Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 512.556.5

О МАКСИМАЛЬНЫХ ЦЕПЯХ В РЕШЕТКЕ МОДУЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЙ

В. И. Арнаутов, К. М. Филиппов

Аннотация: Пусть (R, τ_R) — топологическое кольцо и ${}_RM$ — некоторый левый унитарный R-модуль. Известно, что множество $\mathscr{L}(M)$ всех (R, τ_R)-модульных топологий на ${}_RM$ образует полную модулярную решетку. Топологию $\tau \in \mathscr{L}(M)$ будем называть *n-предмаксимальной*, если в $\mathscr{L}(M)$ существует максимальная по включению цепь $\tau_0 > \tau_1 > \dots > \tau_n$ такая, что τ_0 — наибольший элемент в $\mathscr{L}(M)$ и $\tau_n = \tau$. В § 1 получены условия, каждое из которых обеспечивает либо наличие, либо отсутствие 1-предмаксимальных хаусдорфовых топологий на ${}_RM$; § 2 содержит описание всех n-предмаксимальных топологий в случае, когда (R, τ_R) — топологическое тело, топология которого определяется вещественной абсолютной величиной. Библиогр. 5.

Введение

Пусть (R, τ_R) — отделимое топологическое кольцо с единицей и ${}_RM$ — левый унитарный R-модуль. Настоящая статья посвящена изучению следующих вопросов.

Допускает ли ${}_RM$ (отделимую) n-предмаксимальную (см. 1.1, п. (7)) (R, τ_R)-модульную топологию для произвольного $n \in \mathbb{N}$, в частности, допускает ли он отделимую предмаксимальную (см. 1.1, п. (8)) (R, τ_R)-модульную топологию?

Как устроены n-предмаксимальные топологии на ${}_RM$, если они существуют?

Если ${}_RM$ допускает две (R, τ_R)-модульные отделимые топологии τ_0 и τ_1, причем $\tau_0 \neq \tau_1$ и τ_0 дискретна, то существование отделимых предмаксимальных топологий легко доказывается с помощью леммы Цорна. Кроме того, в § 1 указаны условия, при которых вопрос о существовании предмаксимальных топологий имеет положительное (см. теоремы 1.4 и 1.7) и отрицательное (см. теорему 1.12, частный случай которой доказан в [1]) решения.

В § 2 содержится описание строения n-предмаксимальных топологий для случая, когда кольцо R является телом, а топология τ_R определяется вещественной абсолютной величиной (см. теорему 2.8).

§ 1. Существование отделимых предмаксимальных топологий

1.1. Предварительные замечания и определения.

(1) Считается, что все кольца содержат единицу и что все модули унитарны.

(2) Обозначим через $\bigoplus\limits_{x \in X} {}_RM_x$ прямую сумму множества модулей $\{{}_RM_x \mid x \in X\}$; через $\pi_y : \bigoplus\limits_{x \in X} {}_RM_x \to {}_RM_y$ — естественную проекцию; через ρ_y :

${}_RM_y \to \bigoplus\limits_{x\in X} {}_RM_x$ — естественное вложение, т. е. $\pi_x(\rho_y)$ является тождественным отображением при $x = y$ и нулевым в противном случае.

(3) Выражение «окрестность нуля» заменим аббревиатурой о.н., а «базис окрестностей нуля» — аббревиатурой б.о.н.

(4) Зафиксируем отделимое топологическое кольцо (R, τ_R) с б.о.н. $\mathscr{B}_R$, его пополнение $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ и естественное вложение $i_R : (R, \tau_R) \to (\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$.

(5) Пусть ${}_RM$ — некоторый R-модуль. Через $\tau(M)$ будем обозначать сильнейшую (R, τ_R)-модульную топологию на ${}_RM$. Заметим, что топология $\tau(M)$ всегда существует.

(6) Дадим следующие определения.

Пусть τ_1, τ_2 — две (R, τ_R)-модульные топологии на R-модуле ${}_RM$. Будем говорить, что τ_1 *покрывает* τ_2, если $\tau_1 > \tau_2$ и не существует (R, τ_R)-модульной топологии τ такой, что $\tau_1 > \tau > \tau_2$;

Цепь (R, τ_R)-модульных топологий $\tau_0 > \tau_1 > \cdots > \tau_n$ на R-модуле ${}_RM$ называется *максимальной*, если τ_{i-1} покрывает τ_i для любого $1 \le i \le n$.

(R, τ_R)-модульная топология τ на R-модуле ${}_RM$ называется *n-предмаксимальной*, если существует максимальная цепь (R, τ_R)-модульных топологий такая, что $\tau(M) = \tau_0 > \tau_1 > \cdots > \tau_n = \tau$.

(7) Заметим, что в силу того, что решетка (R, τ_R)-модульных топологий на ${}_RM$ модулярна, число n в последнем определении не зависит от выбора максимальной цепи $\tau_0 > \tau_1 > \cdots > \tau_n$ (см. [2, гл. III, § 2, теорема 1]).

(8) Будем называть 1-предмаксимальные топологии *предмаксимальными*.

(9) Пусть S_1, S_2 — два множества и $f : S_1 \to S_2$ — отображение. Пусть τ_2 — некоторая топология на S_2. Существует слабейшая топология на S_1 такая, что отображение f непрерывно. Будем называть ее *прообразом топологии* τ_2 *по отображению* f и обозначать через $f^{-1}(\tau_2)$. Очевидно, что $f^{-1}(\tau_2) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \tau_2\}$.

Если S_1, S_2 являются R-модулями, f — модульным гомоморфизмом, а (S_2, τ_2) — топологическим (R, τ_R)-модулем, то топология $f^{-1}(\tau_2)$ (R, τ_R)-модульна.

Если τ_1 — некоторая топология на S_1, то существует сильнейшая топология на S_2 такая, что отображение f непрерывно. Будем называть ее *фактортопологией* топологии τ_1 по отображению f и обозначать через τ_1/f.

Если S_1, S_2 являются R-модулями, f — модульным сюръективным гомоморфизмом, а (S_1, τ_1) — топологическим (R, τ_R)-модулем, то топология τ_1/f (R, τ_R)-модульна и отображение $f : (S_1, \tau_1) \to (S_2, \tau_1/f)$ открыто.

1.2. Теорема. *Пусть (G, τ_G) — топологическая абелева группа с б.о.н. $\mathscr{B}_G$, X — некоторое непустое множество и $\{G_x \mid x \in X\}$ — множество изоморфных копий группы G. Пусть $F = \bigoplus\limits_{x\in X} G_x$ и $\tau_\oplus$ — финальная групповая топология на F относительно вложений $\rho_x : (G, \tau_G) \to F$, т. е. $\tau_\oplus$ является точной верхней границей множества всех групповых топологий τ на F таких, что отображение $\rho_y : (G, \tau_G) \to (F, \tau)$ непрерывно для каждого $y \in X$. Тогда множество $\mathscr{B} = \{W(\mathscr{F}) \mid \mathscr{F} : X \times \mathbb{N} \to \mathscr{B}_G\}$ является б.о.н. топологической группы $(F, \tau_\oplus)$, где $W(\mathscr{F})$ — множество всех элементов $v \in F$ таких, что v может быть представлен в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_{x_i}(r_i)$, где все x_i попарно различны и $r_i \in \mathscr{F}(x_i, i)$ для любого $1 \le i \le n$.*

Доказательство. В силу [3, следствие 4.22] множество $\mathscr{B}' = \{V(\mathscr{F}) \mid \mathscr{F} : X \times \mathbb{N} \to \mathscr{B}_G\}$ является б.о.н. в $(F, \tau_\oplus)$, где

$$V(\mathscr{F}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{x\in X} \rho_x(\mathscr{F}(x,i)) \Big) \right). \tag{1.2.1}$$

Проверим, что $\mathscr{B}$ — б.о.н. в $(F, \tau_\oplus)$. Очевидно, что базис фильтра $\mathscr{B}$ сильнее, чем $\mathscr{B}'$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно проверить обратное соотношение. В самом деле, пусть $\mathscr{F} : X \times \mathbb{N} \to \mathscr{B}_G$. Не ограничивая общности, предположим, что для каждого $(x,i) \in X \times \mathbb{N}$ выполнено включение $\mathscr{F}(x,i+1) + \mathscr{F}(x,i+1) \subseteq \mathscr{F}(x,i)$. Определим отображение $\mathscr{F}' : X \times \mathbb{N} \to \mathscr{B}_G$ так, что $\mathscr{F}'(x,i) = \mathscr{F}(x,i+1)$, и проверим, что $V(\mathscr{F}') \subseteq W(\mathscr{F})$.

Легко проверяется, что для любых $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ верно включение

$$\sum_{j=i}^{n} \mathscr{F}'(x,j) \subseteq \mathscr{F}(x,i). \tag{1.2.2}$$

Пусть теперь $v \in V(\mathscr{F}')$. Тогда v представи́м в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} \rho_{x_k}(r_k)$, где для любого $1 \leq k \leq n$ выполнено $r_k \in \mathscr{F}'(x_k, k)$ и элементы x_i, вообще говоря, могут не быть попарно различными.

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на множестве $\{1, \dots, n\}$ следующим образом: $i \sim j$ тогда и только тогда, когда $x_i = x_j$. Пусть $\{\{k_{i1}, \dots, k_{il_i}\} \mid 1 \leq i \leq m\}$ — множество всех классов эквивалентности по этому отношению.

Не ограничивая общности, считаем, что $k_{i1} < k_{i2} < \dots < k_{il_i}$ для любого $1 \leq i \leq m$. Считаем также, что $1 = k_{11} < k_{21} < \dots < k_{m1}$. Из последнего предположения следует, что для любого $1 \leq i \leq m$ верно неравенство $k_{i1} \geq i$, т. е. $\{k_{ij} \mid 1 \leq j \leq l_i\} \subseteq \{i, \dots, n\}$. Пользуясь последним включением и формулой (1.2.2), получаем, что для каждого i такого, что $1 \leq i \leq m$, выполнено включение

$$\sum_{j=1}^{l_i} \mathscr{F}'(x_i, k_{ij}) \subseteq \sum_{j=i}^{n} \mathscr{F}'(x_i, j) \subseteq \mathscr{F}(x_i, i). \tag{1.2.3}$$

Тогда

$$v = \sum_{k=1}^{n} \rho_{x_k}(r_k) = \sum_{i=1}^{m} \rho_{x_i} \left(\sum_{j=1}^{l_i} r_{k_{ij}} \right),$$

где $r_{k_{ij}} \in \mathscr{F}'(x_i, k_{ij})$. Тогда в силу (1.2.3)

$$v \in \sum_{i=1}^{m} \rho_{x_i} \left(\sum_{j=1}^{l_i} \mathscr{F}'(x_i, k_{ij}) \right) \subseteq \sum_{i=1}^{m} \rho_{x_i} \left(\sum_{j=i}^{n} \mathscr{F}'(x_i, j) \right) \subseteq \sum_{i=1}^{m} \rho_{x_i} \left(\mathscr{F}(x_i, i) \right),$$

что и требовалось.

1.3. Предложение. *Пусть M_1, M_2 — модули над R и τ — (R, τ_R)-модульная топология на M_2. Тогда топология тихоновского произведения топологических модулей $(M_1, \tau(M_1))$ и (M_2, τ) является:*

1) *сильнейшей (R, τ_R)-модульной топологией на $M_1 \oplus M_2$ тогда и только тогда, когда $\tau = \tau(M_2)$;*

2) *предмаксимальной тогда и только тогда, когда τ предмаксимальна.*

Доказательство предложения очевидно.

1.4. Теорема. *Пусть R — тело и τ_R — кольцевая топология на R такая, что пересечение любой счетной совокупности множеств, открытых в (R, τ_R), открыто в (R, τ_R), и такая, что (R, τ_R) является локально ограниченным слева топологическом кольцом (такое топологическое кольцо существует). Тогда бесконечномерное линейное пространство ${}_RM$ над R допускает предмаксимальную отделимую (R, τ_R)-модульную топологию.*

Доказательство. Не ограничивая общности, предполагаем, что (R, τ_R) — недискретное топологическое кольцо (см. введение). Пусть X — некоторый базис линейного пространства ${}_RM$. Отождествим ${}_RM$ с ${}_RM = \bigoplus\limits_{x \in X} {}_RR_x$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $|X| = \aleph_0$.

(a) Докажем, что $\tau(M)$ совпадает с кубиковой топологией τ_c, т. е. с топологией с б.о.н.

$$\{W_U \mid U \in \mathscr{B}_R\}, \text{ где } W_U = \{w \mid \pi_x(w) \in U \text{ для любого } x \in X\}.$$

Очевидно, что τ_c является (R, τ_R)-модульной топологией и, следовательно, $\tau_c \leq \tau(M)$.

Проверим обратное соотношение. В самом деле, пусть $\tau_\oplus$ — финальная групповая топология на ${}_RM$ относительно естественных вложений $\rho_x : (R, \tau_R) \to {}_RM$ (см 1.2). Из тождества $rx = \rho_x(r)$ и непрерывности алгебраических операций в $({}_RM, \tau(M))$ следует неравенство $\tau(M) \leq \tau_\oplus$. Для завершения доказательства п. (a) достаточно доказать, что $\tau_\oplus \leq \tau_c$.

Пусть W — о.н. в $({}_RM, \tau_\oplus)$. В силу теоремы 1.2 можно считать, что $W = W(\mathscr{F})$, где $\mathscr{F} : X \times \mathbb{N} \to \mathscr{B}_R$. Пусть $\mathscr{O} = \bigcap\limits_{x \in X} \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{F}(x, i)$. Из равенства $|X \times \mathbb{N}| = \aleph_0$ и условия теоремы следует, что множество $\mathscr{O}$ является о.н. в (R, τ_R). Легко видеть, что $W_{\mathscr{O}} \subseteq W(\mathscr{F})$. Это завершает доказательство п. (a).

(b) Зафиксируем ограниченную слева окрестность нуля $U_0 \in \mathscr{B}_R$. Докажем, что (R, τ_R)-модульная топология τ на ${}_RM$ равна $\tau(M)$ тогда и только тогда, когда W_{U_0} является о.н. в $({}_RM, \tau)$.

Необходимость этого условия очевидна.

Докажем его достаточность. Пусть W_{U_0} — о.н. в некоторой (R, τ_R)-модульной топологии τ на ${}_RM$. Так как R — тело, то для любого $r \in R$, $r \neq 0$, множество rU_0 — о.н. в (R, τ_R) и множество $r \cdot W_{U_0}$ — о.н. в $({}_RM, \tau)$. Поскольку (R, τ_R) недискретно и U_0 ограничено слева, для любого $U \in \mathscr{B}_R$ существует $r \neq 0$ такой, что $rU_0 \subseteq U$. Тогда для любого $U \in \mathscr{B}_R$ существует $r \neq 0$ такой, что $r \cdot W_{U_0} = W_{rU_0} \subseteq W_U$. Учитывая п. (a) настоящего доказательства, завершаем доказательство п. (b).

(c) Пусть теперь $\mathfrak{T}$ — множество всех отделимых (R, τ_R)-модульных топологий τ на M таких, что $\tau \neq \tau(M)$. Заметим, что $\mathfrak{T} \neq \varnothing$ благодаря тихоновской топологии на прямой сумме ${}_RM = \bigoplus\limits_{x \in X} {}_RR_x$ бесконечного множества топологических модулей $\{({}_RR_x, \tau_R) \mid x \in X\}$. В силу п. (b) настоящего доказательства $\mathfrak{T}$ является множеством всех отделимых (R, τ_R)-модульных топологий τ на ${}_RM$ таких, что W_{U_0} не о.н. в $({}_RM, \tau)$. Следовательно, $\mathfrak{T}$ — индуктивное множество. По лемме Цорна оно содержит максимальный элемент τ_1, который и является предмаксимальной топологией на ${}_RM$. Доказательство п. 1 завершено.

2. Чтобы доказать теорему для случая $|\, X \,| > \aleph_0$, достаточно взять подмножество $Y \subseteq X$ такое, что $|\, Y \,| = \aleph_0$, рассмотреть разложение

$${}_RM = \Big(\bigoplus_{y \in Y} {}_RR_y\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{z \in X \setminus Y} {}_RR_z\Big)$$

и воспользоваться предложением 1.3.

1.5. Лемма. *Пусть M_1, M_2 — R-модули и τ_0, τ_1 — (R,τ_R)-модульные топологии на $M = M_1 \oplus M_2$ такие, что $\tau_0 \geq \tau_1$. Если $\tau_0|_{M_1} = \tau_1|_{M_1}$ и $\tau_0/\pi_2 = \tau_1/\pi_2$, где $\pi_2 : M \to M_2$ — естественная проекция, то $\tau_0 = \tau_1$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}_i$ — б.о.н. в (M,τ_i), $i = 0, 1$. Докажем, что для любого $U \in \mathscr{B}_0$ существует $V \in \mathscr{B}_1$ такое, что $V \subseteq U$. Пусть $U_0 \in \mathscr{B}$ и $U_1 \in \mathscr{B}_0$ таково, что $U_1 + U_1 \subseteq U_0$. Заметим, что множество $\{U - V \mid U \in \mathscr{B}_0, V \in \mathscr{B}_1\}$ является б.о.н. в (M,τ_1). Тогда по условию леммы существуют $U_2 \in \mathscr{B}_0$ и $V \in \mathscr{B}_1$ такие, что $U_2 \subseteq U_1$, $(U_2 - V) \cap M_1 \subseteq U_1 \cap M_1$ и $\pi_2(V) \subseteq \pi_2(U_2)$.

Докажем, что $V \subseteq U_0$. В самом деле, пусть $m \in V$. Тогда существует $m' \in U_2$ такой, что $\pi_2(m) = \pi_2(m')$. Следовательно, $m - m' = \pi_1(m) - \pi_1(m') \in (U_2 - V) \cap M_1 \subseteq U_1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} m = \pi_1(m) + \pi_2(m) &= (\pi_1(m') + \pi_2(m')) + (\pi_1(m) - \pi_1(m')) \\ &= m' + (\pi_1(m) - \pi_1(m')) \in U_2 + U_1 \subseteq U_1 + U_1 \subseteq U_0. \end{aligned}$$

1.6. Следствие. *Пусть M_1, M_2 — модули над R, $M = M_1 \oplus M_2$. Если τ — (R,τ_R)-модульная топология на M такая, что $\tau|_{M_1} = \tau(M_1)$ и τ/π_2 — предмаксимальная (R,τ_R)-модульная топология на M_2, то τ — предмаксимальная (R,τ_R)-модульная топология.*

Доказательство. Пусть τ_0 — некоторая (R,τ_R)-модульная топология на M и $\tau_0 \geq \tau$. По условию следствия $\tau_0|_{M_1} = \tau(M_1)$ и $\tau_0/\pi_2 \geq \tau/\pi_2$. Если $\tau_0/\pi_2 = \tau/\pi_2$, то $\tau_0 = \tau$ по 1.5. Если $\tau_0/\pi_2 > \tau/\pi_2$, то $\tau_0/\pi_2 = \tau(M_2)$ в силу предмаксимальности τ/π_2. Тогда $\tau_0 = \tau(M)$ ввиду 1.3 и 1.5. Следовательно, τ — предмаксимальная топология.

1.7. Теорема. *Пусть R — тело и τ_R — топология на R такая, что (R,τ_R) — неполное топологическое кольцо и линейное пространство ${}_RR$ над R допускает некоторую, не обязательно отделимую предмаксимальную (R,τ_R)-модульную топологию τ_p. Тогда линейное пространство ${}_RM = {}_RR \oplus {}_RR$ над R допускает отделимую предмаксимальную (R,τ_R)-модульную топологию.*

Доказательство. Так как (R,τ_R) неполно, существует $\theta \in \widehat{R} \setminus R$. В силу того, что R — тело, линейное пространство ${}_RM$ можно отождествить с $R + R\cdot\theta \subseteq \widehat{R}$.

Пусть $\mathscr{B}_R$ (соответственно $\mathscr{B}_{\widehat{R}}$ и $\mathscr{B}_p$) — некоторый б.о.н. в (R,τ_R) (соответственно $(\widehat{R},\tau_{\widehat{R}})$ и (R,τ_p)). Легко видеть, что $\mathscr{B} = \bigl\{\widehat{V} \cap \pi_2^{-1}(U) \mid \widehat{V} \in \mathscr{B}_{\widehat{R}}, U \in \mathscr{B}_p\bigr\}$ является б.о.н. в некоторой отделимой (R,τ_R)-модульной топологии τ на M. Очевидно, что $\tau|_R = \tau_R = \tau(R)$.

Чтобы завершить доказательство, достаточно в силу следствия 1.6 проверить, что топология τ/π_2, где $\pi_2 : M \to R$ — естественная проекция, совпадает с τ_p.

В самом деле, пусть $\widehat{V} \in \mathscr{B}_{\widehat{R}}$ и $U \in \mathscr{B}_p$. Тогда $\pi_2\bigl(\widehat{V} \cap \pi_2^{-1}(U)\bigr) = \{r \in U \mid$ существует $t \in R$ такой, что $t + r\theta \in \widehat{V}\} = \{r \in U \mid R \cap (-r\theta + \widehat{V}) \neq \varnothing\}$. Так как R плотно в $(\widehat{R},\tau_{\widehat{R}})$, для любого $r \in R$ выполнено $R \cap (-r\theta + \widehat{V}) \neq \varnothing$. Тем самым $\pi_2\bigl(\widehat{V} \cap \pi_2^{-1}(U)\bigr) = U$, что завершает доказательство.

1.8. Следствие. *Пусть (R,τ_R) — неполное локально ограниченное слева топологическое кольцо такое, что R — тело. Тогда линейное пространство $M =$*

${}_RR \oplus {}_RR$ над R допускает отделимую предмаксимальную (R, τ_R)-модульную топологию.

Доказательство. В силу теоремы 1.7 достаточно построить некоторую, не обязательно отделимую, предмаксимальную (R, τ_R)-модульную топологию на линейном пространстве ${}_RR$.

Возьмем множество $X = \{x\}$ и отождествим линейное пространство ${}_RR$ с ${}_RR_x = \bigoplus\limits_{x \in X} {}_RR_x$. Рассмотрим множество $\mathfrak{T}$ всех (R, τ_R)-модульных, не обязательно отделимых топологий на ${}_RR$, отличных от τ_R. Благодаря антидискретной топологии $\mathfrak{T} \neq \varnothing$. Аналогично пп. (b) и (c) доказательства теоремы 1.4 доказываются индуктивность множества $\mathfrak{T}$ и существование в нем максимального элемента, т. е. предмаксимальной топологии.

1.9. Следствие. *Если ${}_RM = \bigoplus\limits_{x \in X} {}_RR_x$, где (R, τ_R) — топологическое кольцо, удовлетворяющее условию теоремы* 1.7 *и X — множество такое, что $|\ X\ | \geq 2$, то ${}_RM$ допускает отделимую предмаксимальную топологию.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $Y = X \setminus \{x_1, x_2\}$. Если ${}_RM_1 = \bigoplus\limits_{x \in Y} {}_RR_x$ и ${}_RM_2 = {}_RR \bigoplus {}_RR$, то по теореме 1.7 существует отделимая предмаксимальная топология на ${}_RM_2$. Применение леммы 1.3 завершает доказательство.

1.10. Предложение. *Пусть (R, τ_R) — топологическое кольцо и X — некоторое множество. Если ${}_RM = \bigoplus\limits_{x \in X} {}_RR_x$ и (R, τ_R) локально ограничено справа, то множество $\mathscr{B} = \{W(\mathscr{F}) \mid \mathscr{F} : X \times \mathbb{N} \to \mathscr{B}_R\}$ (см. теорему* 1.2) *является б.о.н. топологического модуля $({}_RM, \tau(M))$,*

Доказательство. В силу 1.2 достаточно проверить, что $\tau_\oplus = \tau(M)$.

Неравенство $\tau(M) \leq \tau_\oplus$ проверяется аналогично тому, как это делается в доказательстве теоремы 1.4.

В силу того, что $\tau_\oplus$ — групповая топология, для доказательства неравенства $\tau(M) \geq \tau_\oplus$ достаточно проверить, что $({}_RM, \tau_\oplus)$ является топологическим (R, τ_R)-модулем, т. е. проверить выполнение следующих свойств (см. [4, 1.2.6]):

BN $5'$) для любого $W \in \mathscr{B}$ существуют $U \in \mathscr{B}_R$ и $W' \in \mathscr{B}$ такие, что $U \cdot W' \subseteq W$;

BN $6'$) для любых $r \in R$ и $W \in \mathscr{B}$ существует $W' \in \mathscr{B}$ такой, что $r \cdot W' \subseteq W$;

BN $6''$) для любых $v \in {}_RM$ и $W \in \mathscr{B}$ существует $V \in \mathscr{B}_R$ такой, что $V \cdot v \subseteq W$.

В самом деле, чтобы проверить BN $5'$, достаточно положить $W = W(\mathscr{F})$, взять о.н. $V \in \mathscr{B}$, ограниченную справа, и $W' = W(\mathscr{F}')$, где $\mathscr{F}' : X \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такое, что $V \cdot \mathscr{F}'(x, i) \subseteq \mathscr{F}(x, i)$ для каждого $(x, i) \in X \times \mathbb{N}$.

Чтобы проверить BN $6'$, достаточно положить $W = W(\mathscr{F})$ и взять $W' = W(\mathscr{F}')$, где $r \cdot \mathscr{F}'(x, i) \subseteq \mathscr{F}(x, i)$ для каждого $(x, i) \in X \times \mathbb{N}$.

Чтобы проверить BN $6''$, достаточно предположить, что $v = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i$, и взять такое $V \in \mathscr{B}_R$, что $V \cdot r_i \subseteq \mathscr{F}(x_i, i)$ для любого $1 \leq i \leq n$.

1.11. Следствие. *Если топологическое кольцо (R, τ_R) в условии предложения* 1.10 *полно, то и топологический модуль $({}_RM, \tau(M))$ полон.*

Доказательство следствия легко вытекает из равенства $\tau_\oplus = \tau(M)$ (см. доказательство предложения 1.10) и теоремы 8.20 из [3].

1.12. Теорема. *Пусть (R,τ_R) — топологическое кольцо, причем R — тело; топология τ_R определяется вещественной абсолютной величиной $\|\cdot\|$; (R,τ_R) полно и недискретно. Если ${}_RM$ — линейное пространство над R, то оно не допускает отделимой предмаксимальной (R,τ_R)-модульной топологии.*

Доказательству предпошлем несколько замечаний.

(a) Так как τ_R недискретно, существует элемент $s\in R$ такой, что $0<\|s\|<1/2$. Если для $n\in\mathbb{N}$ мы обозначим через U_n множество $\{r\in R \mid \|r\|<\|s^n\|\}$, то очевидно, что $\{U_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ — б.о.н. в (R,τ_R).

(b) Зафиксируем базис X в линейном пространстве ${}_RM$ и отождествим ${}_RM$ с $\bigoplus\limits_{x\in X} {}_RR_x$.

(c) Пусть $f: X\to\mathbb{N}$ и $W(f)=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} r_ix_i \mid r_i\in U_{f(x_i)}\right\}$. Тогда очевидно, что $\{W(f)\mid f: X\to\mathbb{N}\}$ является б.о.н. в некоторой (R,τ_R)-модульной топологии τ_b на ${}_RM$, которая называется ящичной (см. [4, 4.1.24]).

(d) Пусть $F: X\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — отображение. Обозначим через $W(F)$ множество всех элементов $v\in {}_RM$, которые могут быть представлены в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} r_ix_i$, где все x_i попарно различны и $r_i\in U_{F(x_i,i)}$ для каждого $1\le i\le n$.

В силу 1.10 множество $\{W(F)\mid F: X\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}$ — б.о.н. в $({}_RM,\tau(M))$. Не ограничивая общности, считаем, что для каждого $(x,i)\in X\times\mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$F(x,i+1)>F(x,i). \tag{1.12.1}$$

(e) Если τ — некоторая (R,τ_R)-модульная топология на ${}_RM$, то существует б.о.н. $\mathscr{B}$ такой, что для любых $r\in R$, $\|r\|<1$, и $W\in\mathscr{B}$ выполнено

$$r\cdot W\subseteq W. \tag{1.12.2}$$

В самом деле, пусть $\mathscr{N}$ — некоторый б.о.н. в $({}_RM,\tau)$. Тогда для любого $W\in\mathscr{N}$ существуют $n\in\mathbb{N}$ и $W'\in\mathscr{N}$ такие, что $U_n\cdot W'\subseteq W$. Так как τ_R недискретно и R — тело, то $U_n\cdot W'$ является о.н. $({}_RM,\tau)$. Следовательно, $\mathscr{B}=\{U_n\cdot W \mid n\in\mathbb{N},\ W\in\mathscr{N}\}$ также б.о.н. в $({}_RM,\tau)$. Вложение $r\cdot U_n\subseteq U_n$ для любого $r\in R$, $\|r\|<1$, завершает доказательство п. (e).

Приступим к доказательству теоремы.

Предположим противное, т. е. что существует отделимая (R,τ_R)-модульная предмаксимальная топология τ на ${}_RM$. Зафиксируем некоторый б.о.н. $\mathscr{B}$ в $({}_RM,\tau)$.

1. Докажем сперва, что τ сильнее тихоновской топологии, т. е. что для любого $x\in X$ естественная проекция $\pi_x: ({}_RM,\tau)\to(R_x,\tau_R)$ непрерывна.

Предположим противное, т. е. существует $y\in X$ такой, что отображение $\pi_y: ({}_RM,\tau)\to(R_y,\tau_R)$ разрывно. Так как τ_R — сильнейшая (R,τ_R)-модульная топология на R_y, то $\tau/\pi_y<\tau_R$. Поскольку топология τ_R определяется вещественной абсолютной величиной, из доказательства теоремы 1.1.10 в [4] легко следует, что τ_R является минимальной отделимой (R,τ_R)-модульной топологией на R_y. Следовательно, τ/π_y неотделима, т. е. $\ker\pi_y$ незамкнуто в $({}_RM,\tau)$. Заметим, что $\ker\pi_y=\bigoplus\limits_{x\in X\setminus\{y\}} {}_RR_x$, и обозначим его через ${}_RM_1$.

Так как топологическое кольцо (R,τ_R) полно и локально ограничено, в силу следствия 1.11 топологическое линейное пространство $({}_RM_1,\tau(M_1))$ полно. Топология τ отделима, так что топологическое линейное пространство $({}_RM_1,\tau|_{M_1})$ неполно, иначе оно было бы замкнуто в $({}_RM,\tau)$. Следовательно, $\tau|_{M_1}<\tau(M_1)$.

Отождествим ${}_RM$ с ${}_RR \oplus {}_RM_1$ и снабдим его топологией $\tau^\times$ тихоновского произведения топологических модулей $({}_RR, \tau_R)$ и $({}_RM_1, \tau|_{M_1})$. Очевидно, что $\tau(M) > \tau^\times > \tau$, что противоречит предмаксимальности топологии τ.

2. Докажем теперь, что $\tau \geq \tau_b$ (см. п. (c) настоящего доказательства). Предположим противное, т. е. $\tau \not\geq \tau_b$. Тогда существует отображение $f : X \to \mathbb{N}$ такое, что $W \not\subseteq W(f)$ для любого $W \in \mathscr{B}$.

Легко проверить, что множество $\{s^i \cdot W(f) \mid i \in \mathbb{N}\}$ — б.о.н. в некоторой (R, τ_R)-модульной топологии τ_f на ${}_RM$. Так как $W(f)$ — о.н. в $({}_RM, \tau_f)$ и не является о.н. в $({}_RM, \tau)$, то $\tau \not\geq \tau_f$. Тогда в силу предмаксимальности τ

$$\sup\{\tau, \tau_f\} = \tau(M). \tag{1.12.3}$$

Пусть теперь

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i x_i \mid \sum_{i=1}^{m} \|s^{-f(x_i)}\| \, \|r_i\| < 1 \right\} \tag{1.12.4}$$

(определение элемента s см. в п. (a)).

Непосредственно проверяется, что $W(F) \subseteq V$, где отображение $F : X \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ определено по правилу $F(x, i) = f(x) + i$, т. е. V является о.н. в $({}_RM, \tau(M))$. В силу (1.12.3) существуют $W \in \mathscr{B}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$W \cap s^n \cdot W(f) \subseteq V. \tag{1.12.5}$$

Так как $\|s\| < 1/2$, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|s^i\| < 1. \tag{1.12.6}$$

Пусть теперь $W_1 \in \mathscr{B}$ таково, что $W_1 + W_1 \subseteq W$, и w_1 — произвольный элемент из $W_1 \setminus W(f)$. Определим по индукции множества $\{W_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{B}$ и $\{w_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq {}_RM$ так, что $W_i + W_i \subseteq W_{i-1}$ для любого $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$,

$$\text{для любого } x \in \bigcup_{j=1}^{i-1} \operatorname{supp} w_j \text{ выполняется } \pi_x(W_i) \subseteq s^{(i+2)} \cdot U_{f(x)} \tag{1.12.7}$$

(это возможно в силу п. 1 настоящего доказательства) и $w_i \in W_i \setminus W(f)$.

Для любого $i \in \mathbb{N}$ существует $y_i \in \operatorname{supp} w_i$ такой, что

$$\frac{\|\pi_{y_i}(w_i)\|}{\|s^{f(y_i)}\|} = \max\left\{ \frac{\|\pi_x(w_i)\|}{\|s^{f(x)}\|} \mid x \in \operatorname{supp} w_i \right\}.$$

В силу выбора элемента w_i справедливо неравенство

$$\frac{\|\pi_{y_i}(w_i)\|}{\|s^{f(y_i)}\|} \geq 1. \tag{1.12.8}$$

Заметим, что в силу (1.12.7) для всех $x \in \bigcup_{j=1}^{i-1} \operatorname{supp} w_j$ имеем

$$\|\pi_x(w_i)\| < \|s^{(i+2+f(x))}\| < \|s^{f(x)}\|. \tag{1.12.9}$$

Тогда согласно (1.12.8)

$$y_i \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} \operatorname{supp} w_j. \tag{1.12.10}$$

Для любого $i \in \mathbb{N}$ положим $w_i' = s^{(f(y_i)+1)} \cdot (\pi_{y_i}(w_i))^{-1} \cdot w_i$. Легко проверяется, что $\pi_{y_i}(w_i') = s^{(f(y_i)+1)}$ и

$$\frac{\|\pi_{y_i}(w_i')\|}{\|s^{f(y_i)}\|} = \max\left\{ \frac{\|\pi_x(w_i')\|}{\|s^{f(x)}\|} \mid x \in \operatorname{supp} w_i' \right\}. \tag{1.12.11}$$

Из (1.12.11) следует, что для любого $x \in \operatorname{supp} w_i$ верно

$$\frac{\|\pi_x(w_i')\|}{\|s^{f(x)}\|} \le \frac{\|\pi_{y_i}(w_i')\|}{\|s^{f(y_i)}\|} = \frac{\|s^{(f(y_i)+1)}\|}{\|s^{f(y_i)}\|} = \|s\| < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. $w_i' \in W(f)$.

Из (1.12.8) вытекает, что $\|(\pi_{y_i}(w_i)) \cdot (s^{f(y_i)})^{-1}\| \ge 1$. Тогда

$$\|(s^{f(y_i)}) \cdot (\pi_{y_i}(w_i))^{-1}\| = \|(\pi_{y_i}(w_i)) \cdot (s^{f(y_i)})^{-1}\|^{-1} \le 1$$

и тем самым $\|(s^{(f(y_i)+1)}) \cdot (\pi_{y_i}(w_i))^{-1}\| < 1$. В силу (1.12.2) $w_i' \in W_i$ (см. определение W_i, w_i и w_i').

Возьмем $t \in \mathbb{N}$ такое, что $t > 1/\|s^{(n+2)}\|$ (определение числа n см. в (1.12.5)), и обозначим $\sum\limits_{i=1}^{t} w_i'$ через a. Докажем, что $a \in W(f)$. В самом деле, пусть $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{t} \operatorname{supp} w_i'$. Проверим, что $\|\pi_x(a)\| < \|s^{f(x)}\|$. Пусть $x \in \operatorname{supp} w_k'$ и $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} \operatorname{supp} w_i'$ (полагаем $\bigcup\limits_{i=1}^{0} \operatorname{supp}\ w_i' = \varnothing$). Тогда

$$\|\pi_x(a)\| = \left\| \sum_{i=1}^{t} \pi_x(w_i') \right\| = \left\| \sum_{i=k}^{t} \pi_x(w_i') \right\| \le \|\pi_x(w_k)\| + \sum_{i=k+1}^{t} \|\pi_x(w_i')\|.$$

В силу (1.12.11)

$$\frac{\|\pi_x(w_k')\|}{\|s^{f(x)}\|} \le \frac{\|\pi_{y_k}(w_k')\|}{\|s^{f(y_k)}\|} = \frac{\|s^{(f(y_k)+1)}\|}{\|s^{f(y_k)}\|} = \|s\|,$$

т. е. $\|\pi_x(w_k')\| \le \|s^{(f(x)+1)}\|$. Заметим также, что в соответствии с (1.12.7) для любого i такого, что $k+1 \le i \le t$, выполняется $\|\pi_x(w_i')\| \le \|s^{(i+2)}\|\,\|s^{f(x)}\|$. Поэтому вследствие (1.12.6)

$$\begin{aligned}\|\pi_x(a)\| &\le \|s^{(f(x)+1)}\| + \sum_{i=k+1}^{t} \|s^{(i+2)}\|\,\|s^{f(x)}\| \\ &\le \|s^{(f(x)+1)}\| + \|s^{(f(x)+2)}\| \sum_{i=k+1}^{t} \|s^i\| \le \|s^{(f(x)+1)}\| + \|s^{(f(x)+2)}\| \\ &< 2\|s^{(f(x)+1)}\| < \|s^{-1}\|\,\|s^{(f(x)+1)}\| = \|s^{f(x)}\|,\end{aligned}$$

т. е. $a \in W(f)$.

Докажем теперь, что $s^n \cdot a \in V$. В самом деле,

$$a = \sum_{i=1}^{t} w_i' \in \sum_{i=1}^{t} W_i \subseteq W.$$

Следовательно, $a \in W$ и в силу (1.12.2) $s^n \cdot a \in W$. Из соотношений $s^n \cdot a \in s^n \cdot W(f)$ и (1.12.5) следует, что $s^n \cdot a \in V$. Тогда ввиду (1.12.10) $\pi_{y_k}(a) = \sum_{i=k}^{t} \pi_{y_k}(w_i')$ и, значит,

$$\|\pi_{y_k}(a)\| \geq \|\pi_{y_k}(w_k')\| - \sum_{i=k+1}^{t} \|\pi_{y_k}(w_i')\| \geq \|s^{(f(y_k)+1)}\| - \sum_{i=k+1}^{t} \|s^{(i+2)}\| \, \|s^{f(y_k)}\|$$
$$= \|s^{(f(y_k)+1)}\| \left(1 - \sum_{i=k+1}^{t} \|s^{(i+1)}\|\right) > \|s^{(f(y_k)+1)}\|(1 - \|s\|)$$
$$> \|s^{(f(y_k)+1)}\| \, \|s\| = \|s^{(f(y_k)+2)}\|.$$

Отсюда вытекает, что $y_k \in \operatorname{supp} s^n \cdot a$ и что $\|\pi_{y_k}(s^n \cdot a)\| \geq \|s^{(f(y_k)+n+2)}\|$ для любого $1 \leq k \leq t$.

Так как $s^n \cdot a \in V$, в силу (1.12.4)

$$1 > \sum_{x \in \operatorname{supp} a} \|s^{-f(x)}\| \, \|\pi_x(s^n \cdot a)\| \geq \sum_{k=1}^{t} \|s^{-f(y_k)}\| \, \|\pi_{y_k}(s^n \cdot a)\|$$
$$\geq \sum_{k=1}^{t} \|s^{-f(y_k)}\| \, \|s^{(f(y_k)+n+2)}\| \geq t\|s^{(n+2)}\| \geq 1.$$

Это противоречие завершает доказательство п. 2.

3. Поскольку $\tau(M) > \tau$, по предложению 1.10 существует отображение $F : X \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такое, что $W \not\subseteq W(F)$ для любого $W \in \mathscr{B}$.

Легко доказать, что множество $\{s^i \cdot W(F) \mid i \in \mathbb{N}\}$ является б.о.н. в некоторой (R, τ_R)-модульной топологии τ_F на ${}_RM$ и $\tau_F \not\leq \tau$. В силу предмаксимальности τ

$$\sup\{\tau, \tau_F\} = \tau(M). \tag{1.12.12}$$

Определим отображение $H : X \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: $H(x, i) = F(x, i) + i$. Ввиду (1.12.12) существуют $W \in \mathscr{B}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$W \cap s^n \cdot W(F) \subseteq W(H). \tag{1.12.13}$$

Согласно п. 2 настоящего доказательства мы требуем, не ограничивая общности, чтобы для любого $x \in X$ выполнялось включение $\pi_x(W) \subseteq U_{F(x,n)+n+1}$, т. е. для любого $w \in W$

$$\|\pi_x(w)\| < \|s^{(F(x,n)+n+1)}\|. \tag{1.12.14}$$

Пусть $w \in W \setminus W(F)$. Из равенства $\lim_{j\to\infty} s^j = 0$ и определения множества $W(F)$ следует, что $\{j \in \mathbb{N} \mid s^j \cdot w \in s^n \cdot W(F)\} \neq \varnothing$. Пусть

$$k = \min\{j \in \mathbb{N} \mid s^j \cdot w \in s^n \cdot W(F)\}.$$

Заметим, что $k > n$. В самом деле, предположим противное, т. е. что $k \leq n$. Тогда $n - k \geq 0$. По определению числа k верно соотношение $s^{(k-n)} \cdot w \in W(F)$. Поэтому по (1.12.2) $w = s^{(n-k)} \cdot s^{(k-n)} \cdot w \in W(F)$, что противоречит выбору w.

В силу (1.12.2) $s^k \cdot w \in W$. Тогда по (1.12.13) $s^k \cdot w \in W(H)$.

Пусть теперь $w = \sum_{i=1}^{t} r_i x_i$, где все x_i различны. Не ограничивая общности, считаем, что все слагаемые в этой сумме расположены в таком порядке, что (см. теорему 1.2) для любого $1 \leq i \leq t$

$$\|s^k \cdot r_i\| < \|s^{H(x_i,i)}\| = \|s^{(F(x_i,i)+i)}\|. \tag{1.12.15}$$

В силу выбора числа k выполнено $s^{k-1} \cdot w \notin s^n \cdot W(F)$. Тогда существует число j такое, что $1 \leq j \leq t$ и $s^{k-1} \cdot r_j \notin s^n \cdot U_{F(x_j,j)}$. Следовательно,

$$\|s^k \cdot r_j\| \geq \|s^{(F(x_j,j)+n+1)}\|. \tag{1.12.16}$$

Из неравенств (1.12.15) и (1.12.16) получаем, что

$$\|s^{F(x_j,j)+n+1}\| \leq \|s^k \cdot r_j\| < \|s^{(F(x_j,j)+j)}\|,$$

т. е. $n+1 > j$. Значит, $j \leq n$.

Так как $k > 1$, из неравенств (1.12.14) и (1.12.16) получаем, что

$$\|s^{(F(x_j,n)+n+1)}\| > \|r_j\| > \|s^k \cdot r_j\| \geq \|s^{F(x_j,j)+n+1}\|$$

и тем самым $F(x_j,n) < F(x_j,j)$. Это противоречит (1.12.1). Следовательно, топология τ не является предмаксимальной.

1.13. Следствие. *Если R — тело, τ_R — кольцевая топология на R, которая определяется некоторой вещественной абсолютной величиной, то линейное пространство ${}_RM$ над R допускает отделимую предмаксимальную топологию тогда и только тогда, когда либо $\dim_R M \geq 2$ и (R,τ_R) неполно, либо (R,τ_R) дискретно и ${}_RM$ бесконечно.*

Доказательство немедленно следует из следствия 1.9 и теоремы 1.12.

§ 2. n-Предмаксимальные топологии на линейном пространстве

2.1. Замечание. Зафиксируем непустое множество X; отделимое недискретное топологическое кольцо (R,τ_R), являющееся телом, топология которого определяется вещественной абсолютной величиной, и его пополнение $(\widehat{R},\tau_{\widehat{R}})$; естественное вложение $i_R : (R,\tau_R) \to (\widehat{R},\tau_{\widehat{R}})$ (заметим, что $(\widehat{R},\tau_{\widehat{R}})$ является телом с вещественной абсолютной величиной (см. [5, 13.10])); линейное пространство ${}_RM$ над R с базисом X, линейное пространство ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}$ над $\widehat{R}$ с базисом X и естественное вложение $i_M : {}_RM \to {}_{\widehat{R}}\widehat{M}$, где $i_M\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} i_R(r_i)x_i$.

Пусть τ — некоторая, не обязательно отделимая (R,τ_R)-модульная топология на ${}_RM$. Обозначим замыкание нулевого подпространства в $({}_RM,\tau)$ через $N(\tau)$; фактор-пространство линейного пространства M по подпространству $N(\tau)$ через $\dot{M}(\tau)$; естественный гомоморфизм с M на $\dot{M}(\tau)$ через ω_τ; топологию τ/ω_τ через $\dot{\tau}$; пополнение $(\dot{M}(\tau),\dot{\tau})$ через $(\overline{M}(\tau),\bar{\tau})$ (заметим, см. [4, 3.2.31], что $(\overline{M}(\tau),\bar{\tau})$ является топологическим линейным пространством над $(\widehat{R},\tau_{\widehat{R}})$); каноническое вложение $(\dot{M}(\tau),\dot{\tau})$ в $(\overline{M}(\tau),\bar{\tau})$ через i_τ; суперпозицию отображений $i_\tau\omega_\tau$ через μ_τ. Очевидно, что $\mu_\tau = i_\tau\omega_\tau : ({}_RM,\tau) \to ({}_{\widehat{R}}\overline{M}(\tau),\bar{\tau})$ — непрерывный гомоморфизм топологических линейных пространств над (R,τ_R). Линейную оболочку множества $\mu_\tau(M)$ в линейном пространстве ${}_{\widehat{R}}\overline{M}$ обозначим через $\widetilde{M}(\tau)$; топологию, индуцированную топологией $\bar{\tau}$ на $\widetilde{M}(\tau)$, — через $\tilde{\tau}$.

2.2. Предложение. *Если τ_1, τ_2 — некоторые (R,τ_R)-модульные топологии на ${}_RM$ и $\tau_1 \geq \tau_2$, то существует единственный непрерывный гомоморфизм $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{\tau_1,\tau_2} : ({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_1),\tilde{\tau}_1) \to ({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2),\tilde{\tau}_2)$ такой, что $\mu_{\tau_2} = \tilde{\sigma}\mu_{\tau_1}$.*

Доказательство. Существование. Пусть $N_i = N(\tau_i)$ (см. 2.1) для $i = 1,2$. Так как $\tau_1 \geq \tau_2$, то $N_1 \subseteq N_2$. Тогда существует единственный гомоморфизм

$\dot\sigma$, который замыкает левый квадрат коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
({}_RM,\tau_1) & \xrightarrow{\omega_{\tau_1}} & ({}_R\dot M(\tau_1),\dot\tau_1) & \xrightarrow{i_{\tau_1}} & ({}_{\widehat R}\overline{M}(\tau_1),\bar\tau_1) \\
{\scriptstyle id_M}\downarrow & & {\scriptstyle \dot\sigma}\downarrow & & {\scriptstyle \bar\sigma}\downarrow \\
({}_RM,\tau_2) & \xrightarrow{\omega_{\tau_2}} & ({}_R\dot M(\tau_2),\dot\tau_2) & \xrightarrow{i_{\tau_2}} & ({}_{\widehat R}\overline{M}(\tau_2),\bar\tau_2).
\end{array}$$

Заметим, что $\dot\sigma$ непрерывен. Поскольку $i_{\tau_1}(\dot M(\tau_1))$ плотно в $({}_{\widehat R}\overline{M}(\tau_1),\bar\tau_1)$ и $({}_{\widehat R}\overline{M}(\tau_2),\bar\tau_2)$ полно и отделимо, существует единственный непрерывный гомоморфизм $\bar\sigma$, замыкающий правый квадрат этой диаграммы. Таким образом, $\mu_{\tau_2}=\bar\sigma\mu_{\tau_1}$.

Из равенства $\bar\sigma\mu_{\tau_1}({}_RM)=\mu_{\tau_2}({}_RM)$ и определения линейных пространств $\widetilde M(\tau_i)$ для $i\in\{1,2\}$ следует, что $\bar\sigma(\widetilde M(\tau_1))\subseteq \widetilde M(\tau_2)$. Очевидно, что $\tilde\sigma=\bar\sigma|_{\widetilde M(\tau_1)}$ является искомым отображением.

Его единственность вытекает из единственности гомоморфизма $\bar\sigma$ и того, что $\widetilde M(\tau_1)$ плотен в $({}_{\widehat R}\overline{M}(\tau_1),\bar\tau_1)$.

2.3. Следствие. *Если $\tau_1>\tau_2>\tau_3$ — некоторые (R,τ_R)-модульные топологии на ${}_RM$, то $\tilde\sigma_{\tau_1,\tau_3}=\tilde\sigma_{\tau_2,\tau_3}\tilde\sigma_{\tau_1,\tau_2}$.*

Доказательство немедленно следует из 2.2.

2.4. Замечание. Пусть Z — некоторое множество, τ_0, τ_1, τ_2 — топологии на Z такие, что (Z,τ_i) — регулярное пространство для $i\in\{0,1,2\}$, причем $\tau_i\le\tau_0$ для $i\in\{1,2\}$. Если Y — некоторое плотное подмножество в (Z,τ_0), то $\tau_1=\tau_2$ тогда и только тогда, когда $\tau_1|_Y=\tau_2|_Y$.

Доказательство замечания очевидно.

2.5. Предложение. *Пусть τ — некоторая (R,τ_R)-модульная топология на ${}_RM$ и τ_1, τ_2 — две $(\widehat R,\tau_{\widehat R})$-модульные топологии на $\widetilde M(\tau)$. Тогда ${\mu_\tau}^{-1}(\tau_1)={\mu_\tau}^{-1}(\tau_2)$, если и только если $\tau_1=\tau_2$.*

Доказательство. Пусть i_M — естественное вложение, $i_M:{}_RM\to{}_{\widehat R}\widehat M$ (см. 2.1). Так как X — базис линейного пространства $\widehat M$, существует единственный $\widehat R$-модульный гомоморфизм $\nu:{}_{\widehat R}\widehat M\to{}_{\widehat R}\widetilde M(\tau)$ такой, что $\mu_\tau|_X=\nu i_M|_X$. Заметим, что поскольку множество $\mu_\tau(X)$ является базисом в линейном пространстве $\widetilde M(\tau)$, отображение ν сюръективно.

Докажем необходимость. Предположим противное, т. е. что ${\mu_\tau}^{-1}(\tau_1)={\mu_\tau}^{-1}(\tau_2)$ и $\tau_1\ne\tau_2$. Тогда $\nu^{-1}(\tau_1)\ne\nu^{-1}(\tau_2)$. Так как R является плотным подкольцом в $(\widehat R,\tau_{\widehat R})$, множество $i_M({}_RM)$ плотно в $({}_{\widehat R}\widehat M,\tau(\widehat M))$. В силу замечания 2.4 $i_M^{-1}\nu^{-1}(\tau_1)\ne i_M^{-1}\nu^{-1}(\tau_2)$. По определению отображения ν верно равенство $\mu_\tau=\nu i_M$. Тогда ${\mu_\tau}^{-1}(\tau_i)=i_M^{-1}\nu^{-1}(\tau_i)$ для $i\in\{1,2\}$. Следовательно, ${\mu_\tau}^{-1}(\tau_1)\ne{\mu_\tau}^{-1}(\tau_2)$, что противоречит условию предложения.

Достаточность очевидна.

2.6. Лемма. *Пусть $\tau_1>\tau_2$ — некоторые (R,τ_R)-модульные топологии на ${}_RM$ такие, что $\tilde\tau_1$ (см. 2.1) является сильнейшей $(\widehat R,\tau_{\widehat R})$-модульной топологией на $\widetilde M(\tau_1)$. Тогда τ_1 покрывает τ_2, если и только если выполняются следующие два условия:*

1) $\tilde\tau_2$ является сильнейшей $(\widehat R,\tau_{\widehat R})$-модульной топологией на $\widetilde M(\tau_2)$;

2) $\dim_{\widehat{R}} \ker \tilde{\sigma}_{\tau_1,\tau_2} = 1$.

Доказательство. Необходимость. Докажем сначала условие 1 леммы. Предположим противное: пусть τ_1 покрывает τ_2, но условие 1 не выполнено, т. е. $\tilde{\tau}_2$ не сильнейшая $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульная топология на $\widetilde{M}(\tau_2)$.

Обозначим $\tilde{\sigma}_{\tau_1,\tau_2}$ через $\tilde{\sigma}$. Так как $\tilde{\tau}_1$ по условию теоремы является сильнейшей $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульной топологией на $\widetilde{M}(\tau_1)$, то и $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}$ — сильнейшая $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульная на $\widetilde{M}(\tau_2)$, ибо операция взятия фактор-топологии сохраняет порядок на множестве топологий.

Заметим, что $\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) \le \tilde{\tau}_1$. Пользуясь равенством $\tilde{\sigma}\mu_{\tau_1} = \mu_{\tau_2}$, получаем, что $\mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) = \mu_{\tau_1}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) \le \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\tau}_1) = \tau_1$, т. е.

$$\mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) \le \tau_1. \tag{2.6.1}$$

Так как $\tilde{\tau}_2$ — отделимая $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульная топология, по теореме 1.12 она не является предмаксимальной. С учетом того, что $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}$ — сильнейшая $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульная топология на $\widetilde{M}(\tau_2)$, верно неравенство $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma} > \tau > \tilde{\tau}_2$ для некоторой $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульной топологии τ. В силу предложения 2.5

$$\mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) > \mu_{\tau_2}^{-1}(\tau) > \mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \tau_2. \tag{2.6.2}$$

Из неравенств (2.6.1) и (2.6.2) следует, что $\tau_1 > \mu_{\tau_2}^{-1}(\tau) > \tau_2$; противоречие. Таким образом, выполняется условие 1.

Предположим теперь, что не выполнено условие 2, т. е. $\dim_{\widehat{R}} \ker \tilde{\sigma} \ne 1$.

Предположим сначала, что $\dim_{\widehat{R}} \ker \tilde{\sigma} > 1$. Тогда существуют S — линейное пространство над $\widehat{R}$ — и сюръективные гомоморфизмы $\xi : \widetilde{M}(\tau_1) \to S$ и $\eta : S \to \widetilde{M}(\tau_2)$ такие, что $\tilde{\sigma} = \eta\xi$, причем $\dim_{\widehat{R}} \xi \ge 1$ и $\dim_{\widehat{R}} \eta \ge 1$. Следовательно, как ξ, так и η не являются инъективными. Отсюда

$$\tilde{\tau}_1 > \xi^{-1}(\tilde{\tau}_1/\xi) \tag{2.6.3}$$

и

$$\tilde{\tau}_1/\xi > \eta^{-1}((\tilde{\tau}_1/\xi)/\eta). \tag{2.6.4}$$

Так как $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}$ — сильнейшая $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульная топология на $\widetilde{M}(\tau_2)$, то $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma} = (\tilde{\tau}_1/\xi)/\eta \ge \tilde{\tau}_2$. Тогда из (2.6.4) следует, что $\tilde{\tau}_1/\xi > \eta^{-1}(\tilde{\tau}_2)$. Из (2.6.3) и последнего неравенства получаем, что $\tilde{\tau}_1 > \xi^{-1}(\tilde{\tau}_1/\xi) > \xi^{-1}(\eta^{-1}(\tilde{\tau}_2)) = \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_2)$. В силу последнего неравенства и леммы 2.5 $\tau_1 = \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\tau}_1) > \mu_{\tau_1}^{-1}(\xi^{-1}(\tilde{\tau}_1/\xi)) > \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_2)) = \mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \tau_2$; противоречие с предположением, что τ_1 покрывает τ_2.

Предположим теперь, что $\ker \tilde{\sigma} = \{0\}$. В силу того, что необходимость условия 1 теоремы уже доказана, $\tilde{\tau}_2$ является сильнейшей $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульной топологией на $\widetilde{M}(\tau_2)$. Тогда $\tilde{\tau}_2 = \tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}$. Таким образом, $\tilde{\sigma}$ является топологическим изоморфизмом и поэтому $\tau_1 = \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\tau}_1) = \mu_{\tau_1}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \tau_2$; противоречие с тем, что $\tau_1 > \tau_2$.

Достаточность. Предположим противное, т. е. что условия 1 и 2 выполнены, но τ_1 не покрывает τ_2. Тогда $\tau_1 > \tau > \tau_2$ для некоторой (R, τ_R)-модульной топологии τ на ${}_RM$. В силу следствия 2.3 $\tilde{\sigma}_{\tau,\tau_2}\tilde{\sigma}_{\tau_1,\tau} = \tilde{\sigma}_{\tau_1,\tau_2}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
({}_RM, \tau_1) \arrow[r, "id_M"] \arrow[d, "\mu_{\tau_1}"'] & ({}_RM, \tau) \arrow[r, "id_M"] \arrow[d, "\mu_{\tau}"'] & ({}_RM, \tau_2) \arrow[d, "\mu_{\tau_2}"'] \\
({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_1), \tilde{\tau}_1) \arrow[r, "\tilde{\sigma}_1"] & ({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau), \tilde{\tau}) \arrow[r, "\tilde{\sigma}_2"] & ({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2), \tilde{\tau}_2),
\end{tikzcd}$$

где $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_{\tau_1,\tau}$ и $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_{\tau,\tau_2}$. По условию 2 либо $\tilde{\sigma}_2$, либо $\tilde{\sigma}_1$ — изоморфизм линейных пространств.

Рассмотрим сначала случай, когда $\tilde{\sigma}_2$ является таковым. По условию 1 $\tilde{\tau}_2$ является сильнейшей $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульной топологией на $\widetilde{M}(\tau_2)$ и, следовательно, $\tilde{\tau}$ также сильнейшая на $\widetilde{M}(\tau)$. Тогда $\tilde{\sigma}_2$ является топологическим изоморфизмом и, значит, $\tau_2 = \mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \mu_\tau^{-1}\tilde{\sigma}_2^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \mu_\tau^{-1}(\tilde{\tau}) = \tau$.

Пусть теперь $\tilde{\sigma}_1$ — изоморфизм. Проверим, что $\tau_1 = \tau$.

В самом деле, отождествим $\ker\tilde{\sigma}_2$ с ${}_{\widehat{R}}\widehat{R}$, ${}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau)$ с ${}_{\widehat{R}}\widehat{R} \oplus {}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2)$ и $\tilde{\sigma}_2$ с естественной проекцией ${}_{\widehat{R}}\widehat{R} \oplus {}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2)$ на ${}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2)$. Поскольку отображение $\tilde{\sigma}_2 : ({}_{\widehat{R}}\widehat{R} \oplus {}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2), \tilde{\tau}) \to ({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2), \tilde{\tau}_2)$ непрерывно и $\tilde{\tau}_2$ является сильнейшей $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульной топологией на ${}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2)$, то выполняется равенство $\tilde{\tau}|_{M(\tau_2)} = \tilde{\tau}_2$ и, значит, в силу 1.11 ${}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2)$ — полное линейное подпространство в $({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau), \tilde{\tau})$. Так как топология $\tilde{\tau}$ отделима, ${}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2)$ замкнуто в $({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2), \tilde{\tau}_2)$.

Докажем теперь, что отображение $\pi : ({}_{\widehat{R}}\widehat{R} \oplus {}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2), \tilde{\tau}) \to ({}_{\widehat{R}}\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ непрерывно. В самом деле, ${}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2) = \ker\pi$ замкнуто в $({}_R M(\tau), \tilde{\tau})$, так что топология на ${}_{\widehat{R}}\widehat{R}$, которая является фактор-топологией топологии $\tilde{\tau}$ по π, отделима. Так как $\tau_{\widehat{R}}$ — минимальная отделимая $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульная топология на ${}_{\widehat{R}}\widehat{R}$ (см. доказательство теоремы 1.12, п. 1), то $\tilde{\tau}/\pi = \tau_{\widehat{R}}$. Тогда топология $\tilde{\tau}$ сильнее или равна топологии тихоновского произведения топологических линейных пространств $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ и $({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2), \tilde{\tau}_2)$ и, значит, отображение $\pi : ({}_{\widehat{R}}\widehat{R} \oplus {}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_2), \tilde{\tau}) \to ({}_{\widehat{R}}\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ непрерывно. В силу п. 1 из 1.3 $\tilde{\tau}$ является сильнейшей $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульной топологией на ${}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau)$. Следовательно, $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\sigma}_1^{-1}(\tilde{\tau})$ и $\tau_1 = \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\tau}_1) = \mu_{\tau_1}^{-1}\sigma_1^{-1}(\tilde{\tau}) = \mu_\tau^{-1}(\tilde{\tau}) = \tau$.

2.7. Лемма. *Пусть ${}_{\widehat{R}}N$ — подпространство линейного пространства ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}$, $\alpha_N : {}_{\widehat{R}}\widehat{M} \to {}_{\widehat{R}}\widehat{M}/N$ — естественное отображение, $\omega_N = \alpha_N|_{RM}$. Если $\hat{\tau}$ — сильнейшая $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульная топология на ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}$, $\hat{\tau}_N = \hat{\tau}/\alpha_N$, $\tau_N = \hat{\tau}_N|_{\omega_N({}_RM)}$ и $\tau = \omega_N^{-1}(\hat{\tau}_N)$, то существует топологический изоморфизм λ, замыкающий коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc}
({}_RM, \tau) & \xrightarrow{\mu_\tau} & ({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau), \tilde{\tau}) \\
{\scriptstyle id_M}\big\downarrow & & {\scriptstyle \lambda}\big\downarrow \\
({}_RM, \tau) & \xrightarrow{\omega_N} & ({}_{\widehat{R}}\widehat{M}/N, \hat{\tau}_N).
\end{array}$$

Доказательство. Обозначим $\hat{\tau}_N|_{\omega_N(M)}$ через τ_N. Очевидно, что

$$\tau/\omega_N = \big(\omega_N^{-1}(\hat{\tau}_N)\big)/\omega_N = \hat{\tau}_N|_{\omega_N(M)} = \tau_N. \tag{2.7.1}$$

Заметим, что $\hat{\tau}_N$ является сильнейшей $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$-модульной топологией на $\widehat{M}/N$, так что топологическое линейное пространство $(\widehat{M}/N, \hat{\tau}_N)$ отделимо (см. 1.2 и 1.10) и полно (см. 1.11). Так как оно отделимо, то $\bigcap\limits_{V \in \widehat{\mathscr{B}}_N} V = \{0\}$, где $\widehat{\mathscr{B}}_N$ — некоторый б.о.н. в $(\widehat{M}/N, \hat{\tau}_N)$. Тогда

$$[\{0\}]_{(M,\tau)} = \bigcap_{V \in \widehat{\mathscr{B}}_N} \omega_N^{-1}(V) = \omega_N^{-1}\Big(\bigcap_{V \in \widehat{\mathscr{B}}_N} V\Big) = \omega_N^{-1}\{0\}.$$

Следовательно,

$$\ker\omega_\tau = [\{0\}]_{(M,\tau)} = \ker\omega_N \tag{2.7.2}$$

(определение ω_τ см. в 2.1).

В силу (2.7.1) и (2.7.2) существует топологический изоморфизм $\varkappa$, замыкающий левый квадрат следующей коммутативной диаграммы (через i_N обозначено естественное вложение):

$$\begin{array}{ccccc}
({}_RM,\tau) & \xrightarrow{\omega_\tau} & ({}_R\dot{M}(\tau),\dot{\tau}) & \xrightarrow{i_\tau} & ({}_{\widehat{R}}\overline{M}(\tau),\bar{\tau}) \\
{\scriptstyle id_M}\downarrow & & {\scriptstyle\varkappa}\downarrow & & {\scriptstyle\lambda}\downarrow \\
({}_RM,\tau) & \xrightarrow{\omega_N} & (\omega_N(M),\tau_N) & \xrightarrow{i_N} & ({}_{\widehat{R}}\widehat{M}/N,\hat{\tau}_N).
\end{array}$$

Поскольку $(\widehat{M}/N,\hat{\tau}_N)$ полон и $i_N\omega_N(M)$ плотно в $(\widehat{M}/N,\hat{\tau}_N)$, существует топологический изоморфизм λ, замыкающий правый квадрат упомянутой диаграммы.

Заметим, что поскольку линейное пространство ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}/N$ является линейной оболочкой множества $i_N\omega_N(X)$, то и ${}_{\widehat{R}}\overline{M}$ — линейная оболочка множества $i_\tau\omega_\tau(X)$. Следовательно, $\overline{M}=\widetilde{M}$, что завершает доказательство.

2.8. Теорема. *Пусть ${}_RM$ и ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}$ — линейные пространства, введенные в 2.1. Зафиксируем некоторый б.о.н. $\widehat{\mathscr{B}}$ в сильнейшей $(\widehat{R},\tau_{\widehat{R}})$-модульной топологии $\hat{\tau}$ на ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}$. Отождествим ${}_RM$ с его образом в ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}$ относительно естественного вложения i_M. Тогда (R,τ_R)-модульная топология τ на ${}_RM$ n-предмаксимальна, если и только если существует n-мерное линейное подпространство ${}_{\widehat{R}}N\subseteq{}_{\widehat{R}}M$ такое, что множество $\{(N+W)\cap M|\,W\in\widehat{\mathscr{B}}\}$ является б.о.н. в топологическом линейном пространстве $({}_RM,\tau)$.*

Доказательство. Необходимость. Если τ является n-предмаксимальной топологией, то существует максимальная цепь (R,τ_R)-модульных топологий $\tau(M)=\tau_0>\tau_1>\dots>\tau_n=\tau$. Для каждого $i\in\{1,\dots,n\}$ рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
({}_RM,\tau_{i-1}) & \xrightarrow{id_M} & ({}_RM,\tau_i) \\
{\scriptstyle\mu_{\tau_{i-1}}}\downarrow & & {\scriptstyle\mu_{\tau_i}}\downarrow \\
({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_{i-1}),\tilde{\tau}_{i-1}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_i} & ({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_i),\tilde{\tau}_i),
\end{array}$$

где $\tilde{\sigma}_i=\tilde{\sigma}_{\tau_{i-1},\tau_i}$ (см 2.2).

Очевидно, что $({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_0),\tilde{\tau}_0)$ можно отождествить с $({}_{\widehat{R}}\widehat{M},\hat{\tau})$, а μ_{τ_0} — с i_M. Индукцией по i с использованием леммы 2.6 получаем, что $\tilde{\tau}_i$ является сильнейшей $(\widehat{R},\tau_{\widehat{R}})$-модульной топологией на $\widetilde{M}_{\tau_i}$, $\tilde{\sigma}_i$ — непрерывным и открытым гомоморфизмом топологических линейных пространств и $\dim_{\widehat{R}}\ker\tilde{\sigma}_i=1$. Из коммутативности вышеуказанной диаграммы следует, что $\tau=\tau_n=\mu_{\tau_n}^{-1}(\tilde{\tau}_n)=i_M^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_n)$, где $\tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}_n\tilde{\sigma}_{n-1}\dots\tilde{\sigma}_1$. Заметим, что $\dim_{\widehat{R}}\ker\tilde{\sigma}=n$. Так как отображение $\tilde{\sigma}$ непрерывно и открыто, то $\{(\ker\tilde{\sigma}+W)\cap M|W\in\widehat{\mathscr{B}}\}$ является б.о.н. в $({}_RM,\tau)$.

Достаточность. Пусть $\{(N+W)\cap M\mid W\in\widehat{\mathscr{B}}\}$ является б.о.н. в $({}_RM,\tau)$, где $\dim_{\widehat{R}}N=n$. Возьмем такие подпространства $N_0\subseteq N_1\subseteq\dots\subseteq N_n=N$ в линейном пространстве ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}$, что $\dim_{\widehat{R}} N_i = i$ для $1 \leq i \leq n$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} ({}_RM, \tau_{i-1}) & \xrightarrow{id_M} & ({}_RM, \tau_i) \\ {\scriptstyle\omega_{i-1}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\omega_i}\big\downarrow \\ ({}_{\widehat{R}}\widehat{M}/N_{i-1}, \hat{\tau}_{N_{i-1}}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_i} & ({}_{\widehat{R}}\widehat{M}/N_i, \hat{\tau}_{N_i}), \end{array}$$

где $\omega_i = \omega_{N_i}$, топологии $\hat{\tau}_{N_i}$ введены в лемме 2.7, $\tau_i = \omega_i^{-1}(\hat{\tau}_{N_i})$, и $\tilde{\sigma}_i : \widehat{M}/N_{i-1} \to \widehat{M}/N_i$ — естественные гомоморфизмы. В силу леммы 2.7 все гомоморфизмы $\omega_i : ({}_RM, \tau_i) \to ({}_{\widehat{R}}\widehat{M}/N_i, \hat{\tau}_{N_i})$ в вышеназванной диаграмме могут быть заменены гомоморфизмами $\mu_{\tau_i} : ({}_RM, \tau_i) \to ({}_{\widehat{R}}\widetilde{M}(\tau_i), \tilde{\tau}_i)$ для $0 \leq i \leq n$. Так как топологии $\hat{\tau}_{N_i}$ и отображения $\tilde{\sigma}_i$ удовлетворяют условиям 1 и 2 леммы 2.6, то τ_{i-1} покрывает τ_i для любого $1 \leq i \leq n$.

2.9. Следствие. *Пусть τ — n-предмаксимальная топология на ${}_RM$. Тогда существует такое конечномерное топологическое линейное пространство $({}_RM_1, \tau_1)$ над (R, τ_R), что $({}_RM, \tau)$ топологически изоморфно тихоновскому произведению топологических линейных пространств $({}_RM_1, \tau_1)$ и $({}_RM_2, \tau_2)$, где τ_1 является n-предмаксимальной на ${}_RM_1$ и τ_2 — сильнейшей (R, τ_R)-модульной топологией на ${}_RM_2$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.8 $({}_RM, \tau)$ допускает б.о.н. $\{(N + W(F)) \cap {}_RM \mid F : X \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ (см. доказательство теоремы 1.12, п. (d)) для некоторого n-мерного подпространства N в ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}$. Тогда N содержится в подпространстве ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}_1 \subseteq {}_{\widehat{R}}\widehat{M}$, являющемся линейной оболочкой некоторого конечного множества $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Обозначим через ${}_{\widehat{R}}\widehat{M}_2$ линейную оболочку множества $X \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда ${}_{\widehat{R}}\widehat{M} = {}_{\widehat{R}}\widehat{M}_1 \oplus {}_{\widehat{R}}\widehat{M}_2$ и, следовательно, $(N + W(F)) \cap {}_{\widehat{R}}\widehat{M} = (N + (W(F) \cap {}_{\widehat{R}}\widehat{M}_1)) + (W(F) \cap {}_{\widehat{R}}\widehat{M}_2)$. Утверждение теоремы следует из последнего равенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнаутов В. И., Филиппов К. М.* О предмаксимальных топологиях на векторных пространствах // Bul. Acad. Ştiinţ. Republicii Moldova. Matematica. 1996. V. 1. P. 96–105.
2. *Скорняков Л. А.* Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
3. *Roelcke W., Dierolf S.* Uniform structures of topological groups and their quotients. New York: McGraw Hill inc, 1981.
4. *Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V.* Introduction to the theory of topological rings and modules. New York; Basel; Honh Kong: Marcel Dekker inc, 1996.
5. *Warner S.* Topological rings. Amsterdam; London; New York; Tokyo: North-Holland, 1993.

Статья поступила 13 мая 1998 г.

Арнаутов Владимир Иванович
Институт математики Академии наук республики Молдова
ул. Академией 5, Кишинев, MD-2028, Молдова
arnautov@math.md

Филиппов Кирилл Михайлович
Институт математики Академии наук республики Молдова
ул. Академией 5, Кишинев, MD-2028, Молдова
filippov@math.md