Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.982.22, 517.983.23

КОНЕЧНЫЕ СЕМЕЙСТВА ℓ_p–ПРОСТРАНСТВ И МНОГОПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В. П. Захарюта, П. А. Чалов

Аннотация: Рассматриваются конечные семейства банаховых пространств с безусловным базисом. Изучаются проблема изоморфной классификации семейств и связанная с ней проблема единственности безусловного базиса семейства. Дано полное решение обеих проблем для ℓ_1- и c_0-семейств с использованием некоторых геометрических инвариантов в сочетании с соответствующими результатами для пространств ℓ_1 и c_0. Библиогр. 41.

Введение

В статье исследуется проблема изоморфной классификации и связанная с ней проблема единственности безусловного базиса на классе конечных упорядоченных семейств банаховых пространств с безусловным базисом (т. е. с базисом, общим для всех пространств семейства). Несмотря на сходство с аналогичными проблемами для одного банахова пространства (см., например, [1]), решения имеют больше сходства со случаем ненормированных пространств Фреше, поскольку на первый план выдвигается связь между нормами (окрестностями нуля) пространств, составляющих семейство.

При исследовании первой проблемы применяются некоторые геометрические инварианты, описывающие соотношения между нормами пространств, образующих семейство; эти инварианты близки к так называемым составным линейным топологическим инвариантам для локально выпуклых пространств [2–6], являющимся естественным развитием классических инвариантов — аппроксимативных и диаметральных размерностей (А. Пелчинский [7], А. Н. Колмогоров [8], Ч. Бессага, А. Пелчинский и С. Ролевич [9, 10], А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров [11], Б. С. Митягин [12, 13], М. М. Драгилев [14]) в духе результатов Митягина для немонтелевских гильбертовых шкал [15, 16]. Отличительная особенность рассмотренных здесь инвариантов состоит в комбинировании геометрических и интерполяционных методов для их построения (ср. с [17–27] и др.). Для ℓ_1- и c_0-семейств дано полное решение обеих проблем с использованием геометрических инвариантов в сочетании с соответствующими результатами для пространств ℓ_1 и c_0 (см. [28–32] или книгу [1]).

1. Предварительные сведения

Семейства пространств. Базисы семейств. Семейство E локально выпуклых пространств E_j, $j = 0, 1, \dots, r$, с линейными непрерывными вложениями $E_{j+1} \hookrightarrow E_j$, $j = 0, 1, \dots, r-1$, будем обозначать символом $E = [E_0, E_1, \dots, E_r]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00215).

Два семейства $E = [E_0, E_1, \dots, E_r]$ и $F = [F_0, F_1, \dots, F_r]$ будем называть *изоморфными*, если существует изоморфизм $T : E_0 \to F_0$, сужение которого на каждое пространство E_j является изоморфизмом из E_j в F_j, $j = 1, 2, \dots, r$.

Система $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ в E_r называется *безусловным базисом семейства пространств* $E = [E_0, E_1, \dots, E_r]$, если эта система образует безусловный базис в каждом пространстве E_j, $j = 0, 1, \dots, r$.

Пусть $E = [E_0, E_1, \dots, E_r]$ и $F = [F_0, F_1, \dots, F_r]$ — изоморфные семейства с безусловными базисами $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ соответственно. Базисы $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ называются *квазиэквивалентными*, если существует изоморфизм $T : E \to F$ такой, что $Tx_i = \lambda_i y_{\sigma(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, где $\{\lambda_i\}$ — некоторая числовая последовательность, а $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — некоторая биекция. В соответствии с этим определением изоморфизм T называют *квазидиагональным* (относительно базисов $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$), а семейства E и F — *квазидиагонально изоморфными*. Будем писать $E \overset{\text{кд}}{\simeq} F$, если существует квазидиагональный изоморфизм $T : E \to F$ относительно канонических базисов.

Далее ограничимся рассмотрением следующих конкретных семейств:

$$\ell_p[a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(r)}] := [\ell_p(a^{(0)}), \dots, \ell_p(a^{(r)})], \quad 1 \le p < \infty, \tag{1}$$

$$c_0[a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(r)}] := [c_0(a^{(0)}), \dots, c_0(a^{(r)})], \tag{2}$$

где $a^{(j)} = (a_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$, $j = 0, 1, \dots, r$, и $\ell_p(a)$, $c_0(a)$, как обычно, обозначают весовые пространства числовых последовательностей $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ таких, что

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (x \in \ell_p(a)) \quad \text{или } \xi_i a_i \to 0 \quad (x \in c_0(a))$$

с нормами

$$\|x\|_{\ell_p(a)} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|x\|_{c_0(a)} := \sup\{|\xi_i| a_i,\ i \in \mathbb{N}\}, \quad x = (\xi)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Посредством диагонального изоморфизма каждое семейство (1), (2) может быть представлено в простом виде $\ell_p[\mathbf{1}, b^{(1)}, \dots, b^{(r)}]$ или $c_0[\mathbf{1}, b^{(1)}, \dots, b^{(r)}]$ соответственно, где $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$, $b^{(k)} = \left(a_i^{(k)}/a_i^{(0)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, $k = 1, 2, \dots, r$.

В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение $\ell_p\{A\}$ для семейств $\ell_p[\mathbf{1}, a^{(1)}, \dots, a^{(r)}]$, $1 \le p < \infty$, и $c_0[\mathbf{1}, a^{(1)}, \dots, a^{(r)}]$, $p = \infty$.

Характеристика пары абсолютно выпуклых множеств. Инварианты на классах семейств банаховых пространств основываются на следующей простой и хорошо известной характеристике пары абсолютно выпуклых множеств.

Пусть X — линейное пространство, U, V — произвольные абсолютно выпуклые множества в X. Рассмотрим следующую характеристику:

$$\beta(V, U) := \sup\{\dim L : U \cap L \subset V\}, \tag{3}$$

где L пробегает множество всех конечномерных подпространств пространства $X_V = \overline{\operatorname{span}} V$. Характеристика (3) связана с поперечниками по Бернштейну $b_n(V, U)$ [33] соотношением

$$\beta(V, U) = |\{n : b_n(V, U) \ge 1\}|.$$

Здесь и далее $|M|$ означает мощность множества M, если оно конечно, и $+\infty$, если бесконечно.

Непосредственно из определения характеристики (3) получаются следующие свойства:

$$\beta(V_1, U_1) \leq \beta(V, U), \quad \text{если } V_1 \subset V,\ U \subset U_1; \tag{4}$$

$$\beta(\alpha V, U) = \beta\left(V, \frac{1}{\alpha} U\right), \quad \alpha > 0. \tag{5}$$

Пусть $e = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — любой безусловный базис пространства ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, $a = (a_i)$ — произвольная последовательность положительных чисел. Символом $B_p^e(a) = B_p^e((a_i))$ обозначим весовой шар в пространстве ℓ_p, построенный по базису e, т. е.

$$B_p^e(a) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in \ell_p : \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$B_\infty^e(a) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in c_0,\ \xi_i a_i \to \infty : \max\{|\xi_i| a_i,\ i \in \mathbb{N}\} \leq 1 \right\}.$$

Следующее утверждение полезно при вычислении характеристики (3).

Предложение 1 (см., например, [13, 33]). *Пусть e — канонический базис пространства ℓ_p, $a = (a_i)$ и $b = (b_i)$ — произвольные последовательности положительных чисел. Тогда*

$$\beta\big(B_p^e(b), B_p^e(a)\big) = |\{i : b_i \leq a_i\}|.$$

Некоторые геометрические факты. При построении сложных инвариантов приходится рассматривать абсолютно выпуклые множества U и V, отличные от весовых ℓ_p-шаров, что не позволяет применять предложение 1 для вычисления характеристики $\beta(V, U)$. Но для получения оценок (как сверху, так и снизу) для $\beta(V, U)$ достаточно аппроксимировать множества U и V подходящими весовыми ℓ_p-шарами. Поэтому в дальнейшем будет полезен следующий простой геометрический факт.

Предложение 2 [19, предложение 3; 34, предложение 2.1]. *Пусть $a^{(j)} = \big(a_i^{(j)}\big)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, — последовательности положительных чисел, а $c = (c_i)$, $d = (d_i)$ — последовательности, определенные по формулам*

$$c_i = \max\big\{a_i^{(j)} : j = 1, 2, \ldots, r\big\}, \quad d_i = \min\big\{a_i^{(j)} : j = 1, 2, \ldots, r\big\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда справедливы следующие соотношения ($1 \leq p \leq \infty$):

$$B_p^e(c) \subset \bigcap_{j=1}^{r} B_p^e(a^{(j)}) \subset r^{\frac{1}{p}} B_p^e(c), \tag{6}$$

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{j=1}^{r} B_p^e(a^{(j)}) \right) \subset B_p^e(d) \subset r^{\frac{p-1}{p}} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{j=1}^{r} B_p^e(a^{(j)}) \right), \tag{7}$$

где $\operatorname{conv}(M)$ обозначает выпуклую оболочку множества M в $\ell_p(d)$, $1 \leq p < \infty$, или в $c_0(d)$, если $p = \infty$. Более того, константы в приведенных выше соотношениях наилучшие.

Пусть $e = \{e_i\}$ — безусловный базис в пространстве ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, и $A_\nu = B_p^e(a^{(\nu)})$, $\nu = 0, 1$.

Для пары A_ν, $\nu = 0, 1$, рассмотрим однопараметрическое семейство весовых шаров:

$$(A_0)^{1-\alpha}(A_1)^\alpha := B_p^e\Big(\big(\big(a_i^{(0)}\big)^{1-\alpha}\big(a_i^{(1)}\big)^\alpha\big)\Big), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Следующее утверждение представляет собой хорошо известный интерполяционный факт (см., например, [35–37]), записанный в геометрической форме.

Предложение 3. *Пусть $e = \{e_i\}$ и $f = \{f_i\}$ — два безусловных базиса в пространстве ℓ_p, $1 \le p \le \infty$, и $A_\nu = B_p^e(a^{(\nu)})$, $\widetilde{A}_\nu = B_p^f(\tilde{a}^{(\nu)})$, $\nu = 0, 1$. Тогда включения*

$$A_\nu \subset \widetilde{A}_\nu, \quad \nu = 0, 1,$$

влекут следующие включения

$$(A_0)^{1-\alpha}(A_1)^\alpha \subset (\widetilde{A}_0)^{1-\alpha}(\widetilde{A}_1)^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Обобщенная теорема Холла — Кёнига о различных представителях. Б. С. Митягиным [13, 16] (см. также [3]) выявлен комбинаторный характер проблемы квазиэквивалентности базисов: вопрос о существовании квазидиагонального изоморфизма сводится к теоретико-множественным построениям, использующим теорему Холла — Кёнига о различных представителях [38] и известную конструкцию Кантора — Бернштейна (см., например, [39, 40]).

Предложение 4 (Обобщенная теорема Холла — Кёнига о различных представителях [38, теорема 5.1.2]). *Пусть A и B — произвольные множества, $S : A \to B$ — многозначное отображение, относящее каждому элементу $x \in A$ конечное множество $S(x) \subset B$. Для того чтобы существовало инъективное отображение $s : A \to B$ такое, что $s(k) \in S(k)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного множества $L \subset A$ выполнялось неравенство*

$$\Big|\bigcup_{k\in L} S(k)\Big| \ge |L|. \tag{8}$$

Известно [38], что, вообще говоря, нельзя снять требование конечности множеств $S(k)$. Сформулируем одно простое следствие обобщенной теоремы Холла — Кёнига, позволяющее в специальных случаях избавляться от требования конечности образов.

Предложение 5. *Пусть*

$$N = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^r} N_k, \quad M = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^r} M_k$$

— дизъюнктные разбиения множеств N и M, удовлетворяющие условиям: для любого конечного множества $L \subset \mathbb{Z}^r$ справедливы неравенства

$$\Big|\bigcup_{k\in L} N_k\Big| \le \Big|\bigcup_{k\in L}\bigcup_{\delta\in\Delta} M_{k+\delta}\Big|, \quad \Big|\bigcup_{k\in L} M_k\Big| \le \Big|\bigcup_{k\in L}\bigcup_{\delta\in\Delta} N_{k+\delta}\Big|, \tag{9}$$

где

$$\Delta = \{\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) : \delta_j = 0, \pm 1;\ j = 1, 2, \dots, r\}. \tag{10}$$

Тогда существует биекция $\sigma : N \to M$ такая, что

$$\sigma(N_k) \subset \bigcup_{\delta\in\Delta} M_{k+\delta},\ k \in \mathbb{Z}^r.$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству леммы 10 из [16] и приведено в [34].

Инварианты на классах семейств. Для доказательства изоморфности двух семейств E и F обычно строится конкретный изоморфизм $T : E \to F$. Для решения вопроса о неизоморфности двух семейств приходится рассматривать инварианты. А именно, пусть $\mathscr{E}$ — класс семейств пространств, Γ — некоторое множество с отношением эквивалентности $\sim$. Отображение $\gamma : \mathscr{E} \to \Gamma$ называют *инвариантом,* если

$$E \simeq F \Rightarrow \gamma(E) \sim \gamma(F), \quad E, F \in \mathscr{E}.$$

Говорят, что инвариант γ является *полным на классе* $\mathscr{E}$, если к тому же

$$\gamma(E) \sim \gamma(F) \Rightarrow E \simeq F, \quad E, F \in \mathscr{E}.$$

2. Основные результаты

В этом пункте сформулированы основные результаты, доказательства которых будут приведены в следующих пунктах.

Для данного семейства $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(r)})$ последовательностей положительных чисел $a^{(j)} = \big(a_i^{(j)}\big)_{i\in\mathbb{N}}$, $j = 1, 2, \dots, r$, и любого $m \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$\mu_m^A(\tau, t) = \left|\bigcup_{k=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{r}\big\{i : \tau_j^{(k)} < a_i^{(j)} \le t_j^{(k)}\big\}\right|,$$

где

$$\tau = (\tau^{(k)})_{k=1}^m, \quad \tau^{(k)} = \big(\tau_j^{(k)}\big)_{j=1}^r, \quad t = (t^{(k)})_{k=1}^m, \quad t^{(k)} = \big(t_j^{(k)}\big)_{j=1}^r. \tag{11}$$

Эту функцию назовем *m-прямоугольной характеристикой* семейства A или соответствующего ℓ_p- или c_0-семейства (см. [41]).

Пусть $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(r)})$ и $B = (b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(r)})$ — произвольные семейства последовательностей положительных чисел, m — произвольное натуральное число. Назовем *функции* μ_m^A *и* μ_m^B *эквивалентными* (кратко будем писать $\mu_m^A \approx \mu_m^B$), если существует положительная постоянная α такая, что для любого набора параметров вида (11) выполняются следующие неравенства:

$$\mu_m^A(\tau, t) \le \mu_m^B\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t\right), \quad \mu_m^B(\tau, t) \le \mu_m^A\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t\right), \tag{12}$$

где

$$\frac{\tau}{\alpha} = \left(\frac{\tau^{(k)}}{\alpha}\right), \quad \frac{\tau^{(k)}}{\alpha} = \left(\frac{\tau_j^{(k)}}{\alpha}\right), \quad \alpha t = (\alpha t^{(k)}), \quad \alpha t^{(k)} = \big(\alpha t_j^{(k)}\big).$$

Будем говорить, что *системы функций* $\big(\mu_m^A\big)_{m\in\mathbb{N}}$ *и* $\big(\mu_m^B\big)_{m\in\mathbb{N}}$ *эквивалентны,* и кратко писать $\big(\mu_m^A\big) \approx \big(\mu_m^B\big)$, если постоянную α можно выбрать не зависящей от m.

Теперь сформулируем критерий квазидиагонального изоморфизма двух семейств.

Теорема 6. *Пусть* $E = \ell_p(A)$, $F = \ell_p\{B\}$, $A = \big(a^{(j)}\big)_{j=1}^r$, $B = \big(b^{(j)}\big)_{j=1}^r$, $1 \le p \le \infty$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $E \overset{\text{кд}}{\simeq} F$;

(ii) $(\mu_m^A) \approx (\mu_m^B)$.

Таким образом, на классах семейств $\ell_p\{A\}$, $1 \le p \le \infty$, система характеристик (μ_m^A) — полный инвариант относительно квазидиагональных изоморфизмов. В связи с этим возникает следующий вопрос.

Проблема. Пусть $E = \ell_p\{A\}$ и $F = \ell_p\{B\}$ — изоморфные семейства. Следует ли отсюда условие (ii) теоремы 6?

Для произвольного $p \in [1, \infty]$ эта проблема остается открытой. Следующее утверждение показывает, что характеристика μ_m^A инвариантна относительно изоморфизмов семейств при каждом фиксированном m.

Теорема 7. *Пусть $E = \ell_p\{A\}$, $F = \ell_p\{B\}$, $1 \le p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Если $E \simeq F$, то $\mu_m^A \approx \mu_m^B$.*

Для случая $p = 2$ этот факт доказан в [19] (другие доказательства см. в [17, 24]).

С использованием m-прямоугольных характеристик полностью решены обе проблемы для ℓ_1- и c_0-семейств. А именно, справедливо следующее утверждение (ср. [23]).

Теорема 8. *Пусть E, F, как в теореме 7, $p = 1$ или $p = \infty$. Тогда утверждение $E \simeq F$ эквивалентно каждому из утверждений* (i) *и* (ii) *теоремы* 6.

В качестве применения этого результата получаем квазиэквивалентность безусловных базисов в ℓ_1- и c_0-семействах.

Следствие 9. *В каждом семействе $\ell_p\{A\}$, $p = 1$ или $p = \infty$, все безусловные базисы попарно квазиэквивалентны.*

Это вытекает из теоремы 8 и следующего факта, при доказательстве которого используется соответствующий результат для банаховых пространств [1, предложение 2.b.9].

Предложение 10. *Пусть $\{f_i\}$ — безусловный базис семейства $E = \ell_p\{A\}$, $\{e_i\}$ — канонический базис семейства $F = \ell_p\{B\}$, где*

$$B = \left(\left(b_i^{(j)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)_{j=1}^{r}, \quad b_i^{(j)} = \frac{\|f_i\|_{\ell_p(a^{(j)})}}{\|f_i\|_{\ell_p}}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \tag{13}$$

$p = 1, 2$ или $p = \infty$. Тогда оператор $T : E \to F$, заданный формулой $Tf_i = e_i$, $i \in \mathbb{N}$, является изоморфизмом.

Вопрос о попарной квазиэквивалентности всех безусловных базисов в ℓ_2-семействах остается открытым.

3. Критерий существования квазидиагонального изоморфизма

В этом пункте мы докажем теорему 6. Сначала докажем, что (i) влечет (ii). Запись $E \overset{\text{кд}}{\simeq} F$ означает существование изоморфизма $T : E \to F$ такого, что

$$Te_i = \lambda_i f_{\sigma(i)}, \quad i \in \mathbb{N},$$

где $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ — канонические базисы семейств E и F соответственно. Следовательно, найдется постоянная $\alpha \ge 1$ такая, что

$$\frac{1}{\alpha} a_i^{(j)} \le |\lambda_i| b_{\sigma(i)}^{(j)} \le \alpha a_i^{(j)}, \quad i \in \mathbb{N},\ j = 0, 1, \dots, r. \tag{14}$$

При $j = 0$ неравенство (14) принимает вид

$$\frac{1}{\alpha} \le |\lambda_i| \le \alpha, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Значит, при $j = 1, 2, \dots, r$ справедлива оценка

$$\frac{1}{\alpha^2} a_i^{(j)} \le b_{\sigma(i)}^{(j)} \le \alpha^2 a_i^{(j)}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Поэтому выполняется включение

$$\left\{ i : \tau_j^{(k)} < b_{\sigma(i)}^{(j)} \le t_j^{(k)} \right\} \subset \left\{ i : \frac{\tau_j^{(k)}}{\alpha^2} < a_i^{(j)} \le \alpha^2 t_j^{(k)} \right\}$$

при любом наборе параметров. Следовательно, мы получили (ii).

Теперь докажем, что (ii) влечет (i). Пусть α — постоянная, с которой выполняются оценки (12). Для каждого $k = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$ определим два множества N_k и M_k следующим образом:

$$N_k = \bigcap_{j=1}^{r} \left\{ i : \ \alpha^{k_j} < a_i^{(j)} \le \alpha^{k_j + 1} \right\}, \quad M_k = \bigcap_{j=1}^{r} \left\{ i : \ \alpha^{k_j} < b_i^{(j)} \le \alpha^{k_j + 1} \right\}. \qquad (15)$$

Из (ii) следует, что дизъюнктные разбиения $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^r} N_k$ и $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^r} M_k$ удовлетворяют условиям (9) предложения 5. Следовательно, существует биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что если $i \in N_k$, то $\sigma(i) \in \bigcup\limits_{\delta \in \Delta} M_{k+\delta}$ для каждого $k \in \mathbb{Z}^r$, где Δ определено в (10). Таким образом,

$$\frac{1}{\alpha} b_{\sigma(i)}^{(j)} \le a_i^{(j)} \le \alpha b_{\sigma(i)}^{(j)}, \quad i \in \mathbb{N}, \ j = 1, 2, \dots, r.$$

Определим квазидиагональный (точнее переставляющий) изоморфизм $T : E \to F$ по правилу $Te_i = f_{\sigma(i)}$, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 6 доказана. Она может быть сформулирована в следующем виде.

Предложение 11. *Пусть $E = l_p\{A\}$ и $F = l_p\{B\}$ такие, как в теореме* 6. *Тогда утверждение* (ii) *теоремы* 6 *эквивалентно следующему утверждению:*

(iii) *существует положительная постоянная α такая, что для любого конечного множества $L \subset \mathbb{Z}^r$ выполняются неравенства* (9)*, где N_k, M_k и Δ определены в* (15) *и* (10).

4. Геометрические инварианты

Теперь докажем теорему 7. Ввиду симметрии достаточно доказать только первое из неравенств (12).

Пусть $T : F \to E$ — изоморфизм. Рассмотрим два безусловных базиса семейства E: канонический базис $e = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и T-образ $\tilde{e} = \{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ канонического базиса в F. Тогда каждый элемент $x \in \ell_p(a^{(j)})$ (для удобства будем писать $\ell_p(a^{(0)})$, где $a_i^{(0)} = 1$, $i \in \mathbb{N}$, вместо $\ell_p(\mathbf{1})$) имеет два базисных разложения:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \tilde{e}_i,$$

и норма

$$|x|_j := |x|_{\ell_p(b^{(j)})} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p \big(b_i^{(j)}\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

эквивалентна исходной норме

$$||x||_j := ||x||_{\ell_p(a^{(j)})} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \big(a_i^{(j)}\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

в пространстве $\ell_p(a^{(j)})$, $j = 0, 1, \dots, r$.

Пусть $B_p^e(a^{(j)})$ и $B_p^{\tilde{e}}(b^{(j)})$ — весовые шары в пространстве ℓ_p, связанные с базисами e и $\tilde{e}$ соответственно. Так как нормы $|\cdot|_j$ и $||\cdot||_j$ эквивалентны, найдется постоянная $C \geq 1$ такая, что

$$B_p^{\tilde{e}}(b^{(j)}) \subset C B_p^e(a^{(j)}), \quad B_p^e(a^{(j)}) \subset C B_p^{\tilde{e}}(b^{(j)}) \tag{16}$$

при всех $j = 0, 1, \dots, r$.

Возьмем произвольный набор параметров вида (11) и определим следующие весовые пространства, интерполяционные относительно ℓ_p-пространств семейства E: $\ell_p(u)$, $\ell_p(c^{(k,j)})$ и $\ell_p(d^{(k,j)})$, $j = 1, 2, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots, m$. Весовые последовательности $u = (u_i)$, $c^{(k,j)} = \big(c_i^{(k,j)}\big)$ и $d^{(k,j)} = \big(d_i^{(k,j)}\big)$ определим по формулам

$$u_i = \prod_{j=1}^{r} \big(a_i^{(j)}\big)^{\frac{1}{r+1}}, \quad c_i^{(k,j)} = \big(t_i^{(k)}\big)^{-\frac{1}{r+1}} \big(a_i^{(j)}\big)^{\frac{1}{r+1}} u_i,$$

$$d_i^{(k,j)} = \big(\tau_j^{(k)}\big)^{\frac{1}{r+1}} \big(a_i^{(j)}\big)^{-\frac{1}{r+1}} u_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства упомянутого выше неравенства используем характеристику $\beta(V, U)$, полагая

$$V = \operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{r} \big(B_p^e(c^{(k,j)}) \cap B_p^e(d^{(k,j)})\big)\right), \quad U = B_p^e(u).$$

Сначала аппроксимируем конструкцию V весовыми ℓ_p-шарами, применяя предложение 2. Для этого определим следующие последовательности:

$$w^{(k,j)} = \big(w_i^{(k,j)}\big), \quad j = 1, 2, \dots, r; \quad w = \big(w_i^{(k)}\big),\ k = 1, 2, \dots, m; \quad v = (v_i),$$

полагая

$$w_i^{(k,j)} = \max\big\{c_i^{(k,j)}, d_i^{(k,j)}\big\}, \quad w_i^{(k)} = \max\big\{w_i^{(k,j)},\ j = 1, 2, \dots, r\big\},$$

$$v_i = \min\big\{w_i^{(k)},\ k = 1, 2, \dots, m\big\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Пусть последовательности $\tilde{u}$, $\tilde{c}^{(k,j)}$, $\tilde{d}^{(k,j)}$, $\widetilde{w}^{(k,j)}$, $\widetilde{w}^{(k)}$, $\tilde{v}$ и множества $\widetilde{V}$ и $\widetilde{U}$ получаются из определенных выше путем замены последовательностей $a^{(j)}$ последовательностями $b^{(j)}$.

Применяя предложение 2, получаем

$$B_p^e(w^{(k,j)}) \subset B_p^e(c^{(k,j)}) \cap B_p^e(d^{(k,j)}); \tag{17}$$

$$B_p^{\tilde e}(\tilde c^{(k,j)}) \cap B_p^{\tilde e}(\tilde d^{(k,j)}) \subset 2^{\frac{1}{p}} B_p^{\tilde e}(\widetilde w^{(k,j)}); \tag{18}$$

$$B_p^e(w^{(k)}) \subset \bigcap_{j=1}^r B_p^e(w^{(k,j)}); \tag{19}$$

$$\bigcap_{j=1}^r B_p^{\tilde e}(\widetilde w^{(k,j)}) \subset r^{\frac{1}{p}} B_p^{\tilde e}(\widetilde w^{(k)}); \tag{20}$$

$$B_p^e(v) \subset m^{\frac{p-1}{p}} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^m B_p^e(w^{(k)})\right); \tag{21}$$

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^m B_p^{\tilde e}(\widetilde w^{(k)})\right) \subset B_p^{\tilde e}(\tilde v), \tag{22}$$

где, если необходимо, $j = 1, 2, \dots, r$; $k = 1, 2, \dots, m$.

Согласно (16) и предложению 3

$$B_p^e(d^{(k,j)}) \subset C B_p^{\tilde e}(\tilde d^{(k,j)}); \tag{23}$$

$$B_p^e(c^{(kj)}) \subset C B_p^{\tilde e}(\tilde c^{(k,j)}); \tag{24}$$

$$B_p^{\tilde e}(\tilde u) \subset C B_p^e(u), \tag{25}$$

где, если требуется, $j = 1, 2, \dots, r$; $k = 1, 2, \dots, m$.

Комбинируя (16)–(24), имеем

$$\begin{aligned}
B_p^e(v) &\subset m^{\frac{p-1}{p}} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^m B_p^e(w^{(k)})\right) \subset m^{\frac{p-1}{p}} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^m \bigcap_{j=1}^r B_p^e(w^{(k,j)})\right)\\
&\subset m^{\frac{p-1}{p}} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^m \bigcap_{j=1}^r \big(B_p^e(c^{(k,j)}) \cap B_p^e(d^{(k,j)})\big)\right)\\
&\subset C m^{\frac{p-1}{p}} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^m \bigcap_{j=1}^r \big(B_p^{\tilde e}(\tilde c^{(k,j)}) \cap B_p^{\tilde e}(\tilde d^{(k,j)})\big)\right)\\
&\subset C 2^{\frac{1}{p}} m^{\frac{p-1}{p}} \left(\operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^m \bigcap_{j=1}^r B_p^{\tilde e}(\widetilde w^{(k,j)})\right)\right)\\
&\subset C 2^{\frac{1}{p}} m^{\frac{p-1}{p}} r^{\frac{1}{p}} \left(\operatorname{conv}\left(\bigcup_{k=1}^m B_p^{\tilde e}(\widetilde w^{(k)})\right)\right) \subset C 2^{\frac{1}{p}} m^{\frac{p-1}{p}} r^{\frac{1}{p}} B_p^{\tilde e}(\tilde v).
\end{aligned}$$

Следовательно, принимая во внимание (25) и свойства (4), (5) характеристики (3), приходим к неравенству

$$\beta\big(B_p^e(v), B_p^e(u)\big) \le \beta\big(L B_p^{\tilde e}(\tilde v), B_p^{\tilde e}(\tilde u)\big), \tag{26}$$

где $L = C 2^{\frac{1}{p}} r^{\frac{1}{p}} m^{\frac{p-1}{p}}$.

Используя предложение 1, вычислим значения обеих частей неравенства (26). А именно, левую часть (26) можно преобразовать следующим образом:

$$\beta\bigl(B_p^e(v), B_p^e(u)\bigr) = |\{i : v_i \le u_i\}|$$
$$= \bigl|\bigl\{i : \min\bigl\{w_i^{(k)},\ k = 1, 2, \dots, m\bigr\} \le u_i\bigr\}\bigr| = \left|\bigcup_{k=1}^{m} \bigl\{i : w_i^{(k)} \le u_i\bigr\}\right|$$
$$= \left|\bigcup_{k=1}^{m} \bigl\{i : \max\bigl\{w_i^{(k,j)},\ j = 1, 2, \dots, r\bigr\} \le u_i\bigr\}\right|$$
$$= \left|\bigcup_{k=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{r} \bigl\{i : w_i^{(k,j)} \le u_i\bigr\}\right| = \left|\bigcup_{k=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{r} \bigl\{i : \max\bigl\{c_i^{(k,j)}, d_i^{(k,j)}\bigr\} \le u_i\bigr\}\right|$$
$$= \left|\bigcup_{k=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{r} \bigl\{i : \tau_j^{(k)} \le a_i^{(j)} \le t_j^{(k)}\bigr\}\right|. \qquad (27)$$

Аналогично

$$\beta\bigl(LB_p^{\tilde{e}}(\tilde{v}), B_p^{\tilde{e}}(\tilde{u})\bigr) = |\{i : \tilde{v}_i \le L\tilde{u}_i\}| = \left|\bigcup_{k=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{r} \left\{i : \frac{\tau_j^{(k)}}{L^{r+1}} \le b_i^{(j)} \le L^{r+1} t_j^{(k)}\right\}\right|. \qquad (28)$$

Возьмем произвольное число $\alpha > L^{r+1}$. Принимая во внимание определение функции μ_m^A и комбинируя (26), (27) и (28), получаем первое из неравенств (12).

5. О безусловных базисах в ℓ_1- и c_0-семействах

Сначала заметим, что в случае $p = 1$ рассмотрения предыдущего пункта дают оценки (12) с постоянной $\alpha = 2L^{r+1} = 2(C2^{1/p}, r^{1/p})^{r+1}$, не зависящей от m. Следовательно, по теореме 6 получаем утверждение теоремы 8 при $p = 1$.

Для доказательства теоремы 8 при $p = \infty$ (для c_0-семейств) можно (подобно тому, как Ж. Линденштраусс и Л. Циппин рассматривали в случае одного пространства [31, 32, 1], воспользоваться естественной двойственностью между семействами $c_0[a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(r)}]$ и $\ell_1[\tilde{a}^{(0)}, \tilde{a}^{(1)}, \dots, \tilde{a}^{(r)}]$, где

$$\tilde{a}^{(j)} = \left(\frac{a_i^{(r)}}{a_i^{(j)}}\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Вместо этого мы сделаем набросок непосредственного геометрического доказательства, двойственного разобранному выше: в случае c_0-семейств надо вычислять значение функции $\beta(V, U)$ с $V = B_\infty^e(u)$ и

$$U = \bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{j=1}^{r} \operatorname{conv}\bigl(B_\infty^e(\gamma^{(k,j)}) \cup B_\infty^e(\delta^{(k,j)})\bigr)\right),$$

где $u = (u_i)$ определяется, как в начале предыдущего пункта, а

$$\gamma^{(k,j)} = \bigl(u_i\bigl(\tau_j^{(k)}\bigr)^{-\frac{1}{r+1}}\bigl(a_i^{(j)}\bigr)^{\frac{1}{r+1}}\bigr)_{i\in\mathbb{N}}, \quad \delta^{(k,j)} = \bigl(u_i\bigl(t_j^{(k)}\bigr)^{\frac{1}{r+1}}\bigl(a_i^{(j)}\bigr)^{-\frac{1}{r+1}}\bigr)_{i\in\mathbb{N}}.$$

При $p = \infty$ включения в (6) превращаются в равенства. Поэтому после всех вычислений, аналогичных вычислениям предыдущего пункта, получим оценку (12) с константой α, не зависящей от m.

Теорема 8 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. I, II. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1977; 1979.
2. *Захарюта В. П.* Линейные топологические инварианты и изоморфизм пространств аналитических функций // Математический анализ и его приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. гос. ун-та, 1970. Т. 2. С. 3–13; 1971. Т. 3. С. 176–180.
3. *Захарюта В. П.* Об изоморфизме и квазиэквивалентности базисов для степенных пространств Кёте // Тр. седьмой зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. Дрогобыч, 1974. М.: ЦЭМИ, 1976. С. 101–126.
4. *Захарюта В. П.* Сложные поперечники и линейные топологические инварианты // Школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докл. Минск, 1978. С. 51–52.
5. *Захарюта В. П.* Изоморфная классификация степенных пространств Кёте. Ростов-на-Дону, 1979. 74 с. (Препринт/Ростовский гос. ун-т; № 37).
6. *Zahariuta V. P.* Linear topological invariants and their applications to isomorphic classification of generalized power spaces // Turkish J. Math. 1996. V. 20, N 2. P. 237–289.
7. *Pełczyński A.* On the approximation of S-spaces by finite-dimensional spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. 1957. V. 9, N 5. P. 879–881.
8. *Колмогоров А. Н.* О линейной размерности топологических векторных пространств // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 2. С. 239–241.
9. *Bessaga Cz., Pełczyński A., Rolewicz S.* Approximative dimension of linear topological spaces and some its applications. Warszawa, 1960. (Report of Conf. on Funct. Anal.).
10. *Bessaga Cz., Pełczyński A., Rolewicz S.* On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F-spaces // Bull. Acad. Pol. Sci. 1961. V. 9. P. 677–683.
11. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-Энтропия и ε-смкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 2. С. 3–86.
12. *Митягин Б. С.* Ядерные шкалы Рисса // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 2. С. 519–522.
13. *Митягин Б. С.* Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 4. С. 63–132.
14. *Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 2. С. 153–173.
15. *Mityagin B. S.* Sur l'equivalence des bases inconditionalles dans les echelles de Hilbert // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1969. V. 269. P. 426–428.
16. *Митягин Б. С.* Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia Math. 1971. V. 37, N 2. P. 111–137.
17. *Захарюта В. П., Чалов П. А.* О линейных топологических инвариантах на классе семейств гильбертовых пространств. 1986. 17 с. Деп. в ВИНИТИ N3862-В86.
18. *Чалов П. А.* Линейные топологические инварианты и квазиэквивалентность базисов в семействах гильбертовых пространств // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высшей школы. Естеств. науки. 1979. Вып. 1. С. 7–10.
19. *Чалов П. А.* Линейные топологические инварианты на классе семейств гильбертовых пространств. 1980. 28 с. Деп. в ВИНИТИ N4853-80.
20. *Chalov P. A., Terzioğlu T., Zahariuta V. P.* Compound invariants and mixed F-, DF-spaces. Marmara Research Center. 1996. 28 p. (Preprint / Ser. Pure Appl. Math.; 32).
21. *Chalov P. A., Terzioğlu T., Zahariuta V. P.* First type power Köthe spaces and m-rectangular invariants. Marmara Research Center. 1996. 22 p. (Preprint / Ser. Pure Appl. Math.; 33).
22. *Chalov P. A., Terzioğlu T., Zahariuta V. P.* First type power Köthe spaces and m-rectangular invariants // Linear topological spaces and complex analysis. METU-TÜBITAK. Ankara, 1997. T. 3. P. 30–44.
23. *Chalov P. A., Zahariuta V. P.* On uniqueness of unconditional basis in families of Banach spaces. Marmara Research Center. 1995. 12 p. (Preprint / Ser. Pure Appl. Math.; 26).
24. *Chalov P. A., Zahariuta V. P.* Invariants and the quasiequivalence property for families of Hilbert spaces // Functional Analysis: Proc. First Intern. Workshop held at Trier University. Germany, September 26 — October 1, 1994. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 81–93.
25. *Goncharov A. P., Terzioğlu T., Zahariuta V. P.* On isomorphic classification of spaces $s\widehat{\otimes}E'_\infty(a)$ // Linear topological spaces and complex analysis. METU-TÜBITAK. Ankara, 1994. V. 1. P. 14–24.
26. *Goncharov A. P., Terzioğlu T., Zahariuta V. P.* On topological structure of tensor products $E_\infty(a)\widehat{\otimes}E'_\infty(b)$: Dissertatione Math. Warszawa, 1996. T. CCCL.

27. *Goncharov A. P., Zahariuta V. P.* Linear topological invariants for tensor products of power F- and DF-spaces // Turkish J. Math. 1995. V. 19. P. 90–101.
28. *Гельфанд И. М.* Замечание к статье Н. К. Бари «Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве» // Уч. зап. Моск. ун-та. Сер. мат. 1951. Т. 14, № 148. С. 224–225.
29. *Köthe G., Toeplitz O.* Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen // J. Reine Angew. Math. 1934. V. 171. P. 251–270.
30. *Lorch E. R.* Bicontinuous linear transformation in certain vector spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. V. 45, N 2. P. 564–569.
31. *Lindenstrauss J., Pe‿lczyński A.* Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications // Studia Math. 1968. V. 29. P. 275–326.
32. *Lindenstrauss J., Zippin M.* Banach spaces with a unique unconditional basis // J. Funct. Anal. 1969. V. 3. P. 115–125.
33. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
34. *Чалов П. А.* О квазиэквивалентности базисов в системах гильбертовых пространств: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1981.
35. *Bergh J., Löfsröm J.* Interpolation spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1976.
36. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
37. *Peetre J.* On interpolation functions // Acta Sci. Math. 1966. T. 27. P. 167–171; 1968. T. 29. P. 91–92; 1969. T. 30. P. 235–239.
38. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1978.
39. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматгиз, 1961.
40. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
41. *Aytuna A., Djakov P. B., Goncharov A. P. Terzioğlu T., Zahariuta V. P.* Some open problems in the theory of locally convex spaces // Linear topological spaces and complex analysis. METU-TÜBITAK. Ankara, 1994. V. 1. P. 147–165.

Статья поступила 5 мая 1999 г.,
окончательный вариант — 25 октября 1999 г.

Захарюта Виктор Павлович
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
METU, Ankara, Turkey
zaha@metu.math.edu.tr

Чалов Пётр Афанасьевич
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
chalov@math.rsu.ru