индукции. Мы приведем подробное доказательство шага индукции, не рассматривая базу индукции (случай $n=2$), поскольку она доказывается аналогично.

Предположим, что утверждения теоремы справедливы для всех функций ρ_j, $j=2,\dots,n$. Покажем, что ρ_{n+1} обладает свойствами 1–7. Зафиксируем произвольное значение $\Omega\in[-G,G]$ и рассмотрим равномерно параболическое уравнение (3.1) для $(\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T]$. Хорошо известно [2], что если для функции ρ_n выполнено свойство 7, то существует единственное ограниченное классическое решение $\rho_{n+1}(\theta,\omega,t,\Omega)$ задачи Коши (3.1), (3.3) на множестве $\mathbb{R}^2\times[0,T]$ переменных (θ,ω,t) (напомним, что сейчас Ω считается фиксированным параметром из интервала $[-G,G]$). Решение $\rho_{n+1}(\theta,\omega,t,\Omega)$ указанной задачи Коши может быть записано при $t>0$ в виде

$$\rho_{n+1}(\theta,\omega,t,\Omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} Z_{n,\Omega}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,0)\rho_0(\eta,\xi,\Omega)\,d\eta d\xi,$$

где через $Z_{n,\Omega}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)$ обозначено фундаментальное решение уравнения $u_t=u_{\omega\omega}+\varepsilon u_{\theta\theta}-Fu_\theta+(Fu)_\omega-\Omega u_\omega-\mathscr{K}^n_s u_\omega$ (см. (3.1)), коэффициент $\mathscr{K}^n_s(\theta,t)$ которого задается в области $\mathbb{R}\times[0,T]$ формулой (3.2).

Как известно [2], для всякого непрерывного вместе со своей производной по θ коэффициента $\mathscr{K}^n_s(\theta,t)$, удовлетворяющего условию (3.4), это фундаментальное решение $Z_{n,\Omega}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)$ уравнения (3.1) обладает следующими свойствами:

$$Z_{n,\Omega}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)>0, \tag{3.5}$$

$$\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}Z_{n,\Omega}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)\right| \le \frac{C_Z}{(t-\tau)^{1+k+(l_1+l_2)/2}}e^{-M_Z(|\theta-\eta|^2+|\omega-\xi|^2)/(t-\tau)} \tag{3.6}$$

для $\theta,\omega,\eta,\xi\in\mathbb{R}$, $0\le\tau<t\le T$ и $2k+l_1+l_2\le 2$, где постоянные C_Z и $M_Z>0$ не зависят от n, а зависят лишь от ε, $\|g\|_{L^1}$, $\|F\|_{C^{1+\alpha_0}}$, G и T. Следовательно, согласно теореме 2.2 для ρ_{n+1} справедливо свойство 6. Свойство 3 также выполнено, поскольку $\rho_0(\theta,\omega,\Omega)>0$ и $Z_{n,\Omega}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)>0$ (см. (a_3) и (3.5)).

Для завершения доказательства свойств 1 и 2 функции ρ_{n+1} нам осталось установить непрерывность ρ_{n+1} по всем переменным $(\theta, \omega, t, \Omega) \in \overline{Q_T^*}$, а также непрерывность частных производных $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho_{n+1}$ в Q_T^* для $2k + l_1 + l_2 \leq 2$. Для этого достаточно показать непрерывность функции $\rho_{n+1}(\theta, \omega, t, \Omega)$ по $\Omega \in [-G, G]$, равномерную относительно переменных $(\theta, \omega, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$, и непрерывность частных производных $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho_{n+1}$ по $\Omega \in [-G, G]$, равномерную относительно переменных (θ, ω, t) на множестве $\mathbb{R}^2 \times [\delta, T]$ при любом фиксированном $\delta \in (0, T)$. В частности, достаточно доказать оценку

$$\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho_{n+1}(\theta, \omega, t, \Omega_1) - D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho_{n+1}(\theta, \omega, t, \Omega_2)\right| \leq C\frac{w_{\rho_0}(|\Omega_1 - \Omega_2|) + |\Omega_1 - \Omega_2|}{t^{k+(l_1+l_2)/2}} \tag{3.7}$$

для всех $(\theta, \omega, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T]$, $\Omega_1, \Omega_2 \in [-G, G]$ и $2k + l_1 + l_2 \leq 2$, где w_{ρ_0} — модуль непрерывности начальных данных ρ_0. Константа C здесь не зависит от n, а зависит лишь от ε, $\|g\|_{L^1}$, $\|F\|_{C^{1+\alpha_0}}$, G, T, C_0 и M_0.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(\theta, \omega, t, \Omega_1, \Omega_2) := \rho_{n+1}(\theta, \omega, t, \Omega_1) - \rho_{n+1}(\theta, \omega, t, \Omega_2).$$

Для всех фиксированных значений $\Omega_1, \Omega_2 \in [-G, G]$ функция f является решением задачи Коши

$$\begin{gathered} f_t(\theta, \omega, t, \Omega_1, \Omega_2) = f_{\omega\omega} + \varepsilon f_{\theta\theta} - F f_\theta + (Ff)_\omega - \Omega_1 f_\omega - \mathscr{K}_s^n f_\omega \\ + (\Omega_2 - \Omega_1)\frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \omega}(\theta, \omega, t, \Omega_2) \quad \text{при } (\theta, \omega, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T], \\ f|_{t=0} = \rho_0(\theta, \omega, \Omega_1) - \rho_0(\theta, \omega, \Omega_2) \quad \text{при } (\theta, \omega) \in \mathbb{R}^2. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Следовательно, производные функции f могут быть представлены в виде [2, 11]

$$\begin{aligned} D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}&f(\theta, \omega, t, \Omega_1, \Omega_2) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta} Z_{n,\Omega_1}(\theta, \omega, t; \eta, \xi, 0)(\rho_0(\eta, \xi, \Omega_1) - \rho_0(\eta, \xi, \Omega_2))\, d\eta d\xi \\ &+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^2} D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta} Z_{n,\Omega_1}(\theta, \omega, t; \eta, \xi, \tau)(\Omega_2 - \Omega_1)\frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial \omega}(\eta, \xi, \tau, \Omega_2)\, d\eta d\xi d\tau \end{aligned} \tag{3.9}$$

при $l_1 + l_2 \leq 2$ и $t \in (0, T]$. В силу свойства 6 (уже доказанного) и свойства (3.6) фундаментального решения $Z_{n,\Omega}$ имеем

$$\begin{aligned} |f(\theta, \omega, t, \Omega_1, \Omega_2)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{C}{t} e^{-M[(\theta-\eta)^2 + (\omega-\xi)^2]/t} w_{\rho_0}(|\Omega_1 - \Omega_2|)\, d\eta d\xi \\ &+ |\Omega_1 - \Omega_2| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{C}{t-\tau} e^{-M[(\theta-\eta)^2 + (\omega-\xi)^2]/(t-\tau)} \frac{C}{\sqrt{\tau}}\, d\eta d\xi d\tau \\ \leq C w_{\rho_0}(|\Omega_1 - \Omega_2|) + C|\Omega_1 - \Omega_2| &\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \leq C(w_{\rho_0}(|\Omega_1 - \Omega_2|) + \sqrt{t}|\Omega_1 - \Omega_2|), \end{aligned}$$

что означает справедливость оценки (3.7) при $2k + l_1 + l_2 = 0$. Аналогично получаем (3.7) при $2k + l_1 + l_2 = 1$.

Для доказательства оценки (3.7) при $2k+l_1+l_2=2$ рассмотрим следующее разложение представления (3.9) для значений $l_1+l_2=2$:

$$
\begin{aligned}
&D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta} f(\theta,\omega,t,\Omega_1,\Omega_2)\\
&\qquad= \int\limits_{\mathbb{R}^2} D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta} Z_{n,\Omega_1}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,0)(\rho_0(\eta,\xi,\Omega_1)-\rho_0(\eta,\xi,\Omega_2))\,d\eta d\xi\\
&\qquad+ \int\limits_0^{t/2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta} Z_{n,\Omega_1}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)(\Omega_2-\Omega_1)\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\omega}(\eta,\xi,\tau,\Omega_2)\,d\eta d\xi d\tau\\
&\qquad+ \int\limits_{t/2}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2} D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta} Z_{n,\Omega_1}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)(\Omega_2-\Omega_1)\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\omega}(\eta,\xi,\tau,\Omega_2)\,d\eta d\xi d\tau\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad := I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}
$$

При помощи стандартных рассуждений (см. доказательство (3.7) для $2k+l_1+l_2=0$) приходим к неравенствам

$$
|I_1| \le C\frac{w_{\rho_0}(|\Omega_1-\Omega_2|)}{t}, \quad |I_2| \le C\frac{|\Omega_1-\Omega_2|}{\sqrt{t}} \tag{3.10}
$$

для $l_1+l_2=2$ и $t\in(0,T]$ (отметим, что подынтегральная функция в I_2 не является сингулярной, поскольку $\tau\in(0,t/2]$).

Для оценки интеграла I_3 воспользуемся специальным представлением фундаментального решения Z_{n,Ω_1} в виде

$$
Z_{n,\Omega_1}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau) = Z_\varepsilon(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau) + V_{n,\Omega_1}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau), \tag{3.11}
$$

где $Z_\varepsilon(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения $u_t = u_{\omega\omega}+\varepsilon u_{\theta\theta}$. Известно, что функции Z_ε и V_{n,Ω_1} обладают следующими свойствами [2]:

$$
\bigl|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta} Z_\varepsilon(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)\bigr| \le \frac{C}{(t-\tau)^{1+k+(l_1+l_2)/2}} e^{-M(|\theta-\eta|^2+|\omega-\xi|^2)/(t-\tau)}, \tag{3.12}
$$

$$
\bigl|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta} V_{n,\Omega_1}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)\bigr| \le \frac{C}{(t-\tau)^{1+k+(l_1+l_2)/2-\lambda}} e^{-M(|\theta-\eta|^2+|\omega-\xi|^2)/(t-\tau)} \tag{3.13}
$$

при $\theta,\omega,\eta,\xi\in\mathbb{R}$, $0\le\tau<t\le T$ и $2k+l_1+l_2\le 2$, где $C,M,\lambda>0$ — некоторые постоянные;

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^2} D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta} Z_\varepsilon(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)\,d\eta d\xi = 0 \tag{3.14}
$$

при $\theta,\omega\in\mathbb{R}$, $0\le\tau<t\le T$ и $2k+l_1+l_2>0$.

Здесь важно то, что соотношение (3.14) дает нам нулевое среднее для производных главного члена Z_ε в (3.11), в то время как слагаемое V_{n,Ω_1} в (3.11) имеет меньшую особенность. Следовательно, в силу (3.11) и (3.14) имеем

$$
\begin{aligned}
I_3 = \int\limits_{t/2}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2} & D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta} Z_\varepsilon(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)(\Omega_2-\Omega_1)\\
&\times\left[\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\omega}(\eta,\xi,\tau,\Omega_2) - \frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\omega}(\theta,\omega,\tau,\Omega_2)\right] d\eta d\xi d\tau
\end{aligned}
$$

$$+\int\limits_{t/2}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2} D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta} V_{n,\Omega_1}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)(\Omega_2-\Omega_1)\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\omega}(\eta,\xi,\tau,\Omega_2)\,d\eta d\xi d\tau$$

при $l_1+l_2=2$. Используя доказанное выше свойство 6, теорему Лагранжа и оценки (3.12), (3.13), приходим к неравенству

$$|I_3|\le|\Omega_1-\Omega_2|\int\limits_{t/2}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{C}{(t-\tau)^2}\frac{\sqrt{(\theta-\eta)^2+(\omega-\xi)^2}}{\tau}$$
$$\times\, e^{-M(|\theta-\eta|^2+|\omega-\xi|^2)/(t-\tau)}\,d\eta d\xi d\tau$$
$$+\,|\Omega_1-\Omega_2|\int\limits_{t/2}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{C}{(t-\tau)^{2-\lambda}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-M(|\theta-\eta|^2+|\omega-\xi|^2)/(t-\tau)}\,d\eta d\xi d\tau.$$

Отсюда после замены переменных $\eta=\theta+y_1\sqrt{t-\tau}$, $\xi=\omega+y_2\sqrt{t-\tau}$ получаем

$$|I_3|\le C\frac{|\Omega_1-\Omega_2|}{\sqrt{t}}+C\frac{|\Omega_1-\Omega_2|}{\sqrt{t}}t^{\lambda} \tag{3.15}$$

для $l_1+l_2=2$ и $t\in(0,T]$. В силу неравенств (3.10) и (3.15) утверждение (3.7) справедливо для всех $2k+l_1+l_2=2$, поскольку соответствующая оценка для f_t следует из уравнения (3.8). Итак, свойства 1–3 и 6 для ρ_{n+1} доказаны.

Заметим, что функции $\rho_{n+1}(\theta,\omega,t,\Omega)$ и $v(\theta,\omega,t,\Omega):=\rho_{n+1}(\theta+2\pi,\omega,t,\Omega)$ являются решениями одной и той же задачи Коши, так как коэффициенты уравнения (3.1) и начальные данные (3.3) 2π-периодичны по переменной θ. Поэтому в силу теоремы единственности классического решения задачи Коши для линейных параболических уравнений [2] справедливо равенство $v(\theta,\omega,t,\Omega)=\rho_{n+1}(\theta,\omega,t,\Omega)$ в $\overline{Q^*_T}$, что и составляет свойство 4.

Используя уже доказанные для ρ_{n+1} свойства 1, 2, 4 и 6, проинтегрируем уравнение (3.1) по переменным ω и θ при любых фиксированных значениях $t\in(0,T]$ и $\Omega\in[-G,G]$:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial t}\,d\omega d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\frac{\partial^2\rho_{n+1}}{\partial\theta^2}\,d\omega d\theta-\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\theta}\,d\omega d\theta$$
$$+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial^2\rho_{n+1}}{\partial\omega^2}+\frac{\partial}{\partial\omega}(F\rho_{n+1})-\Omega\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\omega}-\mathscr{K}^n_s\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\omega}\right]d\omega d\theta$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon\frac{\partial^2\rho_{n+1}}{\partial\theta^2}\,d\theta\right)d\omega-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_0^{2\pi}F\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\theta}\,d\theta\right)d\omega=0.$$

Здесь мы воспользовались экспоненциальным убыванием при $\omega\to\pm\infty$ функции ρ_{n+1} и ее частной производной $\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\omega}$ при $t\in(0,T]$, затем в силу свойства 6 поменяли порядок интегрирования и, наконец, использовали свойства 1 и 4.

С другой стороны, если произвольная постоянная $\delta\in(0,T)$ фиксирована, то для значений $t\in[\delta,T]$ функция $\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial t}$ имеет суммируемую мажоранту (см.

уже доказанное свойство 6 для функции ρ_{n+1}). Поэтому для всех $t \in (0,T]$ и $\Omega \in [-G,G]$ справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_{n+1}(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial t}(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta = 0.$$

Этот факт и соотношение (1.5) означают, что свойство 5 для функции ρ_{n+1} тоже выполнено, так как в силу непрерывности ρ_{n+1} в $\overline{Q_T^*}$ и свойства 6 функция

$$I(t,\Omega) = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_{n+1}(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta$$

непрерывна на множестве $[0,T]\times[-G,G]$.

Наконец, в случае положительной и нормированной функции ρ_{n+1} интеграл $\mathscr{K}_s^{n+1}(\theta,t)$, очевидно, удовлетворяет свойству 7. Теорема доказана.

3.2. Сходимость последовательности последовательных приближений. В этом пункте установим важный факт равномерной сходимости всей последовательности ρ_n, а не только ее подпоследовательности.

Теорема 3.2. *Пусть данные задачи* (1.1)–(1.3) *удовлетворяют всем предположениям* (A) (*при* $l_0 = 0$), (B) *и* (C). *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\rho(\theta,\omega,t,\Omega) \in C(\overline{Q_T^*})$ *такая, что последовательность* $\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)$, $n = 2,3,\dots$, *из теоремы* 3.1 *равномерно сходится к* $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ *в* $\overline{Q_T^*}$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\|\rho_n - \rho\|_{C(\overline{Q_T^*})} = 0.$$

Доказательство. Выберем $t_0 > 0$ так, чтобы

$$q := 4\pi^{5/2}\|g\|_{L^1}\frac{C_Z}{M_Z}\frac{C_\rho}{\sqrt{\frac{M_\rho}{1+\frac{M_\rho}{M_Z}T}}}\sqrt{t_0} = \frac{1}{2}. \tag{3.16}$$

Здесь C_ρ, M_ρ — постоянные из утверждения 6 теоремы 3.1, а C_Z, M_Z — параметры из (3.6). Рассмотрим конечный набор чисел $T_k := kt_0 < T$ для $k = 0,1,\dots,N-1$ ($Nt_0 \ge T$) и положим $T_N = T$, где t_0 выбирается в соответствии с (3.16). Тогда функция $u(\theta,\omega,t,\Omega) = \rho_{n+1}(\theta,\omega,t,\Omega) - \rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)$ является решением следующей задачи Коши:

$$u_t = u_{\omega\omega} + \varepsilon u_{\theta\theta} - Fu_\theta + (Fu)_\omega - \Omega u_\omega - \mathscr{K}_s^n u_\omega + \left(\mathscr{K}_s^{n-1} - \mathscr{K}_s^n\right)\frac{\partial\rho_n}{\partial\omega}$$
$$\text{в } Q_T^* \cap \{t \in (T_k, T_{k+1}]\},$$

$$u|_{t=T_k} = \rho_{n+1}(\theta,\omega,T_k,\Omega) - \rho_n(\theta,\omega,T_k,\Omega)$$

для $k = 0,1,\dots,N-1$. Следовательно [2, 11],

$$u(\theta,\omega,t,\Omega) = \int_{\mathbb{R}^2} Z_{n,\Omega}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,T_k)(\rho_{n+1}(\eta,\xi,T_k,\Omega) - \rho_n(\eta,\xi,T_k,\Omega))\,d\eta d\xi$$

$$+ \int_{T_k}^{t}\int_{\mathbb{R}^2} Z_{n,\Omega}(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)(\mathscr{K}_s^{n-1}(\eta,\tau) - \mathscr{K}_s^n(\eta,\tau))\frac{\partial\rho_n}{\partial\omega}(\eta,\xi,\tau,\Omega)\,d\eta d\xi d\tau$$

$$:= I_1 + I_2 \qquad (3.17)$$

для $t \in (T_k, T_{k+1}]$ и $k = 0, 1, \dots, N-1$, где $Z_{n,\Omega}(\theta, \omega, t; \eta, \xi, \tau)$ — фундаментальное решение уравнения (3.1).

Рассмотрим последовательность

$$M_1 = \frac{M_\rho}{1 + \frac{M_\rho}{M_Z} T_1}, \quad M_{k+1} = \frac{M_k}{1 + \frac{M_k}{M_Z}(T_{k+1} - T_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \qquad (3.18)$$

где M_ρ — постоянная из утверждения 6 теоремы 3.1, а M_Z — постоянная из (3.6). Следующий важный факт доказывается по индукции.

Лемма 3.1. *Если последовательность M_k определена формулами* (3.18), *то для всех $k = 1, 2, \dots, N$ справедливо представление*

$$M_k = \frac{M_\rho}{1 + \frac{M_\rho}{M_Z} T_k}.$$

Второе важное вспомогательное соотношение устанавливается непосредственным интегрированием с использованием интеграла Эйлера — Пуассона.

Лемма 3.2. *Равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-a(\omega-\xi)^2/t} e^{-b\xi^2}\, d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a+bt}} e^{-\frac{b}{1+\frac{b}{a}t}\omega^2}$$

справедливо для всех $\omega \in \mathbb{R}$ и любых положительных чисел a, b и t.

В силу леммы 3.1 и определения T_k имеем

$$\frac{M_\rho}{1 + \frac{M_\rho}{M_Z} T} \le M_{k+1} < M_k < M_\rho \qquad (3.19)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, N-1$. Поэтому

$$\|\rho_{n+1} - \rho_n\|_k := \sup_{Q_T^* \cap \{t \in (T_{k-1}, T_k]\}} |(\rho_{n+1}(\theta, \omega, t, \Omega) - \rho_n(\theta, \omega, t, \Omega)) e^{M_k \omega^2}| < \infty \qquad (3.20)$$

для всех $n = 2, 3, \dots$ и $k = 1, 2, \dots, N$ (см. утверждение 6 теоремы 3.1 и (3.19)).

Теперь мы готовы доказать следующие оценки.

Лемма 3.3. *Неравенства*

$$\|\rho_{n+1} - \rho_n\|_1 \le q \|\rho_n - \rho_{n-1}\|_1,$$

$$\|\rho_{n+1} - \rho_n\|_{k+1} \le q \|\rho_n - \rho_{n-1}\|_{k+1} + \pi \frac{C_Z}{M_Z} \|\rho_{n+1} - \rho_n\|_k$$

справедливы для всех $n = 3, 4, \dots$ и $k = 1, 2, \dots, N-1$, где q — постоянная из (3.16).

Доказательство. Рассмотрим представление (3.17). В силу (3.3) очевидно, что $I_1(\theta, \omega, t, \Omega) \equiv 0$ при $k = 0$. Если $k = 1, 2, \dots, N-1$, то согласно (3.6) и (3.20)

$$|I_1(\theta, \omega, t, \Omega)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{C_Z}{t - T_k} e^{-M_Z(|\theta-\eta|^2 + |\omega-\xi|^2)/(t-T_k)} \|\rho_{n+1} - \rho_n\|_k e^{-M_k \xi^2}\, d\eta d\xi$$

в $Q_T^* \cap \{t \in (T_k, T_{k+1}]\}$. Воспользовавшись леммой 3.2 и (3.18), находим, что

$$|I_1(\theta,\omega,t,\Omega)| \le \pi \frac{C_Z}{M_Z} \|\rho_{n+1} - \rho_n\|_k e^{-M_{k+1}\omega^2} \tag{3.21}$$

в $Q_T^* \cap \{t \in (T_k, T_{k+1}]\}$ для $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Рассмотрим интеграл I_2 в (3.17). В силу свойства (b_1) функции $g(\Omega)$, (3.2) и (3.20) справедливо неравенство

$$|\mathscr{K}_s^n(\theta,t) - \mathscr{K}_s^{n-1}(\theta,t)| \le \|g\|_{L^1} \frac{2\pi^{3/2}}{\sqrt{M_{k+1}}} \|\rho_n - \rho_{n-1}\|_{k+1} \tag{3.22}$$

при $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in (T_k, T_{k+1}]$ и $k = 0, 1, \dots, N-1$. Далее, согласно (3.6), (3.22) и утверждению 6 теоремы 3.1 устанавливаем оценку

$$|I_2| \le \int\limits_{T_k}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{C_Z}{t-\tau} e^{-M_Z(|\theta-\eta|^2 + |\omega-\xi|^2)/(t-\tau)} \|g\|_{L^1}$$

$$\times \frac{2\pi^{3/2}}{\sqrt{M_{k+1}}} \|\rho_n - \rho_{n-1}\|_{k+1} \frac{C_\rho}{\sqrt{\tau}} e^{-M_\rho \xi^2}\, d\eta d\xi d\tau$$

в $Q_T^* \cap \{t \in (T_k, T_{k+1}]\}$ для $k = 0, 1, \dots, N-1$. Наконец, используя лемму 3.2 и оценки (3.19), заключаем, что

$$|I_2(\theta,\omega,t,\Omega)| \le q \|\rho_n - \rho_{n-1}\|_{k+1} e^{-M_{k+1}\omega^2} \tag{3.23}$$

в $Q_T^* \cap \{t \in (T_k, T_{k+1}]\}$ при всех $k = 0, 1, \dots, N-1$.

В совокупности эти оценки (3.21), (3.23) и тот факт, что $I_1(\theta,\omega,t,\Omega) \equiv 0$ при $k = 0$, дают нам искомое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Неравенства*

$$\|\rho_{n+1} - \rho_n\|_k \le q^{n-2} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\pi \frac{C_Z}{M_Z}(n-2)\right)^i \|\rho_3 - \rho_2\|_{k-i}$$

справедливы для всех $n = 3, 4, \dots$ *и* $k = 1, 2, \dots, N$, *где* q — *постоянная из* (3.16).

Доказательство. Лемма будет доказана по индукции для $k = 1, 2, \dots, N$. Если $k = 1$ (основание индукции), то по лемме 3.3

$$\|\rho_{n+1} - \rho_n\|_1 \le q \|\rho_n - \rho_{n-1}\|_1 \le \dots \le q^{n-2} \|\rho_3 - \rho_2\|_1$$

при всех $n = 3, 4, \dots$.

Предположим теперь, что утверждение леммы выполнено для некоторого значения k такого, что $k < N$. Тогда по лемме 3.3 и предположению индукции неравенство

$$\|\rho_{n+1} - \rho_n\|_{k+1} \le q \|\rho_n - \rho_{n-1}\|_{k+1} + \pi \frac{C_Z}{M_Z} q^{n-2} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\pi \frac{C_Z}{M_Z}(n-2)\right)^i \|\rho_3 - \rho_2\|_{k-i} \tag{3.24}$$

справедливо при всех $n = 3, 4, \dots$. Используя оценки (3.24), находим, что

$$\|\rho_{n+1} - \rho_n\|_{k+1} \le q \|\rho_n - \rho_{n-1}\|_{k+1} + \pi \frac{C_Z}{M_Z} q^{n-2} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\pi \frac{C_Z}{M_Z}(n-2)\right)^i \|\rho_3 - \rho_2\|_{k-i}$$

$$\leq q\Bigg(q\|\rho_{n-1}-\rho_{n-2}\|_{k+1}+\pi\frac{C_Z}{M_Z}q^{n-3}\sum_{i=0}^{k-1}\bigg(\pi\frac{C_Z}{M_Z}(n-3)\bigg)^i\|\rho_3-\rho_2\|_{k-i}\Bigg)$$

$$+\pi\frac{C_Z}{M_Z}q^{n-2}\sum_{i=0}^{k-1}\bigg(\pi\frac{C_Z}{M_Z}(n-2)\bigg)^i\|\rho_3-\rho_2\|_{k-i}$$

$$\leq q^2\|\rho_{n-1}-\rho_{n-2}\|_{k+1}+2\pi\frac{C_Z}{M_Z}q^{n-2}\sum_{i=0}^{k-1}\bigg(\pi\frac{C_Z}{M_Z}(n-2)\bigg)^i\|\rho_3-\rho_2\|_{k-i}\leq$$

$$\cdots\leq q^{n-2}\|\rho_3-\rho_2\|_{k+1}+(n-2)\pi\frac{C_Z}{M_Z}q^{n-2}\sum_{i=0}^{k-1}\bigg(\pi\frac{C_Z}{M_Z}(n-2)\bigg)^i\|\rho_3-\rho_2\|_{k-i}$$

$$=q^{n-2}\sum_{i=-1}^{k-1}\bigg(\pi\frac{C_Z}{M_Z}(n-2)\bigg)^{i+1}\|\rho_3-\rho_2\|_{k-i}$$

$$=q^{n-2}\sum_{i=0}^{k}\bigg(\pi\frac{C_Z}{M_Z}(n-2)\bigg)^i\|\rho_3-\rho_2\|_{k+1-i}$$

для всех $n=3,4,\ldots$. Лемма доказана.

Согласно лемме 3.4 и тому факту, что

$$\|\rho_{n+1}-\rho_n\|_{C(\overline{Q_T^*})}\leq\sum_{k=1}^{N}\|\rho_{n+1}-\rho_n\|_k$$

при $n=2,3,\ldots$ (см. (3.3) и (3.20)), имеем оценку

$$\|\rho_{n+1}-\rho_n\|_{C(\overline{Q_T^*})}\leq\sum_{k=1}^{N}q^{n-2}\sum_{i=0}^{k-1}\bigg(\pi\frac{C_Z}{M_Z}(n-2)\bigg)^i\|\rho_3-\rho_2\|_{k-i}$$

при всех $n=3,4,\ldots$. Поэтому

$$\|\rho_{n+1}-\rho_n\|_{C(\overline{Q_T^*})}\leq q^{n-2}\bigg(1+\pi\frac{C_Z}{M_Z}\bigg)^N(n-2)^N N\sum_{j=1}^{N}\|\rho_3-\rho_2\|_j \tag{3.25}$$

для всех $n=3,4,\ldots$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=0}^{k-1}\|\rho_3-\rho_2\|_{k-i}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\|\rho_3-\rho_2\|_j\leq\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\|\rho_3-\rho_2\|_j=N\sum_{j=1}^{N}\|\rho_3-\rho_2\|_j.$$

Обозначим

$$M=\bigg(1+\pi\frac{C_Z}{M_Z}\bigg)^N N\sum_{j=1}^{N}\|\rho_3-\rho_2\|_j$$

и заметим, что согласно (3.25)

$$\sum_{n=3}^{\infty}\|\rho_{n+1}-\rho_n\|_{C(\overline{Q_T^*})}\leq\sum_{n=3}^{\infty}Mq^{n-2}(n-2)^N=M\sum_{n=1}^{\infty}q^n n^N<\infty,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{q^n n^N}=q<1$$

(см. (3.16)). Это означает, что последовательность $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в пространстве $C(\overline{Q_T^*})$, т. е. существует функция $\rho(\theta,\omega,t,\Omega) \in C(\overline{Q_T^*})$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n - \rho\|_{C(\overline{Q_T^*})} = 0.$$

Теорема доказана.

3.3. Существование решений исходной задачи. Сейчас мы готовы доказать теорему существования для задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 3.3. *Пусть данные задачи* (1.1)–(1.3) *удовлетворяют всем предположениям* (A) (*с* $l_0 = 1$), (B) *и* (C). *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует классическое решение* $\rho(\theta,\omega,t,\Omega)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *в* Q_T. *Это решение*

1) *является непрерывной функцией по совокупности переменных в* Q_T *и имеет непрерывные частные производные* $D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho$ *в* Q_T *при* $l_1+l_2 = 1$ *и* $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho$ *в* $Q_T \cap \{t > 0\}$ *при* $2k + l_1 + l_2 \le 3$;

2) *в классическом смысле удовлетворяет уравнению* (1.1) *в* $Q_T \cap \{t > 0\}$, *граничным условиям* (1.2) *в* Q_T *и начальным данным* (1.3) *в* $Q_T \cap \{t = 0\}$, *а также дополнительному требованию* $\rho_{\theta\theta}|_{\theta=0} = \rho_{\theta\theta}|_{\theta=2\pi}$ *в* $Q_T \cap \{t > 0\}$;

3) *положительно в* Q_T;

4) *нормировано в соответствии с равенством*

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta = 1$$

для $t \in [0,T]$ *и* $\Omega \in [-G,G]$;

5) *обладает экспоненциальным убыванием на бесконечности по переменной* ω, *т. е.*

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],t\in[0,T],\Omega\in[-G,G]} \left|D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega)\right| \le Ce^{-M\omega^2}$$

при $l_1 + l_2 \le 1$ *и* $\omega \in \mathbb{R}$, *где постоянные* $C, M > 0$ *зависят лишь от* ε, $\|g\|_{L^1}$, $\|F\|_{C^{1+\alpha_0}}$, G, T, C_0 *и* M_0; *и, кроме того,*

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],\Omega\in[-G,G]} \left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega)\right| \le \frac{C}{\sqrt{t}}e^{-M\omega^2}$$

для $2k+l_1+l_2 = 2$, $\omega \in \mathbb{R}$ *и* $t \in (0,T]$ *с теми же самыми постоянными* $C, M > 0$;

6) *такое, что интегралы* $\mathscr{K}_s(\theta,t)$ *непрерывны при* $(\theta,t) \in [0,2\pi]\times[0,T]$ *вместе со своими частными производными любого порядка по переменной* θ *и равномерно ограничены относительно* ε:

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi],t\in[0,T]} |\mathscr{K}_s(\theta,t)| + \sup_{\theta\in[0,2\pi],t\in[0,T]} \left|\frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{K}_s(\theta,t)\right| \le 2\|g\|_{L^1};$$

7) *для* $l_1 + l_2 \le 1$ *функции*

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho)^2(\theta,\omega,t,\Omega)\,d\omega d\theta$$

непрерывны при $(t,\Omega) \in [0,T]\times[-G,G]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательные приближения ρ_n, построенные в теореме 3.1, и изучим их свойства. Согласно теореме 2.3 имеем

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R},t\in[0,T],\Omega\in[-G,G]} \left|D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)\right| \le Ce^{-M\omega^2} \tag{3.26}$$

для $l_1+l_2\le 1$, $\omega\in\mathbb{R}$ и

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R},\Omega\in[-G,G]}\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)\right|\le\frac{C}{\sqrt{t}}e^{-M\omega^2}\tag{3.27}$$

для $2k+l_1+l_2=2$, $\omega\in\mathbb{R}$ и $t\in(0,T]$, где постоянные C и $M>0$ не зависят от n, а зависят лишь от ε, $\|g\|_{L^1}$, $\|F\|_{C^{1+\alpha_0}}$, G, T, C_0 и M_0.

Замечание 3.1. Отметим, что, поскольку начальные данные ρ_0 удовлетворяют условиям теоремы 2.3 с $\varphi(\delta)=C_0e^{-M_0\delta^2}$ и $w(\delta)=\delta$, мы опускаем весовой множитель $\frac{w(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}=1$ в (2.8) и пишем $1/\sqrt{t}$ вместо $w(\sqrt{t})/t$ в (3.27).

Далее, из теоремы 2.3 также вытекает, что

$$|\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)-\rho_n(\theta,\omega,t+\delta,\Omega)|\le C\sqrt{\delta}e^{-M\omega^2}$$

для всех $\theta,\omega\in\mathbb{R}$, $\Omega\in[-G,G]$ и $t,t+\delta\in[0,T]$ $(\delta>0)$ с теми же постоянными $C,M>0$. Поэтому

$$\left|\mathscr{K}^n_s(\theta,t)-\mathscr{K}^n_s(\theta,t+\delta)\right|\le C\sqrt{\delta}$$

для всех $\theta\in\mathbb{R}$ и $t,t+\delta\in[0,T]$ $(\delta>0)$, причем эта константа C не зависит от θ, t, δ и n. Таким образом (см. также свойство 7 теоремы 3.1),

$$\left\|\mathscr{K}^n_s\right\|_{C_{w^*,T}}\le C,\tag{3.28}$$

где $w^*(\delta)=\delta$ и постоянная C не зависит от n (см. определение 2.2). Здесь, как и ранее, Ω — параметр из отрезка $[-G,G]$ для $C_{w^*,T}$.

Очевидно, что точно такие же оценки (3.28) справедливы и для других коэффициентов уравнения (1.1). Поэтому все коэффициенты уравнения (1.1) принадлежат пространству $C_{w_\alpha,T}$ с $w_\alpha(\delta)=\delta^\alpha$ и произвольной постоянной $\alpha\in(0,1)$. Модуль непрерывности w_α удовлетворяет условиям Зигмунда (см. определение 2.5), поэтому (ср. с теоремой 2.4)

$$\|\rho_n\|_{\mathscr{D}_{w_\alpha,T}}\le C\tag{3.29}$$

для любого фиксированного $\Omega\in[-G,G]$ и всех n, где постоянная C не зависит от Ω и n, а зависит только от α, ε, $\|g\|_{L^1}$, $\|F\|_{C^{1+\alpha_0}}$, G, T, C_0 и M_0.

Таким образом (см. (3.7) и (3.29)), при условиях этой теоремы в каждом слое $Q^*_T\cap\{t\ge\delta\}$ с произвольным фиксированным $\delta\in(0,T)$ последовательность функций $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$, построенная в теореме 3.1, является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной вместе с соответствующими последовательностями частных производных $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho_n(\theta,\omega,t,\Omega)$ для $2k+l_1+l_2\le 2$. Кроме того, последовательность $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в полосе $\overline{Q^*_T}$.

Пользуясь леммой Асколи — Арцела, заключаем, что существуют подпоследовательность $\{\rho_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ и функция ρ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\|\rho_{n_k}-\rho\|_{C(\overline{Q^*_T}\cap\{\theta,\omega\in[-B,B]\})}=0,\tag{3.30}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho_{n_k}-D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho\right\|_{C(Q^*_T\cap\{\theta,\omega\in[-B,B]\}\cap\{t\ge\delta\})}=0\tag{3.31}$$

для $2k+l_1+l_2\le 2$ и любых фиксированных $B>0$ и $\delta\in(0,T)$.

Из (3.30), (3.31) и утверждения 1 теоремы 3.1 вытекает, что функция ρ непрерывна в $\overline{Q^*_T}$, а ее частные производные $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho$ непрерывны в Q^*_T при $2k+l_1+l_2\le 2$. Кроме того, ввиду (3.29)–(3.31) справедлива оценка

$$\|\rho\|_{\mathscr{D}_{w_\alpha,T}}\le C,\tag{3.32}$$

где постоянная C не зависит от $\Omega \in [-G, G]$ (Ω — параметр для $\mathscr{D}_{w_\alpha,T}$), а в силу (3.7), (3.30) и (3.31) имеет место неравенство

$$\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega_1) - D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega_2)\right| \le C\frac{|\Omega_1-\Omega_2|}{t^{k+(l_1+l_2)/2}} \tag{3.33}$$

для всех $(\theta,\omega,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T]$, $\Omega_1,\Omega_2 \in [-G,G]$ и $2k+l_1+l_2 \le 2$, так как $w_{\rho_0}(\delta) \le C_0\delta$.

Очевидно также, что функция ρ удовлетворяет утверждению 5 теоремы, так как для всех ρ_{n_k}, $k = 1,2,\dots$, существуют мажоранты (3.26), (3.27). Далее, переходя к пределу в «нормирующем тождестве» (см. утверждение 5 теоремы 3.1), заключаем, что утверждение 4 тоже верно.

Теперь мы хотим перейти к пределу в уравнении (3.1) с $n+1 = n_k$ при $k \to \infty$. Для этого заметим, что функция ρ из (3.30) и (3.31), очевидно, совпадает с функцией ρ из теоремы 3.2. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n - \rho\|_{C(\overline{Q^*_T})} = 0.$$

В частности, отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|\rho_{n_k-1} - \rho\|_{C(\overline{Q^*_T})} = 0. \tag{3.34}$$

Поэтому ввиду наличия суммируемой мажоранты (см. (3.26) и свойство (b_1) функции $g(\Omega)$) и соотношения (3.34) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{K}^{n_k-1}_s(\theta,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} g(\Omega)\sin(\varphi-\theta)\rho(\varphi,\omega,t,\Omega)\,d\varphi d\omega d\Omega. \tag{3.35}$$

Переходя к пределу в уравнении (3.1) с $n+1 = n_k$ при $k\to\infty$ и используя (3.30), (3.31) и (3.35), непосредственно устанавливаем, что ρ — классическое решение уравнения (1.1) в полосе Q^*_T, которое, очевидно, удовлетворяет начальным данным (1.3) при $\theta,\omega \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in [-G,G]$ как непрерывная функция. В силу (3.30), (3.31) и утверждений 1 и 4 теоремы 3.1 равенство (1.2) справедливо для $\omega \in \mathbb{R}$, $t \in (0,T]$ и $\Omega \in [-G,G]$ вместе с дополнительным свойством $\rho_{\theta\theta}|_{\theta=0} = \rho_{\theta\theta}|_{\theta=2\pi}$. Поэтому утверждение 2 теоремы тоже доказано.

Из утверждения 3 теоремы 3.1 и (3.30) вытекает, что решение ρ неотрицательно в $\overline{Q^*_T}$. Утверждение 6 следует из этого факта и уже доказанного утверждения 4 теоремы.

Ввиду утверждения 6 существует положительное фундаментальное решение $Z^{\varepsilon,N}_\Omega(\theta,\omega,t;\eta,\xi,\tau)$ уравнения (1.1) в полосе $\mathbb{R}^2\times(0,T]$ переменных (θ,ω,t) и следующее представление имеет место во всем Q^*_T [2]:

$$\rho(\theta,\omega,t,\Omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} Z^{\varepsilon,N}_\Omega(\theta,\omega,t;\eta,\xi,0)\rho_0(\eta,\xi,\Omega)\,d\eta d\xi.$$

Так как оба сомножителя $Z^{\varepsilon,N}_\Omega$ и ρ_0, стоящие под этим интегралом, положительны, то верно утверждение 3.

Для доказательства утверждения 1 необходимо дополнительно установить, что для $l_1+l_2 = 1$ частные производные $D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho$ непрерывны в $\overline{Q^*_T}$, а при $2k+l_1+l_2 = 3$ частные производные $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho$ существуют и непрерывны в Q^*_T.

Действуя аналогично [7], можно доказать, что производные $D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho$ при $l_1+l_2=1$ непрерывны на множестве $(\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T]$ при каждом фиксированном значении параметра $\Omega\in[-G,G]$. Кроме того [14, 15], производные $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho$, $2k+l_1+l_2=3$, существуют в полосе Q^*_T и непрерывны по совокупности переменных $(\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T]$ при каждом фиксированном значении $\Omega\in[-G,G]$.

Дифференцируя уравнение (1.1) по переменным θ и ω, находим, что при каждом фиксированном $\Omega\in[-G,G]$ функции $v(\theta,\omega,t,\Omega):=\rho_\theta(\theta,\omega,t,\Omega)$ и $w(\theta,\omega,t,\Omega):=\rho_\omega(\theta,\omega,t,\Omega)$ являются классическими решениями следующих задач Коши:

$$v_t=v_{\omega\omega}+\varepsilon v_{\theta\theta}-Fv_\theta+(Fv)_\omega-\Omega v_\omega-\mathscr{K}_s v_\omega-\frac{\partial\mathscr{K}_s}{\partial\theta}\rho_\omega \quad \text{при } (\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T],$$

$$v|_{t=0}=\frac{\partial\rho_0}{\partial\theta}(\theta,\omega,\Omega)\quad\text{при } (\theta,\omega)\in\mathbb{R}^2 \tag{3.36}$$

и

$$w_t=w_{\omega\omega}+\varepsilon w_{\theta\theta}-Fw_\theta+(Fw)_\omega+F'w-\Omega w_\omega-\mathscr{K}_s w_\omega-F'\rho_\theta+F''\rho$$
$$\text{при } (\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T], \tag{3.37}$$

$$w|_{t=0}=\frac{\partial\rho_0}{\partial\omega}(\theta,\omega,\Omega)\quad\text{при } (\theta,\omega)\in\mathbb{R}^2.$$

Теперь мы можем установить оценку

$$\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega)\right|\le C\frac{t^{\alpha_0/2}}{t}\le\frac{C}{t} \tag{3.38}$$

в Q^*_T для $2k+l_1+l_2=3$, где C — некоторая постоянная.

Заметим, что $\frac{\partial\mathscr{K}_s}{\partial\theta}$, F', F'' и все коэффициенты уравнений (3.36), (3.37) принадлежат пространству $C_{w_{\alpha_0},T}$ с модулем непрерывности $w_{\alpha_0}(\delta)=\delta^{\alpha_0}$ (см. предположение (C), определение 2.2 и доказательство (3.28)). Поэтому из неравенства (3.32) вытекает тот факт, что соответствующие пары правых частей и начальных данных из (3.36) и (3.37) принадлежат пространству $\mathscr{R}_{w_{\alpha_0},T}$ (см. свойство (a_1) функции ρ_0 и определения 2.3, 2.4). Таким образом, оценка (3.38) следует из теоремы 2.4.

Наконец, рассмотрим задачи Коши для функций

$$f(\theta,\omega,t,\Omega_1,\Omega_2):=v(\theta,\omega,t,\Omega_1)-v(\theta,\omega,t,\Omega_2),$$

$$h(\theta,\omega,t,\Omega_1,\Omega_2):=w(\theta,\omega,t,\Omega_1)-w(\theta,\omega,t,\Omega_2),$$

которые имеют форму

$$f_t=f_{\omega\omega}+\varepsilon f_{\theta\theta}-Ff_\theta+(Ff)_\omega-\Omega_1 f_\omega-\mathscr{K}_s f_\omega+(\Omega_2-\Omega_1)\rho_{\theta\omega}(\theta,\omega,t,\Omega_2)$$
$$-\frac{\partial\mathscr{K}_s}{\partial\theta}(\rho_\omega(\theta,\omega,t,\Omega_1)-\rho_\omega(\theta,\omega,t,\Omega_2))\quad\text{при } (\theta,\omega,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,T],$$

$$f|_{t=0}=\frac{\partial\rho_0}{\partial\theta}(\theta,\omega,\Omega_1)-\frac{\partial\rho_0}{\partial\theta}(\theta,\omega,\Omega_2)\quad\text{при } (\theta,\omega)\in\mathbb{R}^2$$

и

$$h_t=h_{\omega\omega}+\varepsilon h_{\theta\theta}-Fh_\theta+(Fh)_\omega+F'h-\Omega_1 h_\omega-\mathscr{K}_s h_\omega$$

$$+ (\Omega_2 - \Omega_1)\rho_{\omega\omega}(\theta,\omega,t,\Omega_2) - F'(\rho_\theta(\theta,\omega,t,\Omega_1) - \rho_\theta(\theta,\omega,t,\Omega_2))$$

$$+ F''(\rho(\theta,\omega,t,\Omega_1) - \rho(\theta,\omega,t,\Omega_2)) \quad \text{при } (\theta,\omega,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T],$$

$$h|_{t=0} = \frac{\partial\rho_0}{\partial\omega}(\theta,\omega,\Omega_1) - \frac{\partial\rho_0}{\partial\omega}(\theta,\omega,\Omega_2) \quad \text{при } (\theta,\omega) \in \mathbb{R}^2.$$

Установим оценку, подобную (3.7):

$$\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega_1) - D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega_2)\right| \le C\frac{|\Omega_1-\Omega_2|^{\alpha_0} + |\Omega_1-\Omega_2|}{t^{k+(l_1+l_2)/2-1/2}} \tag{3.39}$$

для всех $(\theta,\omega,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T]$, $\Omega_1,\Omega_2 \in [-G,G]$ и $1 \le 2k + l_1 + l_2 \le 3$, где C — некоторая постоянная. В силу утверждений 5 и 6 (уже доказанных) и неравенства (3.33) оценка (3.39) для $2k + l_1 + l_2 = 1, 2$ доказывается точно так же, как это было сделано для (3.7) при $2k + l_1 + l_2 = 0, 1$. Для того чтобы доказать оценку (3.39) для $2k+l_1+l_2 = 3$ (аналогично доказательству (3.7) для $2k + l_1 + l_2 = 2$), мы должны дополнительно использовать следующие оценки:

$$\left|D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega) - D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho(\eta,\xi,t,\Omega)\right| \le C\frac{\sqrt{(\theta-\eta)^2+(\omega-\xi)^2}}{t}$$

для $2k + l_1 + l_2 = 2$ (которые вытекают из теоремы Лагранжа и (3.38)) и

$$\Big|\big(D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega_1) - D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho(\theta,\omega,t,\Omega_2)\big)$$

$$- \big(D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho(\eta,\xi,t,\Omega_1) - D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho(\eta,\xi,t,\Omega_2)\big)\Big|$$

$$\le C\frac{|\Omega_1-\Omega_2|^{\alpha_0} + |\Omega_1-\Omega_2|}{t^{(l_1+l_2)/2}}\sqrt{(\theta-\eta)^2+(\omega-\xi)^2}$$

для $l_1+l_2 \le 1$ (которые следуют из теоремы Лагранжа и уже доказанной оценки (3.39) для $l_1 + l_2 = 1, 2$). Итак, оценка (3.39) доказана. Следовательно, при $l_1 + l_2 = 1$ производные $D^{l_1,l_2}_{\omega,\theta}\rho$ непрерывны в $\overline{Q^*_T}$, а при $2k+l_1+l_2 \le 3$ производные $D^{k,l_1,l_2}_{t,\omega,\theta}\rho$ непрерывны в Q^*_T. Таким образом, утверждение 1 полностью доказано. Свойство 7 является следствием утверждений 1 и 5. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Acebrón J. A., Spigler R.* Adaptive frequency model for phase-frequency synchronization in large populations of globally coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81, N 11. P. 2229–2232.
2. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 3. С. 3–146.
3. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. New York: Prentice-Hall, 1964.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964.
5. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–162.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. *Белоносов В. С.* Оценки решений параболических систем в весовых классах Гёльдера и некоторые их приложения // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 2. С. 163–188.
8. *Zelenyak T. I., Lavrentiev M. M. Jr., Vishnevskiĭ M. P.* Qualitative theory of parabolic equations.. Utrecht (The Netherlands): VSP, 1997. P. I.
9. *Pao C. V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum, 1992.
10. *Ахметов Д. Р.* Об изоморфизме, порождаемом уравнением теплопроводности // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 243–260.

11. *Ахметов Д. Р.* О необходимых и достаточных условиях классической разрешимости задачи Коши для линейных параболических уравнений // Мат. труды. 1998. Т. 1, № 1. С. 3–28.

12. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-Параболические системы // Тр. семинара по функциональному анализу. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. Т. 1. С. 3–175.

13. *Ахметов Д. Р.* Об изоморфизме, порождаемом линейным параболическим уравнением // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 493–511.

14. *Белоносов В. С.* Внутренние оценки решений квазипараболических систем // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 20–35.

15. *Белоносов В. С.* Классические решения квазиэллиптических уравнений // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 9. С. 21–40.

Статья поступила 18 октября 2000 г.

Лаврентьев Михаил Михайлович (мл.)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
mmlavr@nsu.ru

Спиглер Ренато (Spigler Renato)
Università degli Studi Roma Tre, Dipartimento di Matematica
Largo San Leonardo Murialdo, 1, 00146 Roma (Italia)
spigler@dmsa.unipd.it

Ахметов Денис Робертович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
adr@math.nsc.ru