Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 514.17

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ РАДИУСАМИ СФЕР, СВЯЗАННЫХ С ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В. К. Ионин

Аннотация: Пусть выпуклой поверхности Φ пространства постоянной кривизны можно сопоставить четыре числа $(\lambda, \Lambda, M, \mu)$, где λ — радиус наибольшей сферы, свободно перекатывающейся по внутренней стороне поверхности Φ, Λ — радиус сферы, вписанной в Φ, M — радиус сферы, описанной около Φ, μ — радиус сферы, по внутренней стороне которой свободно перекатывается поверхность Φ. Находятся точные неравенства, связывающие эти четыре числа. Библиогр. 3.

§ 1. Определения, обозначения и формулировка основных результатов

1.1. Пусть K — произвольное вещественное число, E_K — n-мерное $(n \geq 2)$ риманово пространство кривизны K в каждом двумерном направлении, причем E_K — пространство Лобачевского при $K < 0$, E_0 — евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а при $K > 0$ сфера $E_K = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1/K\}$ и внутренняя метрика E_K порождается евклидовым пространством $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через ρ_K метрику пространства E_K. Если E' и E'' — непустые подмножества E_K, то $\rho_K(E', E'')$ — точная нижняя грань чисел $\rho_K(X, Y)$, где $X \in E'$, $Y \in E''$.

1.2. *Кривой* (или *дугой*) пространства E_K называется любое его подмножество, гомеоморфное замкнутому числовому отрезку $[0, 1]$; точки, соответствующие при гомеоморфизме числам 0 и 1, называются *концами кривой.* Кривую с концами в точках $X, Y \in E_K$ назовем *отрезком* и обозначим через $[X, Y]$, если она является единственной кратчайшей кривой, соединяющей точки X и Y. Если $K \leq 0$, то любые две различные точки являются концами некоторого отрезка. Множество, гомеоморфное окружности, будем называть *замкнутой кривой.*

Пусть $K > 0$. Две различные точки пространства E_K называются *антиподами*, если расстояние между ними максимально, т. е. равняется $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$. Любые две точки, являющиеся антиподами, можно соединить бесконечным множеством кратчайших; любые две различные точки, не являющиеся антиподами, представляют собой концы некоторого отрезка.

1.3. При $K \leq 0$ множество $E \subset E_K$ называется выпуклым, если любые две его различные точки можно соединить кратчайшей, принадлежащей E.

Пусть $K > 0$. В этом случае определим выпуклое множество так же, как в книге [1, с. 323].

Множество $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется *выпуклым конусом*, если выполняются условия:

а) множество Q содержит начало координат и выпукло;

б) каждая опорная к Q гиперплоскость проходит через начало координат;

в) существует опорная к Q гиперплоскость, имеющая с Q единственную общую точку.

Множество $E \subset E_K$ называется *выпуклым*, если оно является пересечением некоторого выпуклого конуса со сферой $E_K \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Выпуклый конус, состоящий только из одной точки, порождает пустое выпуклое подмножество пространства E_K.

1.4. *Шаром радиуса* $r > 0$ (если $K > 0$, то $r < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$) *с центром в точке* X называется множество всех точек, удаленных от X не более чем на r. Граница шара называется *сферой*. Если $K \le 0$, то любой шар — выпуклое множество. При $K > 0$ шар радиуса r является выпуклым множеством, если и только если $0 < r < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$; шар радиуса $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ называется *полупространством* пространства E_K, а граница этого шара — *гиперплоскостью*.

В случае $n = 2$ мы часто будем слова «шар», «сфера», «тело» и «поверхность» заменять соответственно словами «круг», «окружность», «фигура» и «кривая».

1.5. Выпуклое множество пространства E_K, гомеоморфное шару, и его граница называются соответственно *выпуклым телом* и *выпуклой поверхностью*. Выпуклое тело, ограниченное выпуклой поверхностью Φ, обозначается через $T(\Phi)$. Обозначим через V множество всех выпуклых поверхностей.

Сопоставим каждой поверхности $\Phi \in V$ два числа $\Lambda(\Phi)$ и $M(\Phi)$ (которые называются соответственно *радиусом сферы*, *вписанной в* Φ, и *радиусом сферы*, *описанной около* Φ) следующим образом: $\Lambda(\Phi)$ — радиус наибольшего шара, принадлежащего телу $T(\Phi)$, а $M(\Phi)$ — радиус наименьшего шара, содержащего тело $T(\Phi)$. Очевидно, что $0 < \Lambda(\Phi) \le M(\Phi)$ для всех $\Phi \in V$.

1.6. Определим два подмножества V_1 и V_2 множества V. Поверхность $\Phi \in V$ принадлежит V_1, если и только если существует такое число $C_1 > 0$, что тело $T(\Phi)$ — объединение некоторого семейства шаров радиуса C_1. Точную верхнюю грань чисел C_1 обозначим через $\lambda(\Phi)$. Нетрудно видеть справедливость следующих четырех утверждений:

а) $0 < \lambda(\Phi) \le \Lambda(\Phi) \le M(\Phi)$ для всех $\Phi \in V_1$;

б) если $\Phi \in V_1$, то тело $T(\Phi)$ — объединение некоторого семейства шаров радиуса $\lambda(\Phi)$;

в) через каждую точку поверхности $\Phi \in V_1$ проходит единственная опорная гиперплоскость;

г) для каждой точки X поверхности $\Phi \in V_1$ существует единственная сфера S радиуса $\lambda(\Phi)$ такая, что $X \in S \subset T(\Phi)$.

Поверхность $\Phi \in V$ принадлежит V_2, если и только если существует такое число $C_2 > 0$ (при $K > 0$ должно выполняться дополнительное неравенство $C_2 < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$), что тело $T(\Phi)$ — пересечение некоторого семейства шаров радиуса C_2. Точную нижнюю грань чисел C_2 обозначим через $\mu(\Phi)$. Нетрудно видеть справедливость следующих трех утверждений:

д) $0 < \Lambda(\Phi) \le M(\Phi) \le \mu(\Phi)$ для всех $\Phi \in V_2$;

е) если $\Phi \in V_2$, то тело $T(\Phi)$ — пересечение некоторого семейства шаров радиуса $\mu(\Phi)$;

ж) если через точку X поверхности $\Phi \in V_2$ проходит единственная опорная гиперплоскость, то существует единственная сфера S радиуса $\mu(\Phi)$ такая, что

$X \in S$ и $\Phi \subset T(S)$.

Также легко видеть справедливость утверждения: если отличная от сферы поверхность Φ принадлежит пересечению $V_1 \cap V_2$, то $0 < \lambda(\Phi) < \Lambda(\Phi) < M(\Phi) < \mu(\Phi)$ и $\mu(\Phi) < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ в случае $K > 0$.

В этой статье доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если отличная от сферы выпуклая поверхность Φ принадлежит $V_1 \cap V_2$ и $\lambda = \lambda(\Phi)$, $\Lambda = \Lambda(\Phi)$, $M = M(\Phi)$, $\mu = \mu(\Phi)$, то*

$$\begin{gathered} 0 < \lambda < \Lambda < M < \mu \quad \text{при } K \le 0, \\ 0 < \lambda < \Lambda < M < \mu < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \quad \text{при } K > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{ch}\sqrt{-K}(\mu - \lambda) \ge \operatorname{ch}\sqrt{-K}(\mu - \Lambda)\operatorname{ch}\sqrt{-K}(M - \lambda) \quad \text{при } K < 0, \\ (\mu - \lambda)^2 \ge (\mu - \Lambda)^2 + (M - \lambda)^2 \quad \text{при } K = 0, \\ \cos\sqrt{K}(\mu - \lambda) \le \cos\sqrt{K}(\mu - \Lambda)\cos\sqrt{K}(M - \lambda) \quad \text{при } K > 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Теорема 2. *Если для вещественного числа K числа λ, Λ, M, μ удовлетворяют неравенствам* (1) *и* (2), *то в пространстве E_K существует такая выпуклая поверхность $\Phi \in V_1 \cap V_2$, что $\lambda = \lambda(\Phi)$, $\Lambda = \Lambda(\Phi)$, $M = M(\Phi)$, $\mu = \mu(\Phi)$.*

Другими словами, теорема 2 утверждает, что неравенства (1) и (2) в теореме 1 усилить нельзя. Эти теоремы доказаны в [2] при условии, что $K = 0$. Здесь мы приведем значительно более простое доказательство для произвольного K.

§ 2. Доказательство теорем 1 и 2

В пп. 2.1 и 2.2 приводится информация, используемая при доказательстве теорем 1 и 2. В пп. 2.3 и 2.4 доказываются соответственно теоремы 1 и 2.

2.1. В этом и следующем пунктах предполагается, что четверка чисел $(\lambda, \Lambda, M, \mu)$ удовлетворяет условию (1).

Треугольником в пространстве E_K здесь называется замкнутая кривая, состоящая из трех отрезков, не принадлежащих одной прямой; концы этих отрезков называются вершинами треугольника, а сами отрезки — его сторонами. Вершины любого треугольника не лежат на одной прямой и однозначно определяют этот треугольник. При $K > 0$ любые две вершины произвольного треугольника не являются антиподами друг друга. Будем обозначать через (ABC) треугольник с вершинами в точках A, B и C.

Так как

$$(M - \lambda) + (\mu - \lambda) > \mu - \Lambda, \quad (\mu - \lambda) + (\mu - \Lambda) > M - \lambda, \quad (\mu - \Lambda) + (M - \lambda) > \mu - \lambda$$

и каждое из чисел $M - \lambda$, $\mu - \lambda$ и $\mu - \Lambda$ меньше $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ при $K > 0$, то существует такой треугольник (ABC), что

$$\rho_K(A, B) = M - \lambda, \quad \rho_K(B, C) = \mu - \lambda, \quad \rho_K(C, A) = \mu - \Lambda.$$

Предложение 1. *Неравенства*

$$\frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi, \tag{3}$$

где α — угол треугольника (ABC) при вершине A, равносильны условию (2), *причем равенство в* (3) *равносильно равенству в* (2).

Это предложение является простым следствием теоремы косинусов (см., например, [3, с. 190]), которая сводится к следующим равенствам:

$$\operatorname{ch}\sqrt{-K}(\mu-\lambda) = \operatorname{ch}\sqrt{-K}(\mu-\Lambda)\operatorname{ch}\sqrt{-K}(M-\lambda) \\ - \operatorname{sh}\sqrt{-K}(\mu-\Lambda)\operatorname{sh}\sqrt{-K}(M-\lambda)\cos\alpha \quad \text{при } K<0,$$

$$(\mu-\lambda)^2 = (\mu-\Lambda)^2 + (M-\lambda)^2 - 2(\mu-\Lambda)(M-\lambda)\cos\alpha \quad \text{при } K=0,$$

$$\cos\sqrt{K}(\mu-\lambda) = \cos\sqrt{K}(\mu-\Lambda)\cos\sqrt{K}(M-\lambda) \\ + \sin\sqrt{K}(\mu-\Lambda)\sin\sqrt{K}(M-\lambda)\cos\alpha \quad \text{при } K>0.$$

2.2. Обозначим через p и $\mathscr{P}$ соответственно прямую, проходящую через точки A и B, и двумерную плоскость треугольника (ABC). На прямой p зафиксируем две точки A' и B' так, чтобы выполнялись условия

$$A \in [A', B], \quad B \in [A, B'], \quad \rho_K(A, A') = \Lambda, \quad \rho_K(B, B') = \lambda,$$

а на плоскости $\mathscr{P}$ зафиксируем еще две точки A'' и B'' так, чтобы выполнялись условия

$$A \in [A'', C], \quad B \in [B'', C], \quad \rho_K(A, A'') = \Lambda, \quad \rho_K(B, B'') = \lambda.$$

Очевидно, что никакие две из этих четырех точек не являются антиподами, а точки A'' и B'' лежат на плоскости $\mathscr{P}$ по одну сторону от прямой p. Пусть $(A'A'')$, $(B'B'')$ и $(A''B'')$ — кратчайшие дуги окружностей радиусов Λ, λ и μ с центрами в точках A, B и C соответственно. Обозначим через Ψ поверхность, полученную вращением в пространстве E_K кривой $(A'A'') \cup (A''B'') \cup (B'B'')$ вокруг прямой p. Другими словами, поверхность Ψ — граница тела $T(\Psi)$, являющегося пересечением всех шаров радиуса μ, содержащих шар радиуса Λ с центром в A и шар радиуса λ с центром в B. Следующее предложение очевидно и поэтому не нуждается в доказательстве.

Предложение 2. *Поверхность Ψ принадлежит множеству $V_1 \cap V_2$; $\Lambda(\Psi) > \Lambda$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\Lambda(\Psi) = \Lambda$, если $\frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi$, где α — величина угла треугольника (ABC) при вершине A.*

2.3. Докажем теорему 1. Зафиксируем произвольно поверхность Φ, удовлетворяющую условиям теоремы 1. Этим мы также фиксируем четверку чисел $(\lambda, \Lambda, M, \mu)$, которая, как легко видеть, удовлетворяет условию (1). Осталось убедиться в справедливости условия (2).

Пусть A — центр сферы S, вписанной в Φ. Радиус этой сферы равен Λ. Функция, равная расстоянию от точки A до произвольной точки поверхности Φ, непрерывна и определена на компактном множестве Φ, следовательно, достигает наибольшего значения в некоторой точке $D \in \Phi$. Проведем через точку D сферу s радиуса λ так, чтобы s принадлежала телу $T(\Phi)$. Ясно, что эта сфера определяется однозначно и центр ее находится в некоторой точке $B' \in [A, D]$ на расстоянии λ от D. Очевидно, что

$$M \le M' < \mu, \tag{4}$$

где $M' = \rho_K(A, D)$. Таким образом, четверка чисел $(\lambda, \Lambda, M', \mu)$, как и четверка чисел $(\lambda, \Lambda, M, \mu)$, удовлетворяет условию (1).

Как и в п. 2.1, можно обосновать существование треугольника $(AB'C)$ (где C — некоторая точка пространства E_K), длины сторон которого удовлетворяют равенствам $\rho_K(A, B') = M' - \lambda$, $\rho_K(B', C) = \mu - \lambda$, $\rho_K(C, A) = \mu - \Lambda$.

Пусть поверхность Ψ' — граница тела $T(\Psi')$, являющегося пересечением всех шаров радиуса μ, содержащих сферы S и s. Очевидно, что $\Psi' \subset T(\Phi)$, следовательно, $\Lambda(\Psi') = \Lambda$. Из последнего равенства и предложения 2 вытекают неравенства $\frac{\pi}{2} \le \alpha' < \pi$, где α' — величина угла треугольника $(AB'C)$ при вершине A. Предложение 1, примененное к треугольнику $(AB'C)$, приводит к неравенствам

$$\begin{gathered}\operatorname{ch}\sqrt{-K}(\mu-\lambda) \ge \operatorname{ch}\sqrt{-K}(\mu-\Lambda)\operatorname{ch}\sqrt{-K}(M'-\lambda) \quad \text{при } K<0,\\ (\mu-\lambda)^2 \ge (\mu-\Lambda)^2 + (M'-\lambda)^2 \quad \text{при } K=0,\\ \cos\sqrt{K}(\mu-\lambda) \le \cos\sqrt{K}(\mu-\Lambda)\cos\sqrt{K}(M'-\lambda) \quad \text{при } K>0.\end{gathered} \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекают неравенства (2). Теорема 1 доказана.

2.4. Докажем теорему 2. Рассмотрим треугольник (ABC), построенный в п. 2.1. Так как условия (2) выполняются, то в силу предложения 1 справедливы неравенства (3). Зафиксируем точку F так, чтобы точка A была серединой отрезка $[F, B]$, и построим сферы s_F, S_A, s_B радиусов λ, Λ, λ с центрами в точках F, A, B соответственно. Обозначим через Φ поверхность, для которой тело $T(\Phi)$ — пересечение всех шаров радиуса μ, содержащих сферы s_F, S_A и s_B. Учитывая неравенства (3), легко установить, что S_A — сфера, вписанная в Φ, следовательно, $\Lambda = \Lambda(\Phi)$. Так как равенства $\lambda = \lambda(\Phi)$, $M = M(\Phi)$, $\mu = \mu(\Phi)$ очевидны, теорема 2 доказана.

§ 3. Обобщение теорем 1 и 2 для евклидовых пространств

Всюду в этом параграфе рассматриваются выпуклые поверхности множества $V_1 \cap V_2$ n-мерного $(n \ge 2)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

3.1. Если Φ — выпуклая поверхность, то через $[\Phi]$ обозначается класс всех выпуклых поверхностей, полученных параллельным сдвигом поверхности Φ. Если $r > 0$ и $r \ne 1$, то через $[r\Phi]$ обозначается класс всех выпуклых поверхностей, гомотетичных с коэффициентом r какой-нибудь поверхности из класса $[\Phi]$. Для того чтобы обозначение $[r\Phi]$ имело смысл для любого $r > 0$, положим $[1\Phi] = [\Phi]$.

3.2. В этом пункте определим четыре функционала λ, Λ, M, μ на множестве $(V_1 \cap V_2)^2$. Тот факт, что эти функционалы обозначаются теми же символами, что и функционалы, определенные в пп. 1.5 и 1.6, не приведет к недоразумению, так как всегда из контекста будет ясно, о каких функционалах идет речь.

Пусть (Φ, Ψ) — пара выпуклых поверхностей. Очевидно, существует такое число $C_1 > 0$, что тело $T(\Psi)$ — объединение некоторого семейства выпуклых тел, границы которых являются поверхностями класса $[C_1\Phi]$. Точную верхнюю грань чисел C_1 обозначим через $\lambda(\Phi, \Psi)$. Обозначим через $\Lambda(\Phi, \Psi)$ точную верхнюю грань чисел $C_2 > 0$, для которых в классе $[C_2\Phi]$ найдется поверхность, принадлежащая телу $T(\Phi)$. Обозначим через $M(\Phi, \Psi)$ точную нижнюю грань чисел $C_3 > 0$, для которых в классе $[C_3\Phi]$ найдется такая поверхность Φ', что $\Psi \subset T(\Phi')$. Очевидно, существует такое число $C_4 > 0$, что тело $T(\Psi)$ — пересечение некоторого семейства выпуклых тел, границы которых являются поверхностями класса $[C_4\Phi]$.

Справедливо следующее очевидное утверждение: если Φ — произвольная поверхность множества $V_1 \cap V_2$, а S — сфера единичного радиуса, то

$$\lambda(S,\Phi) = \lambda(\Phi), \quad \Lambda(S,\Phi) = \Lambda(\Phi), \quad M(S,\Phi) = M(\Phi), \quad \mu(S,\Phi) = \mu(\Phi),$$

где в правых частях равенств стоят числа, определенные в пп. 1.5 и 1.6.

3.3. Для фиксированной выпуклой поверхности Φ обозначим через $\Delta(\Phi)$ множество всех четверок чисел $(\lambda(\Phi,\Psi),\ \Lambda(\Phi,\Psi),\ M(\Phi,\Psi),\ \mu(\Phi,\Psi))$, где поверхность Ψ пробегает все множество $V_1 \cap V_2$. Теоремы 1 и 2 дают обозримое описание множества $\Delta(\Phi)$ в случае, когда Φ — сфера единичного радиуса. Оказывается такое описание можно привести и в случае, когда Φ — произвольная эллиптическая поверхность. Точнее говоря, справедлива следующая

Теорема 3. *Если S — сфера единичного радиуса, а Φ — произвольная эллиптическая поверхность, то $\Delta(S) = \Delta(\Phi)$.*

В следующем пункте будет доказана более сильная

Теорема 4. *Если (Φ_1,Φ_2) — пара поверхностей из $V_1 \cap V_2$ и существует такое аффинное преобразование α пространства $\mathbb{R}^n$, что $\alpha(\Phi_1) = \Phi_2$ (другими словами, поверхности Φ_1 и Φ_2 аффинно эквивалентны), то $\Delta(\Phi_1) = \Delta(\Phi_2)$.*

3.4. Для произвольной выпуклой поверхности Φ определим отображение $H_\Phi : V_1 \cap V_2 \to \mathbb{R}^4$ равенством $H_\Phi(\Psi) = (\lambda(\Phi,\Psi),\ \Lambda(\Phi,\Psi),\ M(\Phi,\Psi),\ \mu(\Phi,\Psi))$. Образ этого отображения совпадает с множеством $\Delta(\Phi)$. Очевидно, что

$$H_{\gamma(\Phi)}(\gamma(\Psi)) = H_\Phi(\Psi),$$

где γ — произвольное аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$, а (Φ,Ψ) — пара произвольных выпуклых поверхностей.

Докажем вложение $\Delta(\Phi_2) \subset \Delta(\Phi_1)$. Для произвольной четверки чисел (λ,Λ,M,μ) выберем поверхность $\Psi \in V_1 \cap V_2$ так, чтобы $(\lambda,\Lambda,M,\mu) = H_{\Phi_2}(\Psi)$. Определим поверхность Φ равенством $\Phi = \alpha^{-1}(\Psi)$. Так как

$$(\lambda,\Lambda,M,\mu) = H_{\alpha(\Phi_1)}(\alpha(\Phi)) = H_{\Phi_1}(\Phi) \in \Delta(\Phi_1),$$

то $\Delta(\Phi_2) \subset \Delta(\Phi_1)$. Противоположное вложение $\Delta(\Phi_1) \subset \Delta(\Phi_2)$ доказывается аналогично. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М: Наука, 1969.
2. *Ионин В. К.* Неравенства между радиусами сфер, связанных с выпуклой поверхностью // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 814–830.
3. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. М: Наука, 1971.

Статья поступила 9 июня 2000 г.

Ионин Владимир Кузьмич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090