Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 512.542

ГРУППЫ ФРОБЕНИУСА, ПОРОЖДЕННЫЕ ДВУМЯ ЭЛЕМЕНТАМИ ПОРЯДКА 3

А. Х. Журтов

Аннотация: Дано полное описание групп Фробениуса, порожденных двумя элементами порядка 3. Библиогр. 6.

Введение

Согласно В. П. Шункову [1] группа G называется *группой Фробениуса с ядром F и дополнением H*, если

(a) F — нетривиальная собственная нормальная подгруппа группы G, $G = FH$ и $F \cap H = 1$;

(b) $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$;

(c) $F \setminus \{1\} = \bigcap\limits_{g \in G \setminus H} (G \setminus H^g)$.

Группы Фробениуса играют важную роль не только в теории конечных групп, но и в теории групп с условиями конечности, которая развивается Шунковым и его учениками (см., например, монографии [2–4]). Особую важность в этой теории представляют группы Фробениуса, порожденные парой элементов простого порядка.

Цель настоящей работы — дать исчерпывающее описание групп Фробениуса, которые можно породить двумя элементами порядка 3.

Теорема. *Пусть G — группа Фробениуса, порожденная двумя элементами x, z порядка 3. Тогда ядро F группы G — конечная абелева группа, существует такое дополнение H в G, что $x \in H$, $z = vy$ для некоторого элемента y из H порядка 3 и элемента $v \in F$, и с точностью до замены x на x^{-1} верно одно из следующих утверждений.*

1. Элементы x, y совпадают, $H = \langle x \rangle$, F порождается элементами $v_1 = v, v_2$, для которых $v_1^x = v_2$, $v_2^x = v_1^{-1} v_2^{-1}$, и порядок v взаимно прост с 3.

2. $H = \langle x, y \rangle \simeq SL_2(3)$, F порождается элементами $v_1 = v, v_i$, $i = 2, 3, 4$, действие x, y на F при сопряжении описывается следующими равенствами (мы используем аддитивные обозначения):

$$v_1 x = v_2, \quad v_2 x = -v_1 - v_2, \quad v_3 x = v_4, \quad v_4 x = -v_3 - v_4;$$

$$v_1 y = -v_1 + v_4, \quad v_2 y = v_3, \quad v_3 y = -v_2 - v_3, \quad v_4 y = -v_1,$$

и порядок v взаимно прост с 6.

3. $H = \langle x, y \rangle \simeq SL_2(5)$, F порождается элементами $v_1 = v, v_i$, $i = 2, 3, \dots, 8$, действие x, y на F при сопряжении описывается следующими равенствами:

$$v_1 x = v_2, \quad v_2 x = -v_1 - v_2, \quad v_3 x = v_4, \quad v_4 x = -v_3 - v_4,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00550).

$$v_5x = v_6, \quad v_6x = -v_5 - v_6, \quad v_7x = v_8, \quad v_8x = -v_7 - v_8;$$

$$v_1y = -v_1 - v_2 - v_4 - v_6 - v_8, \quad v_2y = -v_3, \quad v_3y = v_2 - v_3, \quad v_4y = -v_5,$$

$$v_5y = v_4 - v_5, \quad v_6y = -v_7, v_7y = v_6 - v_7, \quad v_8y = v_1 + v_3 + v_5 + v_7,$$

и порядок v взаимно прост с 30.

Обратно, пусть группа H, порожденная элементами x, y, действует точно на конечной нетривиальной группе F так, что выполнено одно из условий 1–3. *Тогда естественное полупрямое произведение $G = FH$ является группой Фробениуса, порожденной двумя элементами порядка* 3, *и верно одно из следующих утверждений:*

(a) $\langle x\rangle = \langle y\rangle$;

(b) *отображение*

$$x \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(3), \quad y \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(3)$$

продолжается до изоморфизма H на $SL_2(3)$;

(c) *отображение*

$$x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(5), \quad y \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in SL_2(5)$$

продолжается до изоморфизма H на $SL_2(5)$.

Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть элементы a, b порядка* 3 *порождают знакопеременную группу A_5. Тогда порядок ab и ab^{-1} равен пяти, порядок $[a, b]$ — трем и порядок $abab^{-1}$ — двум.*

Доказательство. Пусть $a = (\alpha\beta\gamma)$, $b = (\kappa\lambda\mu)$. Тогда $\{\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, поэтому $|\{\alpha, \beta, \gamma\} \cap \{\kappa, \lambda, \mu\}| = 1$ и, не нарушая общности, можно считать, что $a = (123)$, $b = (345)$. Теперь заключение можно проверить непосредственными вычислениями. Лемма доказана.

Лемма 2. 1. *Пусть $H_0 = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^5 = (xy^{-1})^5 = [x, y]^3 = (xyxy^{-1})^2 = 1\rangle$, $H = \langle x, y, r_1, r_2, r_3, r_4 \mid x^3 = y^3 = r_i^2 = [r_i, x] = [r_i, y] = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, $(xy)^5 = r_1$, $(xy^{-1})^5 = r_2$, $[x, y]^3 = r_3$, $(xyxy^{-1})^2 = r_4\rangle$.*

Тогда H_0 изоморфна A_5, H изоморфна $SL_2(5)$ и $H_i = H/\langle r_i\rangle$ изоморфна A_5 для любого $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Кроме того, отображение

$$x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(5), \quad y \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in SL_2(5)$$

продолжается до изоморфизма H на $SL_2(5)$.

2. *Пусть $L = \langle x, y, r \mid x^3 = y^3 = r^2 = [r, x] = [r, y] = 1,\ (xy)^2 = r\rangle$. Тогда $L \simeq SL_2(3)$ и отображение*

$$x \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(3), \quad y \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(3)$$

продолжается до изоморфизма L на $SL_2(3)$.

Доказательство. 1. С помощью алгоритма перечисления смежных классов (см. [5]) легко вычислить, что порядок H равен 120, а порядок H_i равен 60 для любого $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Все соотношения группы H_0 выполнены в A_5 для $x = (123)$, $y = (345)$, и $\langle (123), (345)\rangle = A_5$. Поэтому $H_0 \simeq A_5$. Поскольку

H_0 — гомоморфный образ любой из групп $H_i, i = 1, 2, 3, 4$, все эти группы также изоморфны A_5. Наконец, порядок $SL_2(5)$ равен 120, и в ней выполнены все соотношения группы H для $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Тем самым отображение

$$x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(3), \quad y \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in SL_2(3)$$

продолжается до изоморфизма H на $SL_2(5)$.

Аналогично доказывается и п. 2. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть элементы a, b порядка 3 порождают группу $SL_2(5)$. Тогда порядок ab и ab^{-1} равен десяти, порядок $[a, b]$ — шести, порядок $abab^{-1}$ — четырем.*

Доказательство. Пусть $t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — единственная инволюция в $SL_2(5)$. Тогда $SL_2(5)/\langle t\rangle \simeq A_5$. По лемме 2 $(xy)^5, (xy^{-1})^5, [x, y]^3, (xyxy^{-1})^2 \in \langle t\rangle$ и ни один из этих элементов не равен 1. Лемма доказана.

Лемма 4. 1. *Пусть*

$$x = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ -1 & -1 & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . \\ . & -1 & -1 & . \\ -1 & . & . & . \end{pmatrix} \in SL_4(\mathbb{Z}).$$

Тогда $H = \langle x, y\rangle \simeq SL_2(3)$, матрица $z - I$ невырожденна для любого нетривиального элемента $z \in H$, где $I \in SL_4(\mathbb{Z})$ — единичная матрица, и $(z - I)^{-1} \in GL_4(\mathbb{Z}[1/6])$. Если $V = \mathbb{Z}^4$ и $U = VH$ — естественное полупрямое произведение V на H, то для любого натурального числа $m > 1$, взаимно простого с 6, группа $U_m = U/mV$ является группой Фробениуса с ядром V/mV и дополнением, изоморфным H.

2. *Пусть*

$$x = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & -1 & -1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & -1 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} -1 & -1 & . & -1 & . & -1 & . & -1 \\ . & . & -1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 & -1 & . \\ 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . \end{pmatrix} \in SL_8(\mathbb{Z}).$$

Тогда $H = \langle x, y\rangle \simeq SL_2(5)$, матрица $z - I$ невырожденна для любого нетривиального элемента $z \in H$, где $I \in SL_8(\mathbb{Z})$ — единичная матрица, и $(z - I)^{-1} \in$

$GL_4(\mathbb{Z}[1/30])$. Если $V = \mathbb{Z}^8$ и $U = VH$ — естественное полупрямое произведение V на H, то для любого натурального числа $m > 1$, взаимно простого с 30, группа $U_m = U/mV$ является группой Фробениуса с ядром V/mV и дополнением, изоморфным H.

Доказательство. Заметим вначале, что если для матрицы $z \in SL_n(\mathbb{Z})$ и натуральных чисел r, m матрица $z^r - I$ невырожденна и $(z^r - I)^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z}[1/m])$, то $z - I$ невырожденна и $(z - I)^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z}[1/m])$.

Действительно, $z^r - I = (z - I)(z^{r-1} + \dots + z + I)$, поэтому $z - 1$, $z^{r-1} + \dots + z + I$ невырожденны и $(z^r - I)^{-1} = (z - I)^{-1}(z^{r-1} + \dots + z + I)^{-1}$, т. е.

$$(z - I)^{-1} = (z^r - I)^{-1}(z^{r-1} + \dots + z + I) \in GL_n(\mathbb{Z}[1/m]).$$

Непосредственными вычислениями можно проверить, что $x^3 = y^3 = I$. В случае 1 $(xy)^2 = -I$, тем самым из п. 2 леммы 2 вытекает, что $H \simeq SL_2(3)$. Для $z = -I$ имеет место равенство $(z - I)^{-1} = -1/2I$. Для $z = x$ будет $z^2 = -z - I$, следовательно, $(z - I)^{-1} = -1/3(z + 2I)$. Поскольку для любого нетривиального элемента из H его некоторая степень сопряжена с x или $-I$, заключение относительно H в этом случае следует из замечания в начале доказательства. Это заключение показывает, что H точно действует на V/mV как группа регулярных автоморфизмов, поэтому U_m является группой Фробениуса с ядром V/mV и дополнением, изоморфным H.

Рассмотрим случай 2. Можно проверить непосредственно, что $(xy)^5 = (xy^{-1})^5 = [x, y]^3 = (xyxy^{-1})^2 = -I$. По п. 1 леммы 2.1 $H \simeq SL_2(5)$. Поэтому некоторая степень любого нетривиального элемента $z \in H$ сопряжена в H с $-I, x$ или $-xy$. Если $z = -xy$, то

$$(z - I)^{-1} = 1/5 \begin{pmatrix} 1 & . & -3 & . & -2 & . & -1 & . \\ 3 & 4 & 3 & 3 & . & 2 & -1 & 1 \\ 1 & . & 2 & . & -2 & . & -1 & . \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & . & 2 & . & 3 & . & -1 & . \\ -1 & -1 & . & -2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & . \\ -3 & -1 & -4 & -2 & -3 & -3 & . & 1 \end{pmatrix},$$

и доказательство леммы можно закончить, как в предыдущем абзаце.

Доказательство теоремы. Пусть G — группа Фробениуса, порожденная двумя элементами x, z порядка 3. По определению группы Фробениуса $G = FH$, где F — нормальная подгруппа, $H \cap F = 1$ и любой нетривиальный элемент из H индуцирует при сопряжении регулярный автоморфизм группы F. Поскольку каждый элемент в $G \setminus H$ сопряжен с некоторым элементом из H, можно считать, что $x \in H$. Пусть $z = vy$, где $v \in F$, $y \in H$. Очевидно, что $H = \langle x, y \rangle$, $F = \langle v^H \rangle$ и $y^3 = 1$.

По теореме 19 из [6] группа G конечна, F абелева и имеет место один из следующих случаев: $H = \langle x \rangle$, $H \simeq SL_2(3)$, $H \simeq SL_2(5)$.

Пусть $H = \langle x \rangle$. Тогда $F = \langle v, v^x, v^{x^2} \rangle$. Так как x действует регулярно на F, то $v^{x^2} v^x v = 1$ и утверждение 1 справедливо.

Пусть $H \simeq SL_2(3)$. Тогда H содержит в качестве нормальной 2-подгруппы индекса 3 группу кватернионов порядка 8. Поэтому с точностью до замены x на x^{-1} порядок xy равен четырем. Рассмотрим действие H на F, используя модульные обозначения. Поскольку H действует на F при сопряжении как группа регулярных автоморфизмов, $x^2 + x + 1 = 0$, $y^2 + y + 1 = 0$ и $(xy)^2 = -1$, откуда $xyx = -y^2 = y+1$, $y = xyx-1$. Пусть $v_1 = v$, $v_2 = v_1x$, $v_3 = v_2y$, $v_4 = v_3x$. Тогда $v_2x = v_1x^2 = -v_1 - v_1x = -v_1 - v_2$, $v_4x = -v_3 - v_4$, $v_1y = v_1(xyx-1) = v_4 - v_1$, $v_3y = v_1xy^2 = v_2y^2 = v_2(-y-1) = -v_2 - v_3$, $v_4y = v_1xyxy = -v_1$. Итак, группа $F_0 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ является H-инвариантной, и так как F_0 содержит v, то $F_0 = F$ и выполнено утверждение 2.

Пусть $H \simeq SL_2(5)$. Снова будем использовать модульные обозначения при рассмотрении действия H на F при сопряжении. Как и раньше, получаем

$$x^2 + x + 1 = 0, \quad y^2 + y + 1 = 0. \tag{1}$$

По лемме 3 порядок xy равен 10, поэтому $(xy)^5 = -1$ и $(-xy)^5 = 1$. Так как каждый нетривиальный элемент из H действует на F регулярно, то $(-xy)^4 + (-xy)^3 + (-xy)^2 + (-xy) + 1 = 0$, следовательно,

$$(xy)^4 = (xy)^3 - (xy)^2 + xy - 1 \tag{2}$$

и

$$y = -y^{-1} - 1 = (xy)^3x - (xy)^2x + xyx - x - 1. \tag{3}$$

Для $i = 1, 2, 3, 4$ положим $v_{2i-1} = v(-xy)^i$, $v_{2i} = v(-xy)^ix$. Используя (1)–(3), легко показать, что верно утверждение 3.

Теперь предположим, что группа H, порожденная двумя элементами x, y порядка 3 действует точно на конечной нетривиальной группе F, так что выполнено одно из условий 1–3. Пусть m — порядок v и G — естественное полупрямое произведение F на H.

Если выполнено условие 1, то, очевидно, G — группа Фробениуса, и верно (a). Если выполнено одно из условий 2 и 3, то G изоморфна фактор-группе одной из групп U_m леммы 4 по собственной подгруппе группы V/mV, поэтому из леммы 4 вытекает (a) или (b).

Нетрудно проверить, что $G = \langle x, z\rangle$, где $z = (v, y)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шунков В. П.* Об одном признаке непростоты групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 5. С. 576–603.
2. *Шунков В. П.* M_p-группы. М.: Наука, 1990.
3. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992.
4. *Шунков В. П.* T_0-группы. Новосибирск: Наука, 2000.
5. *Schönert M.* Groups, algorithms and programming. Lehrstuhl D für Mathematik. Aachen: RWTH, 1993.
6. *Mazurov V. D., Zhurtov A. Kh.* On periodic groups with prescribed orders of elements // Маломерная топология и комбинаторная теория групп: Сб. тр. междунар. конф. / Под ред. С. В. Матвеева. Челябинск, 31 июля — 7 авг. 1999. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2000. С. 244–260.

Статья поступила 12 января 2001 г.

Журтов Арчил Хазешович
Кабардино-Балкарский гос. университет, ул. Чернышевского, 132, Нальчик 360006
archil@ns.kbsu.ru