Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 519.21+(517.9+518.61):532+519.6

ЛОКАЛИЗАЦИЯ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ СПЕКТРА ДЛЯ ОПЕРАТОРА СТОКСА В СЛУЧАЙНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В. В. Юринский

Аннотация: Исследуется асимптотика главного собственного числа оператора Стокса для течения в случайной пористой среде, заполняющей большой куб в $\mathbb{R}^d$. Анализируется зависимость главного собственного числа от размера куба в предположении, что пористая микроструктура случайна и пространственно однородна. В двумерном случае удается доказать, что при надлежащей нормировке главное собственное число сходится по вероятности к детерминированному пределу. Для более высоких размерностей указан неслучайный интервал, который содержит нормализованное главное собственное число с вероятностью, произвольно близкой к единице. Библиогр. 12.

1. Введение

Основными результатами статьи являются теоремы 1.1, 1.2, сформулированные в п. 1.2. Эти теоремы показывают, что с вероятностью, произвольно близкой к единице, главное собственное число системы Стокса

$$\Delta U - \nabla p + f = 0, \quad \nabla \cdot U = 0 \tag{1.1}$$

в случайной подобласти большого куба с ребром r имеет порядок $O(\ln^{-2/d} r)$. Они указывают также детерминированный интервал, который с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, содержит эту случайную величину. Для удобства в вычислениях статьи используется величина, обратная к главному собственному числу — максимальное рэлеевское отношение (1.7). Основные обозначения введены в п. 1.1.

1.1. Предварительные сведения. Точка $x \in \mathbb{R}^d$ отождествляется ниже со столбцом ее координат $x^{(j)}$, $j = 1, \dots, d$, в фиксированном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^d$. Скалярное произведение и евклидова норма в $\mathbb{R}^d$ обозначаются через $x \cdot y = \sum_{j=1}^{d} x^{(j)} y^{(j)}$ и $|x| = \sqrt{x \cdot x}$.

Как обычно, характеристическая функция множества A обозначается через $1_A(x)$, множества, полученные сдвигами, изменением масштаба и т. д., — через

$$y + \alpha A = \{x : x = y + \alpha x', x' \in A\}, \quad y \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{R},$$

$$A + B = \{x : x = y' + y'',\ y' \in A,\ y'' \in B\}.$$

Например, $B = \{x : |x| < 1\}$ и $a + rB$ суть соответственно открытый единичный шар с центром в начале координат и открытый шар радиуса r с центром в a. Используются обозначения $\overline{A}$ для замыкания A и A^0 — для внутренности этого множества. Обозначение $Q = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ неизменно подразумевает единичный полуинтервал $\mathbb{R}^d$, а $Q^0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$, $\overline{Q} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ — его внутренность и замыкание. Чтобы не загромождать формулы, обычно мы не будем делать различий в обозначениях между множеством A и его внутренностью A^0 в тех случаях, когда речь идет о множествах вида

$$A = \bigcup_{z \in I} H(z + Q).$$

Евклидово расстояние между множествами и точками или двумя множествами обозначается через

$$\operatorname{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} |x - y|, \quad \operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|.$$

Диаметр множества обозначим через $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x,y \in A} |x - y|$, лебегову меру измеримого множества $A \subseteq \mathbb{R}^d$ — через $\operatorname{mes}(A)$. В некоторых выкладках будет удобно использовать в $\mathbb{R}^d$ также норму и расстояние

$$|x - y|_+ = \max_i |x^{(i)} - y^{(i)}|, \quad \operatorname{dist}_+(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|_+.$$

Обозначение $\{u_{k'}\} \prec \{u_k\}$ указывает, что первая последовательность является подпоследовательностью второй.

Частные производные по пространственным переменным $x^{(j)}$ обозначаются через $\nabla_j \phi = \partial\phi / \partial x^{(j)}$, а градиент скалярной функции — через $\nabla\phi(x) = (\nabla_j \phi(x))$. Для векторнозначных функций $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ дивергенция обозначается через

$$\nabla \cdot u = \sum_{j=1}^{d} \nabla_j u^{(j)},$$

а $d \times d$-мерная матрица Якоби — через $\nabla \otimes u = (\nabla_j u^{(k)})$. Как обычно,

$$|\nabla\phi(x)|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\nabla_j \phi(x))^2, \quad |\nabla \otimes u(x)|^2 = \sum_{j,k=1}^{d} (\nabla_j u^{(k)}(x))^2. \tag{1.2}$$

Если это не влечет неясности, обозначения интегралов сокращаются:

$$\int_G \phi = \int_G \phi(x)\, dx, \quad \int \phi = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, dx \quad \text{и т. п.}$$

Обозначения функциональных пространств ниже обычно одни и те же для скалярных и векторнозначных функций. Так, $C_0^\infty(G)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в открытом множестве G, а пространства суммируемых функций обозначаются через $L^p(G)$. Для открытого множества $G \subseteq \mathbb{R}^d$ пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(G)$ получается замыканием $C_0^\infty(G)$ в норме

$$|\phi|_{1,2} = \left(|\nabla\phi|^2_{L^2(G)} + |\phi|^2_{L^2(G)} \right)^{1/2}$$

(в случае векторнозначных функций $|u|_{1,2} = \left(|\nabla \otimes u|^2_{L^2(G)} + |u|^2_{L^2(G)} \right)^{1/2}$). Пространства соленоидальных функций обозначаются через

$$\mathbf{V}(G) = W^{1,2}\text{-замыкание множества } \{\upsilon \in C_0^\infty(G) : \nabla \cdot \upsilon = 0\}. \tag{1.3}$$

(Эти обозначения ближе к [1, гл. I], чем к [2].)

1.2. Локализация главного собственного числа. В дальнейшем всегда предполагается, что M имеет достаточно регулярную (например, липшицеву) границу. Объем, занятый «скелетом» M в ячейке $z+Q$, $z \in \mathbb{Z}^d$, характеризуется «меткой» — случайной величиной ξ_z, принимающей значения 0 и 1:

$$\operatorname{mes}(M \cap (z+Q)) \geq \omega > 0, \quad \text{если } \xi_z = 1. \tag{1.4}$$

Случайные величины ξ_z, $z \in \mathbb{Z}^d$, предполагаются независимыми и одинаково распределенными; их распределение зависит от положительного параметра $\nu > 0$:

$$\mathbf{P}\{\xi_z = 0\} = e^{-\nu}, \quad \mathbf{P}\{\xi_z = 1\} = 1 - e^{-\nu}, \quad \nu > 0. \tag{1.5}$$

Удобно обозначать конфигурацию меток во всем пространстве символом $\Xi = (\xi_z) = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

В описанную выше схему укладывается модель пуассоновского «облака твердых сфер» или других регулярных «препятствий» стандартной формы (см. [3]).

Более специальная модель пористой среды, удовлетворяющая условию (1.4), представляет собой рандомизированный вариант модели, принятой в [4] (в приложении, основанном на записках Л. Тартара). Эта модель предполагает, что имеется замкнутое множество с гладкой границей $W \subset Q^0$ такое, что

$$\omega = \operatorname{mes}(W) > 0, \quad \operatorname{mes}(Q \backslash W) = 1 - \omega > 0,$$

а конфигурация «жесткого скелета» M в ячейке $z+Q$, $z \in \mathbb{Z}^d$, задается формулой

$$(z+Q) \cap M = \begin{cases} z+W, & \xi_z = 1, \\ \varnothing, & \xi_z = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Ниже *максимальное рэлеевское отношение* $\mathfrak{S}(G)$ для соленоидальных функций на открытом множестве G определяется как

$$\mathfrak{S}(G) = \inf\Big\{\sigma : \forall u \in \mathbf{V}(G) \int\limits_G |u(x)|^2\, dx \leq \sigma \int\limits_G |\nabla \otimes u(x)|^2 \Big\}, \tag{1.7}$$

где пространство $\mathbf{V}(G)$ определено в (1.3). Влияние переносов и изменений пространственного масштаба на эту характеристику выражается формулой

$$\mathfrak{S}(a + \alpha G) = \alpha^2 \mathfrak{S}(G), \quad a \in \mathbb{R}^d, \alpha > 0. \tag{1.8}$$

Непосредственно из определения следует, что

$$\mathfrak{S}(G') \geq \mathfrak{S}(G''), \quad \text{если } G' \supseteq G''. \tag{1.9}$$

Из (1.8) вытекает, что рэлеевские отношения соленоидальных функций, обращающихся в нуль вне произвольного множества G, не превосходят величины $\mathscr{S}\ \operatorname{mes}^{2/d}(G)$, где

$$\mathscr{S} = \sup\left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2\, dx}{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\, dx} : \nabla \cdot u = 0,\ \operatorname{mes}\{u \neq 0\} \leq 1 \right\}. \tag{1.10}$$

В этом определении верхняя грань берется по множеству функций из $W_2^1(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющих указанным дополнительным ограничениям.

Теорема 1.1. *Рассмотрим максимальное рэлеевское отношение* (1.7) *для области* $rQ\backslash M$. *Если выполнены условия* (1.4), (1.5), *то асимптотика этого отношения описывается формулой*

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\mathfrak{S}(rQ\backslash M)}{(\frac{d}{\nu}\ln r)^{2/d}} > \mathscr{S} + \varepsilon \right\} = 0.$$

Рассуждения, которыми доказывается теорема 1.1, представляют собой модификацию доказательства из [5] для случая соленоидальных функций. Следует, однако, отметить, что локализация нижней границы спектра, которую дает теорема 1.1, значительно грубее, чем в [5] (где рассматривался эллиптический оператор, действующий на векторнозначные функции), и много грубее доверительных интервалов [6, 7] для главного собственного числа оператора Лапласа.

Источником дополнительной погрешности является затруднительность приближения соленоидальной пробной функции на $rQ\backslash M$ другой пробной функцией, обращающейся в нуль вне «свободного пространства» в rQ и имеющей почти такие же рэлеевское отношение и объем носителя. Чтобы обойти эту трудность, при доказательстве теоремы 1.1 мы оцениваем $\mathfrak{S}(rQ\backslash M)$ с помощью аналогичной характеристики для течения со слабой сжимаемостью в упомянутом свободном пространстве. Зазор, разделяющий эти две характеристики для течений с нулевой и малой положительной сжимаемостью, оказывается включенным в окончательную оценку.

Связи между различными вариантами рэлеевского отношения посвящено приложение A.

Нижняя оценка для $\mathfrak{S}(rQ\backslash M)$ выводится с использованием еще одного варианта рэлеевского отношения:

$$\underline{\mathscr{S}} = \inf\left\{ \sigma > 0 : \forall u \in V_{bd} \int |u|^2 \le \sigma \int |\nabla \otimes u|^2 \right\}, \tag{1.11}$$

где соленоидальные пробные функции имеют компактный носитель:

$$V_{bd} = \mathbf{V}(\mathbb{R}^d) \cap \{u : \operatorname{mes}\{u \ne 0\} \le 1,\ \operatorname{diam}(\operatorname{supp}(u)) < \infty\}. \tag{1.12}$$

Дополнительное ограничение в определении (1.11) исключает пробные функции, у которых носитель имеет бесконечно сужающиеся «щупальца», уходящие на бесконечность. Можно показать, что по крайней мере в плоском случае $d = 2$ есть совпадение $\mathscr{S} = \underline{\mathscr{S}}$ (см. лемму A.4 ниже). Вопрос о наличии положительного зазора $\mathscr{S} - \underline{\mathscr{S}}$ при $d \ge 3$ не связан со специальными свойствами модели случайной пористой среды.

Теорема 1.2. *Для модели пористой среды, удовлетворяющей условиям* (1.6), (1.5), *максимальное рэлеевское отношение* $\mathfrak{S}(rQ\backslash M)$ *подчиняется соотношению*

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\mathfrak{S}(rQ\backslash M)}{(\frac{d}{\nu}\ln r)^{2/d}} < \underline{\mathscr{S}} - \varepsilon \right\} = 0.$$

Вывод нижней границы существенно использует особенности модели пористой среды, описанной в (1.6). Отметим, что для этой модели «область течения» $rQ\backslash M$ связна при любой конфигурации жесткого скелета M. Остается открытым вопрос: можно ли модифицировать доказательства данной работы таким образом, чтобы получить возможность анализировать (в более высоких размерностях) модели пористой среды со связным скелетом?

2. Свободные кластеры

Цель данного раздела — дать упрощенное описание области $rQ\backslash M$ отправляясь от концентрации «жесткого скелета» M в кубических подобластях разных размеров. Раздел содержит также доверительные границы для максимального объема «пустот» в скелете — характеристики среды, которая определяет в конечном итоге значение $\mathfrak{S}(rQ\backslash M)$.

Оценки для вероятностей, которые используются ниже, взяты (с некоторыми упрощениями) из [1, 7, 8]. Точность этих оценок ниже, чем в цитированных работах.

2.1. Кластеры, их оболочки и окрестности. Положение нижней границы спектра определяется по преимуществу размером и формой больших «пустот», т. е. связных подобластей rQ, в которых «жесткий скелет» пористой среды M занимает пренебрежимо малую часть объема. Эти подобласти ниже приближаются объединениями кубов нескольких стандартных размеров, входящих в следующие разбиения пространства:

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}^d} H(z+Q). \tag{2.1}$$

Для описания «пустот» заданной конфигурации $\Xi = (\xi_z, z \in \mathbb{Z}^d)$ «скелета» M потребуются некоторые обозначения и терминология.

Размер H кубических «блоков» в разбиении (2.1) выбирается из последовательности $(H_k, k = -1, 0, \dots)$, которая определяется с помощью двух нечетных натуральных параметров H_0 и $T > 1$. В самом мелком разбиении размер блока есть $H_{-1} = 1$, а в более крупных этот размер выбирается равным H_0 или

$$H_k = H_0 T^k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{2.2}$$

Ниже термин k-*блок* или *блок уровня* k относится к множествам

$$C_z^{(k)} = H_k(z+Q).$$

Самые мелкие (-1)-блоки $C_z^{(-1)} = z + Q$ называют также *ячейками*. Чтобы указать, что меньший блок является подмножеством блока следующего уровня, используется обозначение

$$z' \prec_k z \iff C_{z'}^{(k-1)} \subset C_z^{(k)}. \tag{2.3}$$

Очевидно, каждый 0-блок является объединением H_0^d ячеек, а каждый k-блок — объединение T^d блоков уровня $k-1$:

$$C_z^{(k)} = \bigcup_{z'\prec_k z} C_{z'}^{(k-1)}. \tag{2.4}$$

Блоки каждого уровня делятся на *свободные* и *занятые* в зависимости от конфигурации «жесткого скелета» пористой среды — свободными оказываются те блоки, где M занимает меньшую часть объема. Удобно обозначить через $\mathbb{F}_k$ множество целочисленных векторов, которое нумерует свободные блоки уровня k:

$$\mathbb{F}_k = \big\{z \in \mathbb{Z}^d : \text{блок } C_z^{(k)} \text{свободен}\big\}. \tag{2.5}$$

Правила классификации будут точно сформулированы ниже. В вычислениях, где все блоки имеют один и тот же размер H, обозначения обычно сокращаются:

$$C_z = H(z+Q), \quad \mathbb{F} = \{z \in \mathbb{Z}^d : \text{ блок } C_z \text{ свободен}\}.$$

Формула $z_1 \sim z_2$ указывает, что точки $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^d$ являются *j-смежными* в следующем смысле:

$$z_1 \sim z_2 \Longleftrightarrow \max_i \bigl|z_1^{(i)} - z_2^{(i)}\bigr| \le 5j. \tag{2.6}$$

Свободный путь длины n, соединяющий $z', z'' \in \mathbb{F}$, — это последовательность $\mathfrak{p} = (z(i), i = 0, \ldots, n)$, состоящая из точек $z(i) \in \mathbb{F}$, такая, что $z(0) = z'$, $z(n) = z''$ и

$$z(l) \sim z(l+1) \quad \text{при } l = 0, \ldots, n-1.$$

Множество $J \subseteq \mathbb{F}$ называют *j-связным*, если всякую пару его точек $z', z'' \in J$ связывает свободный путь конечной длины. Удобно связывать с описанным типом близости расстояние

$$\operatorname{dist}^*(z', z'') = \min\{n : n = \text{ длина пути от } z' \text{ до } z''\}, \tag{2.7}$$

полагая $\operatorname{dist}^*(z', z'') = \infty$, если z' и z'' не соединены свободным путем.

Свободным кластером $F[z]$, начинающимся из z, называют максимальное связное подмножество $\mathbb{F}$, которое содержит z: если $z \in \mathbb{F}$, то

$$F[z] = F[z; j, \Xi] = \{z' \in \mathbb{F} : \operatorname{dist}^*(z, z') < \infty\}. \tag{2.8}$$

Ниже считаем $F[z] = \varnothing$, если $z \notin \mathbb{F}$. Соответствие между точками $\mathbb{F}$ и кластерами не является однозначным — два кластера $F[z'], F[z'']$ совпадают, если обе точки z', z'' принадлежат одному кластеру.

Каждый свободный кластер порождает свою *оболочку* $\widehat{F}[z]$ — объединение свободных блоков соответствующего размера:

$$\widehat{F}[z] = \widehat{F}[z, j, \Xi] = H(F[z] + Q) = \bigcup_{z \in F[z]} C_z. \tag{2.9}$$

Еще одно «массивное» множество, которое ниже связывается со свободным кластером, — это *окрестность кластера* $\widetilde{F}[z]$, представляющая собой открытое множество

$$\widetilde{F}[z] = \widetilde{F}[z, j, \Xi] = (\widehat{F}[z] + 2jHQ)^0, \quad z \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.10}$$

Легко видеть, что множество $\widehat{F}[z] + 2jHQ$ является объединением блоков $C_z = H(z + Q)$ размера H. Цель, которую преследует определение кластеров с использованием путей, составленных из точек решетки $\mathbb{Z}^d$, не являющихся непосредственно соседними, а из $5j$-смежных точек, — добиться того, чтобы окрестности любых двух различных кластеров были разделены полосой ширины jH, полностью состоящей из занятых блоков.

2.2. Свободные блоки и эффективный размер блока. Рассматриваемые ниже свободные кластеры составлены из блоков уровня 0, имеющих размер H_0 (начальный в последовательности (2.2)). Их построение основано на следующей классификации блоков уровней -1 и 0 с использованием нового параметра $\delta \in (0, 1)$ — он определяет концентрацию «скелета» M в блоке.

Кубическая ячейка $z + Q$ *свободна*, если $\xi_z = 0$, и *занята*, если $\xi_z = 1$; таким образом, $\mathbb{F}_{-1} = \{z : \xi_z = 0\}$.

Блок $C_z^{(0)}$ уровня 0 *свободен* (в обозначениях $z \in \mathbb{F}$), если

$$z \in \mathbb{F}_0 \Longleftrightarrow \frac{\operatorname{card}\{z' : z' \prec z,\ z' \in \mathbb{F}_{-1}\}}{\operatorname{card}\{z' : z' \prec z\}} > 1 - \delta, \tag{2.11}$$

и *занят* (в обозначениях $z \notin \mathbb{F}$), если среди его H_0^d подблоков уровня -1 занятых не менее δH_0^d.

В последующих вычислениях основную роль играет специфическая характеристика конфигурации M в пределах кубического блока $C = a + HQ$, содержащегося в rQ. Эта характеристика называется ниже *эффективным размером блока* (ЭРБ) и обозначается через $L(C)$. Ее определяет формула

$$L^2(C) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{H^2} \sup\left\{ \frac{\int\limits_C |f|^2}{\int\limits_C |\nabla f|^2} : f \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(rQ\backslash M),\ f \neq 0 \right\}. \tag{2.12}$$

Использование ЭРБ основано на неравенстве из следующего утверждения (оно является непосредственным следствием определения (2.12)).

Предложение 2.1. *Рассмотрим открытое множество* $A = (\bigcup\limits_{z\in J} C_z^{(k)})^0$. *Если эффективный размер каждого блока, имеющего с* A *пересечение положительной меры, допускает оценку*

$$L(C_z^{(k)}) \le \mathbf{L}_k, \quad z \in J,$$

то для всякой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(rQ\backslash M)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_A |u|^2 \le c\mathbf{L}_k^2 H_k^2 \int\limits_A |\nabla u|^2,$$

где константа c *зависит только от размерности* d.

Отметим, что ни определение (2.12), ни приведенное выше предложение не оговаривают каких-либо ограничений на функцию f, кроме того, что она обращается в нуль на «скелете» пористой среды M. Впоследствии оценки ЭРБ основываются на следующей форме неравенства Пуанкаре — Фридрихса.

Предложение 2.2 [8, предложение 3.1]. *Рассмотрим выпуклое открытое множество* Q^+, *которое содержит подмножества* Q^0 *и* Q^1 *положительной лебеговой меры. Если* $f \in W^{1,2}(Q^+)$ *и* $\sqrt[d]{\operatorname{mes}(Q^1)/\operatorname{mes}(Q^0)} \le \alpha$, *то*

$$\int\limits_{Q^1} f^2(x)\,dx \le 2\alpha^d \int\limits_{Q^0} f^2(x)\,dx + \mathscr{C}(\alpha,d)\rho^2 \int\limits_{Q^+} |\nabla f(x)|^2\,dx,$$

где $\rho = \rho(Q^+)$ — *диаметр* Q^+, *а константа может быть выбрана равной*

$$\mathscr{C}(\alpha,d) = \frac{2}{d-1}[(1+\alpha)^d - 1 - \alpha^d].$$

Это предложение приведено с доказательством также в [7, предложение 2].

Легко видеть, что $\mathscr{C}(\alpha,d) \le c\alpha^{d-1}$, если $\alpha \ge 1$. Если f обращается в нуль на Q^0, то

$$\int\limits_{Q^+} f^2(x)\,dx \le \mathscr{C}(\alpha)\rho^2 \int\limits_{Q^+} |\nabla f(x)|^2\,dx. \tag{2.13}$$

Классификация (2.11) позволяет получить нетривиальные оценки для эффективных размеров занятых блоков. Непосредственно из предложения 2.2 следует, что эффективные размеры занятых блоков уровня -1 равномерно ограничены константой, зависящей только от d и ω из (1.4):

$$L(z+Q) \le C, \quad z \notin \mathbb{F}_{-1}. \tag{2.14}$$

Оценка эффективных размеров занятых блоков уровня 0, которая вытекает из (2.14) и (2.11) с $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, имеет вид

$$L^2\bigl(C_z^{(0)}\bigr) \le \frac{c}{\delta}, \quad z \notin \mathbb{F}_0. \tag{2.15}$$

Для оценки эффективных размеров более крупных блоков используется неравенство следующего предложения.

Предложение 2.3 [5, лемма 2.2]. *Пусть эффективный размер каждого занятого k-блока допускает оценку*

$$L^2\bigl(C_z^{(k)}\bigr) \le \mathbf{L}_k^2, \quad z \notin \mathbb{F}_k,$$

а $Q^+ = a + H_+Q$ — куб размера $H_+ > H_k$. Если

$$\frac{\operatorname{mes}\bigl(Q_+ \setminus \bigcup\limits_{z\in\mathbb{F}_k} C_z^{(k)}\bigr)}{\operatorname{mes}(Q_+)} \ge \delta,$$

то ЭРБ *Q_+ удовлетворяет неравенству*

$$L^2\bigl(C_z^{(K)}\bigr) \le \frac{c'}{\delta}\biggl(1 + \frac{H_k^2}{H_+^2}\mathbf{L}_k^2\biggr).$$

Доказательство. Пусть Q^0 — объединение всех занятых k-подблоков более крупного куба Q^+. Отношение $\operatorname{mes}(Q^+)/\operatorname{mes}(Q^0)$ не превосходит $\alpha^d = 1/\delta > 1$, поэтому из предложения 2.2 следует, что

$$\int\limits_{Q^+} |f|^2 \le c\biggl(\frac{1}{\delta}\int\limits_{Q^0} |f|^2 + \frac{H_+^2}{\delta}\int\limits_{Q^+} |\nabla f|^2\biggr),$$

где константа $c > 0$ может зависеть только от размерности d. По предположению

$$\int\limits_{C_{z'}^{(k)}} |f|^2 \le \mathbf{L}_k^2 H_k^2 \int\limits_{C_{z'}^{(k)}} |\nabla f|^2$$

для каждого занятого подблока $C_{z'}^{(k)} \subset Q^0$. Поэтому

$$\frac{1}{H_+^2}\int\limits_{Q^+} |f|^2 \le \frac{c'}{\delta H_+^2}\biggl(\mathbf{L}_k^2 H_k^2 \int\limits_{Q^+} |\nabla f|^2 + H_+^2 \int\limits_{Q^+} |\nabla f|^2\biggr),$$

что и приводит к требуемому неравенству. Стоит отметить, что получающееся при этом значение константы c' не зависит от k или δ. $\square$

2.3. Вероятный размер свободного кластера. В вычислениях, связанных со свободными кластерами, удобно выбрать в качестве основного параметра нечетное натуральное число T, а затем малый положительный показатель $\gamma \in (0, \frac{1}{d+1})$ и определить остальные параметры формулами

$$j = m \sim T^{2\gamma}, \quad H_0 = T, \quad \alpha = \delta = \kappa = T^{-\gamma}, \quad K^* = T. \tag{2.16}$$

Впоследствии параметр T будет, как правило, большим.

В ситуации, рассматриваемой в данной статье, вероятность того, что ячейка $z + Q$ свободна, равна $p = e^{-\nu}$ (см. (1.5)).

Блок следующего уровня $C_z^{(0)}$ свободен в смысле (2.11), если среди его H_0^d ячеек не менее $H_0^d(1-\delta)$ свободных. Вероятность того, что данный 0-блок свободен, допускает оценку

$$\mathbf{P}\big\{C_z^{(0)} \text{ свободен}\big\} \le \exp\bigg\{-\bigg(1-c\frac{\ln T}{T^\gamma}\bigg)\nu \operatorname{mes}\big(C_z^{(0)}\big)\bigg\} \tag{2.17}$$

(стоит напомнить, что параметры в этой формуле определены соотношениями (2.16)).

Рассуждение, которое приводит к оценке (2.17), элементарно. Блок $C_z^{(0)}$ свободен, если

$$\sum_{z' \prec_{-1} z} \xi_{z'} < \delta H_0^d.$$

Число свободных ячеек в левой части неравенства распределено так же, как число успехов в серии из $N = H_0^d = T^d$ независимых испытаний с вероятностью успеха p. Легко видеть [8], что

$$\mathbf{P}\{\nu_N \ge M\} \le N^{N-M} p^M = \exp\{(N-M)\ln N - M\ln(1/p)\},$$

поэтому для $M \ge (1-\delta)N = (1-\frac{1}{T^\gamma})T^d$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\big\{C_z^{(0)} \text{ свободен}\big\} = \mathbf{P}\{\nu_N \ge M\} \\ &\le \exp\big\{\delta H_0^d \ln H_0^d - (1-\delta)H_0^d \ln(1/p)\big\} = \exp\bigg\{-\bigg(1-\frac{1+d\ln T}{T^\gamma}\bigg)\nu T^d\bigg\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Чтобы оценить вероятный размер свободного кластера, нужна оценка для числа различных форм j-связного подмножества $\mathbb{Z}^d$ с заданным числом элементов. Используемая ниже оценка такого рода заимствована из теории просачивания (см. [9], а также [5, 7]). Доказательства следующих двух предложений можно найти в [5].

Обозначим семейство j-связных подмножеств решетки $\mathbb{Z}^d$, содержащих z, символом

$$\mathscr{P}(z;j) \overset{\text{def}}{=} \{I \subset \mathbb{Z}^d : I \ni z,\ \forall z' \in I \ \operatorname{dist}^*(z,z') < \infty\}.$$

Предложение 2.4. *Число j-связных множеств из n точек, которые включают точку z, допускает оценку*

$$\operatorname{card}(\{I \in \mathscr{P}(z;j) : \operatorname{card}(I) = n\}) \le K^n,$$

где $K = \exp\{cj^d\}$, а константа $c > 0$ не зависит от j и n.

Предложение 2.5. *Если вероятность $p = \mathbf{P}\{z \in \mathbf{A}\}$ и константа в предложении 2.4 удовлетворяют неравенству $Kp < 1$, то для всякого конечного множества $U \subset \mathbb{Z}^d$ распределение размера наибольшего кластера, начинающегося в некоторой точке этого множества, удовлетворяет неравенству*

$$\mathbf{P}\{\max_{z\in U} \operatorname{card}(F[z]) \ge n\} \le \operatorname{card}(U)\frac{(Kp)^n}{1-Kp}.$$

Каков бы ни был выбор T, число точек $Tz \in rQ$, которые могут послужить началом свободного кластера, не превосходит $\exp\{\ln \operatorname{mes}(rQ) - d\ln T\}$. С помощью этой оценки можно заключить, что в ситуации, анализируемой в данной статье, приведенные выше предложения доставляют следующую оценку наибольшего объема оболочки свободного кластера, составленного из блоков размера H_0 и имеющего общие точки с rQ: существуют константы $c, c' > 0$, такие, что для всякого $u > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{z\in\mathbb{F}_0} \operatorname{mes} \widehat{F}[z] \geq \frac{\frac{d}{\nu}\ln r + \frac{1}{\nu}u}{1 - c\big(\delta \ln T + j^d/\big(\nu H_0^d\big)\big)}\right\} \leq c' \exp\{-u\}. \tag{2.19}$$

(См. детали доказательства в [5, предложение 3.1] или [7].) Когда T велико, а остальные параметры, использованные при построении кластеров, выбираются в соответствии с (2.16), приведенное выше неравенство показывает, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}\left\{\max_{z\in\mathbb{F}_0} \operatorname{mes} \widehat{F}[z] \geq \frac{d}{\nu}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\ln r\right\} = 0. \tag{2.20}$$

3. Верхняя оценка рэлеевского отношения

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 существенно используют оценки эффективных размеров занятых блоков и оценки максимального объема оболочки свободного кластера, приведенные в разд. 2. Эти оценки преобразуются в доверительные границы для максимального рэлеевского отношения $\mathfrak{S}(rQ\backslash M)$ с помощью развитой ниже техники срезок.

Метод этого раздела является адаптацией метода из [5, 7, 8] к соленоидальным полям.

3.1. Разделение свободных кластеров. Предложения 2.3 и 2.1 делают возможным оценить максимальное рэлеевское отношение для соленоидальных функций из $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}(rQ^0\backslash M)$, применяя индивидуальные характеристики оболочек свободных кластеров. Вычисления используют приближение соленоидальных векторных полей течениями слабо сжимаемых жидкостей, а также еще один вариант максимального рэлеевского отношения для функций $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}(G)$, а именно

$$\mathfrak{S}^\alpha(G) = \sup_{u\neq 0} \frac{|u|^2_{L^2(G)}}{|\nabla \otimes u|^2_{L^2(G)} + \frac{1}{\alpha}|\nabla \cdot u|^2_{L^2(G)}}, \quad \alpha > 0.$$

Оно используется в оценке

$$\int\limits_G |u|^2 \leq \mathfrak{S}^\alpha(G) \int\limits_G \left(|\nabla \otimes u|^2 + \frac{1}{\alpha}(\nabla \cdot u)^2\right), \quad u \in \overset{\circ}{W}{}^2_1(G). \tag{3.1}$$

Свободные кластеры ниже строятся на основе разбиения $\mathbb{R}^d$ на 0-блоки размера $H = H_0$ с помощью классификации (2.11). Впоследствии параметры $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ и $H_0, T, j \in \mathbb{N}$ выбираются, как в (2.16), но пока удобно не накладывать этих дополнительных ограничений. Следующая лемма представляет собой модификацию леммы 4.1 из [5] (см. также [7, лемма 3.1].

Лемма 3.1. *Пусть эффективный размер каждого занятого* 0*-блока подчинен условию* (2.15)*. Существуют положительные константы C_1, C_2 такие, что максимальное рэлеевское отношение* (1.7) *удовлетворяет неравенству*

$$\mathfrak{S}(rQ\backslash M) \leq \left(1 + C_1 \max\left\{\kappa, \frac{1}{\delta\kappa j^2}, \frac{1}{\alpha\delta\kappa j^2}\right\}\right) \max\left\{\max_z \mathfrak{S}^\alpha(\widetilde{F}[z]\backslash M), \frac{C_2 H_0^2}{\delta}\right\},$$

где $\alpha, \kappa \in (0, 1)$ — положительные параметры, j — нечетное натуральное число из (2.6)*, а число $\mathfrak{S}^\alpha$ определено в* (3.1)*.*

Лемма 3.1 представляет собой частный случай следующей леммы.

Лемма 3.2. *Рассмотрим множества*

$$\Phi = \bigcup_{z\in F} C_z^{(k)}, \quad \Psi = \bigcup_{z\in G} C_z^{(k)}, \quad F \subset G \subset \mathbb{Z}^d,$$

такие, что

$$\Psi \supseteq \{x : \operatorname{dist}(x,\Phi) < jH_k\}.$$

Если для каждого k-блока $C_z^{(k)} \subset \Psi\backslash\Phi$ ЭРБ удовлетворяет неравенству

$$L\big(C_z^{(k)}\big) \le \mathbf{L},$$

то для всякой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(rQ\backslash M)$ и пары чисел α,κ такой, что $0<\alpha,\kappa<1$, справедливо неравенство

$$\int |u|^2 \le \left(1 + C_1 \max\left\{\kappa, \frac{\mathbf{L}^2}{\alpha\kappa j^2}\right\}\right) \times \max\big\{\mathfrak{S}^\alpha(\Psi\backslash M), C_2\mathbf{L}^2H_k^2\big\} \int \left(|\nabla\otimes u|^2 + \frac{1}{\alpha}(\nabla\cdot u)^2\right),$$

где C_1, C_2 — положительные константы, не зависящие от формы Φ и Ψ.

Доказательство. Множество Ψ содержит jH_k-окрестность Φ, поэтому легко видеть, что существует гладкая функция $\zeta : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ такая, что

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & x\in\Phi, \\ 0, & x\notin\Psi, \end{cases} \qquad |\nabla\zeta(x)| \le \frac{c}{jH_k}, \tag{3.2}$$

и константа c в оценке градиента не зависит от формы Φ и Ψ. Производные этой функции обращаются в нуль вне $\Psi\backslash\Phi$.

Рассмотрим произвольную функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(rQ\backslash M)$. Ее можно представить в виде

$$u = \zeta u + (1-\zeta)u. \tag{3.3}$$

Градиент ζu имеет вид $\nabla\otimes(\zeta u) = \zeta\nabla\otimes u + \nabla\zeta\otimes u$. Он отличается от $\nabla\otimes u$ только на тех блоках, у которых ЭРБ ограничен величиной $\mathbf{L}$. Можно воспользоваться неравенством Коши, чтобы получить следующую оценку для его $L^2(\Psi)$ нормы: для любого $\kappa\in(0,1)$

$$\int_\Psi |\nabla\otimes(\zeta u)|^2 \le \int_\Psi (|\nabla\otimes u| + |\nabla\zeta\cdot u|)^2$$
$$\le (1+\kappa)\int_\Psi |\nabla\otimes u|^2 + \frac{1+\kappa}{\kappa}\frac{c}{j^2H^2}\int_{\Psi\backslash\Phi}|u|^2 \le (1+\kappa)\left(1 + \frac{c'\mathbf{L}^2}{\kappa j^2}\right)\int_\Psi |\nabla\otimes u|^2.$$

Дивергенция $\nabla\cdot\zeta u = \zeta\cdot\nabla u + \nabla\zeta\cdot u$ отличается от дивергенции u относительно малым членом $\nabla\zeta\cdot u$, обращающимся в нуль вне множества $\{\nabla\zeta\ne 0\}$. Неравенство Коши и предложение 2.1 доставляют оценку

$$\int_\Psi (\nabla\cdot(\zeta u))^2 = (1+\kappa)\int_\Psi \zeta^2(\nabla\cdot u)^2 + \frac{1+\kappa}{\kappa}\int_{\Psi\backslash\Phi}(\nabla\zeta\cdot u)^2$$
$$\le (1+\kappa)\left(\int_\Psi (\nabla\cdot u)^2 + \frac{c\mathbf{L}^2}{\kappa j^2}\int_{\Psi\backslash\Phi}|\nabla\otimes u|^2\right).$$

Это позволяет оценить L^2-норму ζu с помощью приближения $\mathfrak{S}^\alpha$ к максимальному рэлеевскому отношению для соленоидальных полей, полученного допущением слабой сжимаемости. Используя (3.1), имеем

$$\int\limits_\Psi |\zeta u|^2 \le \mathfrak{S}^\alpha(\Psi\backslash M)\int\limits_\Psi\biggl(|\nabla\otimes(\zeta u)|^2+\frac{1}{\alpha}(\nabla\cdot(\zeta u))^2\biggr)$$
$$\le (1+\kappa)\biggl(1+\biggl(1+\frac{1}{\alpha}\biggr)\frac{c\mathbf{L}^2}{\kappa j^2}\biggr)\mathfrak{S}^\alpha(\Psi\backslash M)\int\limits_\Psi\biggl(|\nabla\otimes u|^2+\frac{1}{\alpha}(\nabla\cdot u)^2\biggr).$$

Стоит отметить, что по построению множества Φ, Ψ и $\Psi\backslash\Phi$ представляют собой объединения непересекающихся блоков разбиения (2.1) с размером блока $H = H_k$.

Множество, где $1-\zeta$ не обращается в нуль, покрывается блоками с ограниченным ЭРБ, поэтому

$$\int |(1-\zeta)u|^2 \le \int\limits_{rQ\backslash\Phi}|u|^2 \le c\mathbf{L}^2H_k^2\int\limits_{rQ\backslash\Phi}|\nabla\otimes u|^2.$$

Наконец, неравенство Коши, разложение (3.3) и указанные выше оценки приводят к неравенству

$$\int |u|^2 \le (1+\kappa)\int|\zeta u|^2+\frac{1+\kappa}{\kappa}\int|(1-\zeta)u|^2 \le \biggl(1+C_1\max\biggl\{\kappa,\frac{\mathbf{L}^2}{\kappa j^2},\frac{\mathbf{L}^2}{\alpha\kappa j^2}\biggr\}\biggr)$$
$$\times\max\bigl\{\mathfrak{S}^\alpha(\Psi\backslash M), C_2\mathbf{L}^2H_k^2\bigr\}\int\biggl(|\nabla\otimes u|^2+\frac{1}{\alpha}(\nabla\cdot u)^2\biggr). \quad \square$$

Доказательство леммы 3.1. В условиях леммы можно применить оценку леммы 3.2 к множествам

$$\Phi = \bigcup_{z\in\mathbb{F}\cap\frac{r}{H}Q}\widehat{F}[z], \quad \Psi = \bigcup_{z\in\mathbb{F}\cap\frac{r}{H}Q}\widetilde{F}[z],$$

где Φ — объединение оболочек всех кластеров, содержащих точки rQ, а Ψ — соответствующее объединение окрестностей кластеров. Окрестности $\widetilde{F}[z]$ различных кластеров разделяет расстояние не менее jH. Вследствие этого для функции из $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Psi\backslash M)$ имеем

$$\int\limits_{\Psi\backslash M}|u|^2 = \sum_{z\in\frac{r}{H_0}Q\cap\mathbb{F}}\frac{1}{\operatorname{card}(F[z])}\int\limits_{\widetilde{F}[z]}|u|^2 \le \max_z \mathfrak{S}^\alpha(\widetilde{F}[z]\backslash M)$$
$$\times\sum_{z\in\frac{r}{H_0}Q\cap\mathbb{F}}\frac{1}{\operatorname{card}(F[z])}\int\limits_{\widetilde{F}[z]}\biggl(|\nabla\otimes u|^2+\frac{1}{\alpha}(\nabla\cdot u)^2\biggr)$$
$$=\max_z\mathfrak{S}^\alpha(\widetilde{F}[z]\backslash M)\int\limits_{\Psi\backslash M}\biggl(|\nabla\otimes u|^2+\frac{1}{\alpha}(\nabla\cdot u)^2\biggr),$$

и потому $\mathfrak{S}^\alpha(\Psi) \le \max\limits_z \mathfrak{S}^\alpha(\widetilde{F}[z]\backslash M)$. $\square$

3.2. «Выравнивание» свободного кластера. Последующие вычисления имеют дело с отдельным свободным кластером $F[z]$, построенным с использованием соглашений предшествующего подраздела из блоков размера $H = H_0$. Обозначения ниже сокращены следующим образом:

$$F = F[z, \delta, j, \Xi], \quad \widehat{F} = \widehat{F}[z, \delta, j, \Xi], \quad \widetilde{F} = \widetilde{F}[z, \delta, j, \Xi].$$

Целью вычислений является получение для максимального рэлеевского отношения $\mathfrak{S}^\alpha(\widetilde{F}\backslash M)$ (см. (3.1)) оценки через лебегову меру оболочки кластера $\widehat{F}$ и величины $\mathscr{S}_\alpha$, определенной в (1.11). Форма кластера может быть сложной, и объем его окрестности может существенно превосходить объем оболочки кластера, которую она окружает. Процедура, используемая для исключения лишнего объема, заимствована из [5]. Ее цель — заменить $\widehat{F}$ множеством более простой формы без заметного увеличения лебеговой меры и существенного изменения максимального рэлеевского отношения.

Пробные функции, используемые в определении максимального рэлеевского отношения, обращаются в нуль вне окрестности кластера $\widetilde{F}$. Поэтому строение M вне этого множества несущественно. При анализе единичного кластера F принимается соглашение о том, что заняты все блоки размера H из разбиения (2.1), которые не входят в окрестность кластера $\widetilde{F}$. Таким образом, оценка (2.15) применима ко всем блокам, лежащим вне $\widehat{F}$:

$$L^2\bigl(C_z^{(k)}\bigr) \le \frac{C}{\delta}, \quad \text{если } C_z^{(k)} \not\subseteq \widehat{F},\ k \ge 0. \tag{3.4}$$

Кроме блоков основного размера $H = H_0$, составляющих оболочку свободного кластера $\widehat{F}$, его окрестность $\widetilde{F}$ и их дополнения в $\mathbb{R}^d$, в выкладках участвуют разбиения пространства (2.1) на бо́льшие блоки $C_z^{(k)} = H_k(z + Q)$, $1 \le k \le K^*$, других размеров, определенных в (2.2).

Уровень K^*, определяющий наибольший размер рассматриваемых ниже блоков, является еще одним параметром, выбор которого будет сделан позже. Классификация новых крупных блоков вводится следующим образом: k-блок $C_z^{(k)}$, $k \ge 1$, *свободен*, т. е. $z \in \mathbb{F}_k$, если бо́льшую часть его объема покрывает оболочка кластера $\widehat{F}$:

$$z \in \mathbb{F}_k \Longleftrightarrow \operatorname{mes}\bigl(C_z^{(k)}\backslash\widehat{F}\bigr) \le \delta \operatorname{mes}\bigl(C_z^{(k)}\bigr). \tag{3.5}$$

Все *занятые* (т. е. несвободные) блоки имеют ограниченный ЭРБ: по соглашению (3.4) и предложению 2.3 их эффективный размер допускает оценку

$$L\bigl(C_z^{(k)}\bigr) \le \frac{c}{\delta}, \quad \text{если } z \notin \mathbb{F}_k,\ k \ge 0. \tag{3.6}$$

Ниже предполагается, что имеется некоторое количество свободных блоков высшего уровня K^*:

$$\mathbb{F}_{K^*} = \bigl\{z \in \mathbb{Z}^d : \operatorname{mes}(C_z^{(k)}\backslash\widehat{F}) \le \delta \operatorname{mes}\bigl(C_z^{(k)}\bigr)\bigr\} \ne \varnothing. \tag{3.7}$$

Часть пространства, которую покрывают свободные K^*-блоки, обозначается через

$$\Phi_{K^*} = \bigcup_{z \in \mathbb{I}_{K^*}} C_z^{(K^*)}, \quad \mathbb{I}_{K^*} = \mathbb{F}_{K^*}. \tag{3.8}$$

Бóльшую часть этого множества покрывают свободные блоки основного размера H_0: по (3.5)

$$|\Phi_{K^*}| \le \frac{1}{1-\delta}|\Phi_{K^*}\cap \widehat{F}|. \tag{3.9}$$

Не имеющие общих точек множества

$$\Phi_k = \bigcup_{z\in\mathbb{I}_k} C_z^{(k)} \tag{3.10}$$

составляем из свободных блоков низших уровней последовательно, переходя от уровня $k+1$ к следующему уровню $k \ge 0$. После того как множества $\Phi_{K^*},\dots,\Phi_{k+1}$ найдены, множество Φ_k определяется как объединение свободных k-блоков, лежащих вне множеств $\Phi_{k'}$, $k'>k$. Именно, «номера» z этих блоков принадлежат множеству

$$\mathbb{I}_k = \mathbb{F}_k \cap \left\{ z\in\mathbb{Z}^d : C_z^{(k)} \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{k'=k+1}^{K^*} \Phi_{k'} \right\}. \tag{3.11}$$

Лемма 3.3. (a) *Если выполнено условие* (3.7) *и $K_* \le K^*$ — некоторое целое число, то существует целое число k такое, что $K_* \le k \le K^*$ и*

$$\operatorname{mes}(\Phi_k) \le \frac{1}{K^*-K_*+1}\cdot\frac{\operatorname{mes}(\widehat{F})}{1-\delta}. \tag{3.12}$$

(b) *Пусть m — натуральное число. Если k таково, что выполнено неравенство* (3.12), *то лебегова мера множества*

$$\Psi_+ = \left(\bigcup_{k'=k}^{K^*}\Phi_{k'} + 2mH_k\right)^0 = \left\{x : \operatorname{dist}_+\left(\bigcup_{k'=k}^{K^*}\Phi_{l'}\right) < mH_k\right\}$$

допускает оценку

$$\operatorname{mes}(\Psi_+) \le \left(1 + c_1\left(\frac{m}{T} + \frac{m^d}{K^*-K_*+1}\right)\right)\frac{\operatorname{mes}(\widehat{F})}{1-\delta},$$

где c_1 — положительная константа, не зависящая от δ, k, T.

Представляется уместным предпослать доказательству леммы 3.3 оценку для максимального рэлеевского отношения $\mathfrak{S}^\alpha(\widetilde{F}\setminus M)$, которую она позволяет получить.

Лемма 3.4. *Если $K^* \ge 1$ и $\alpha,\delta,\kappa \in (0,1)$ достаточно малы, то*

$$\mathfrak{S}^\alpha(\widetilde{F}\setminus M) \le \left(1 + C_1 \max\left\{\kappa, \frac{1}{\alpha\delta\kappa j^2}, \delta, \frac{m}{T}, \frac{m^d}{K^*}\right\}\right)\max\left\{\mathscr{C}_\alpha\{\operatorname{mes}(\widehat{F})\}, \frac{C_2 H_{K^*}^2}{\delta}\right\}.$$

Доказательство леммы 3.4. Если рассматриваемая оболочка кластера $\widehat{F}$ не порождает свободных блоков уровня K^*, то оценка леммы очевидным образом вытекает из (3.6).

Предположим теперь, что имеются свободные блоки уровня K^*. В этом случае лемма 3.3 с $K_* \ge 1$ показывает, что для некоторого $k \le K^*$ оболочку кластера $\widehat{F}$ практически полностью покрывает множество

$$\Phi_+ = \bigcup_{k'=k}^{K^*} \Phi_k.$$

Множество Φ_+ является объединением блоков того же размера H_k. Все k-блоки, принадлежащие дополнению Φ_+, заняты и потому имеют ограниченный ЭРБ. Кроме того, лебегова мера mH_k-окрестности Ψ_+ сравнима с мерой $\widehat{F}$. В этой ситуации можно воспользоваться леммой 3.2 с $H = H_k$, чтобы заключить, что

$$\mathfrak{S}^\alpha(\widetilde{F}[z]\backslash M) \le \left(1 + C_1 \max\left\{\kappa, \frac{\mathbf{L}^2}{\alpha\kappa m^2}\right\}\right) \max\bigl\{\mathfrak{S}^\alpha(\Psi_+\backslash M), C_2\mathbf{L}^2 H_k^2\bigr\}.$$

По построению $H_k \le H_{K^*}$. Определение A.1 позволяет оценить максимальное рэлеевское отношение в правой части через объем Ψ_+. Из леммы 3.3 с $K_* = 1$ следует, что

$$\mathfrak{S}^\alpha(\Psi\backslash M) \le \mathscr{S}_\alpha \operatorname{mes}(\Psi_+) \le \mathscr{S}_\alpha \left(1 + c_1\left(\frac{m}{T} + \frac{m^d}{K^*}\right)\right)\frac{\operatorname{mes}(\widehat{F}[z])}{1-\delta}.$$

Результатом является неравенство леммы. $\square$

Замечание 3.1. Неравенство леммы 3.4 используется ниже в ситуации, где α, δ, κ малы, j, m велики, а наибольшая лебегова мера оболочки свободного кластера много больше, чем $H_{K^*}^d$. При выборе параметров в определении кластера в соответствии с (2.16) неравенство леммы 3.4 принимает вид

$$\mathfrak{S}(rQ\backslash M) \le \left(1 + \frac{C_1}{T^\gamma}\right)\mathscr{C}_{T^{-\gamma}} \max_z \operatorname{mes}(\widehat{F}[z]), \tag{3.13}$$

если $\max\limits_z \operatorname{mes}(\widehat{F}[z]) \ge C_2 T^{T+1}$.

Доказательство леммы 3.3. (a) По построению множества Φ_k, $k = 0, \dots, K^*$, в (3.11) не имеют общих точек. Они покрывают всю оболочку кластера $\widehat{F}$, и процедура выбора (3.11) гарантирует, что для любого $k \ge 1$

$$\sum_{k'=k}^{K^*} \operatorname{mes}(\Phi_{k'}) = \operatorname{mes}\left(\bigcup_{k'=k}^{K^*} \Phi_{k'}\right) \le \frac{\operatorname{mes}\Bigl(\widehat{F} \cap \bigcup\limits_{k'=k}^{K^*} \Phi_{k'}\Bigr)}{1-\delta} \le \frac{\operatorname{mes}(\widehat{F})}{1-\delta}. \tag{3.14}$$

Первое неравенство леммы немедленно следует из этой оценки.

(b) Чтобы доказать второе неравенство, нужно заметить, что множество Φ_+ включает блоки уровней $k' \ge k$, которые составляют $\Phi_k, \dots, \Phi_{K^*}$, а также некоторые k-блоки из mH_k-окрестностей этих множеств (определенных с помощью расстояния dist_+). На каждом уровне число блоков, составляющих Φ_k, не превосходит $\operatorname{mes}(\Phi_k)/H_k^d$.

Для каждого блока $C_z^{(l)}$ уровня $l > k$ его mH_k-окрестность является кубом размера $H_l + 2mH_k$, поэтому ее мера допускает оценку

$$\operatorname{mes}\bigl(C_z^{(l)} + 2mkH_k\bigr) \le \left(1 + c'\frac{mH_k}{H_l}\right)\operatorname{mes}\bigl(C_z^{(l)}\bigr).$$

Следовательно, общий объем mH_k-окрестности объединения крупных блоков в Φ_+ допускает оценку

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}&\left\{x : \operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{l=k+1}^{K^*} \Phi_l\right) < mH_k\right\} \\ &\le \left(1 + \frac{c'm}{T}\right)\operatorname{mes}\left(\bigcup_{l=k+1}^{K^*} \Phi_l\right) \le \left(1 + \frac{c'm}{T}\right)\frac{\operatorname{mes}(\widehat{F})}{1-\delta}.\end{aligned}$$

На низшем уровне k каждый k-блок $C_z^{(k)} \subset \Phi_k$ имеет не более $(2m+1)^d - 1$ соседей $H_k(z_* + Q)$ таких, что $|x - z_*|_+ \le m$; их общий объем составляет

$$((2m+1)^d - 1) \operatorname{mes} C_z^{(k)}.$$

По этой причине общий объем k-блоков, включенных в Ψ_+, из-за их близости к k-блокам из Φ_k оценивается следующим образом:

$$\operatorname{mes}\{x : \operatorname{dist}(x, \Phi_k) < mH_k\} \le (2m+1)^d \operatorname{mes}(\Phi_k) \le \frac{c'' m^d}{K^* - K_* + 1} \frac{\operatorname{mes}(\widehat{F})}{1 - \delta}.$$

Оценка леммы представляет собой соединение двух приведенных неравенств. $\square$

3.3. Доказательство теоремы 1.1. Проделанные вычисления позволяют доказать теорему 1.1. В большей части промежуточных выкладок можно указать и грубые оценки погрешности, вызванной использованием срезок для того, чтобы локализовать пробную функцию на требуемом множестве. Однако использование в качестве приближения к $\mathscr{S}$ аналога этой характеристики для течений слабосжимаемых жидкостей $\mathscr{S}_\alpha$ не позволяет включить такого рода уточнения в окончательный результат.

По (3.13)

$$\mathfrak{S}(rQ \backslash M) \le \left(1 + \frac{C_1}{T^\gamma}\right) \mathscr{C}_{T^{-\gamma}} \max_z \operatorname{mes}(\widehat{F}[z])$$
$$= \left(1 + \frac{C_1}{T^\gamma}\right) (\mathscr{S} + (\mathscr{C}_{T^{-\gamma}} - \mathscr{S})) \max_z \operatorname{mes}(\widehat{F}[z]),$$

поэтому за счет увеличения T можно подавить разницу между $\mathscr{S}$ и $\mathscr{C}_{T^{-\gamma}}$ (см. лемму A.1) и заключить, что

$$\lim_{r \to \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\mathfrak{S}(rQ \backslash M)}{(\ln r)^{2/d}} > \frac{d}{\nu} \mathscr{S} + \varepsilon \right\} = 0. \quad \square$$

4. Нижняя граница для рэлеевского отношения

4.1. «Оптимальные» пустоты. Конечная цель последующих вычислений — показать, что типичная конфигурация «скелета» пористой среды M включает большие пустоты, которые могут служить носителями функций с рэлеевскими отношениями, произвольно близкими к $\underline{\mathscr{S}}(\frac{d}{\nu} \ln r)^{2/d}$. Рассматриваемые ниже пустоты строим, отправляясь от конечных множеств $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ в форме объединений занятых и свободных «ячеек» $E_I \cup D_J$, где в обозначениях (1.6)

$$E_I = \bigcup_{z \in I} (z + Q), \quad D_J = \bigcup_{z \in J} (z + (Q \backslash W)). \tag{4.1}$$

Стоит отметить, что на этой начальной стадии построения рассматриваемые множества не случайны.

Лемма 4.1. *Для каждого $\varepsilon > 0$ и $\rho \ge \rho(\varepsilon) > 0$ можно указать конечные множества $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ такие, что*

$$\frac{\operatorname{mes}(E_J)}{\rho^d} < 1 + \phi(\varepsilon), \quad \mathfrak{S}(E_I \cup D_J) > (\underline{\mathscr{S}} - \phi(\varepsilon))\rho^2$$

и

$$E_I \cup D_J \subseteq K\rho Q,$$

где $K = K(\varepsilon)$ *не зависит от* ρ *и* $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\phi(\varepsilon) = 0$.

Доказательство. Выберем соленоидальную функцию с ограниченным носителем $u \in V_{bd}$ так, что

$$\int |u|^2 > \underline{\mathscr{L}}(1-\varepsilon^2)\rho^2 \int |\nabla \otimes u|^2, \quad \operatorname{mes}\{u \neq 0\} = \rho^d, \quad \{u \neq 0\} \subseteq K_u \rho.$$

Возможность выбора очевидна ввиду определения (1.11) и (A.3).

Зафиксируем нечетное целое число T и выберем $H_0 = H_0(T)$, $\delta = \delta(T)$, $j = j(T)$ и т. д., как в (2.16). Заметим, что выбор T пока не зависит от ε. Ниже для фиксированного ε параметр T будет выбираться достаточно большим, $T > t_\varepsilon$.

Параметр δ используется для того, чтобы классифицировать единичные кубические блоки $C_z^{(-1)} = z + Q$ как свободные ($z \in \mathbb{F}_{-1}$) или занятые ($z \notin \mathbb{F}_{-1}$) в зависимости от объема их пересечений с множеством $\{u \neq 0\}$:

$$z \in \mathbb{F}_{-1} \Longleftrightarrow \operatorname{mes}(\{u \neq 0\} \cap (z+Q)) \geq 1 - \delta.$$

Более крупные блоки $C_z^{(k)}$ определяются, как в (2.2)–(2.4). Блок уровня 0 и размера H_0 свободен, если

$$\frac{\operatorname{mes}\big(C_z^{(0)} \cap (\mathbb{F}_{-1} + Q)\big)}{\operatorname{mes}\big(C_z^{(0)}\big)} \geq 1 - \delta.$$

Легко видеть, что множество $\{u \neq 0\}$ порождает один или несколько свободных кластеров $F[z]$, состоящих из блоков размера H_0. Общий объем оболочек этих кластеров допускает оценку

$$\operatorname{mes}(\mathbb{F}_{-1} + Q) = \sum \operatorname{mes} \widehat{F}[z] \leq \frac{1}{1-\delta},$$

а их окрестности содержатся в кубе $K_u(\rho + cT^T)Q$, который покрывает, в свою очередь, куб $(2K_u\rho)Q$, если $\rho > cT^T$.

Используя леммы 3.1, 3.4 и формулы преобразования $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}^\alpha$ при изменении масштаба, можно заключить, что

$$\frac{\int |u|^2}{\int |\nabla \otimes u|^2} \leq \mathfrak{S}(\{u \neq 0\}) \leq (1 + cT^{-\gamma})\mathscr{C}_\alpha^{(2K_u)}(\max_z \operatorname{mes} \widehat{F}[z])^{2/d},$$

где $\mathscr{C}_\alpha^{(2K_u)}$ определено так же, как в (A.8). Поскольку $\lim\limits_{\alpha\searrow 0} \mathscr{C}_\alpha^{(2K_u)} = \mathscr{S}^{(2K_u)} \leq \underline{\mathscr{L}}$ (см. замечание A.1), выбор u гарантирует, что при достаточно большом T, $T \geq t_\varepsilon$ (и, следовательно, при достаточно малых $\alpha = \alpha(T)$ и $\delta = \delta(T)$), выполняется соотношение

$$\max_z \operatorname{mes} \widehat{F}[z] \geq \left(\frac{(1-\varepsilon^2)\underline{\mathscr{L}}\rho^2}{(1+cT^{-\gamma})\mathscr{C}_\alpha^{(2K_u)}}\right)^{d/2} \geq (1 - 2\varepsilon^2)^{d/2}\rho^d.$$

Таким образом, объем, покрытый всеми свободными 0-блоками $H_0(z+Q)$, составляет по меньшей мере $(1-2\varepsilon^2)^{d/2}\rho^d$. Кроме того, по выбору свободных блоков размеров $H_{-1} = 1$ и H_0 можно заключить, что

$$\operatorname{mes}((\mathbb{F}_{-1} + Q) \cap \{u \neq 0\}) \geq (1-\delta)^2 \sum \operatorname{mes}(\widehat{F}[z]) \geq (1 - 3\varepsilon^2)^{d/2}\rho^d.$$

Следовательно, бо́льшую часть носителя u покрывают свободные блоки уровня -1:

$$\operatorname{mes}(\{u \neq 0\} \backslash ((\mathbb{F}_{-1} + Q))) \leq \rho^d - (1 - 3\varepsilon^2)^{d/2} \rho^d \leq \frac{3d}{2} \varepsilon^2 \rho^d. \tag{4.2}$$

Положим

$$I = \mathbb{F}_{-1} \cup \left\{ z : z \notin \mathbb{F}_{-1}, \frac{\operatorname{mes}((z+Q) \cap \{u \notin 0\})}{\operatorname{mes}(z+Q)} \geq \varepsilon \right\},$$

$$J = \left\{ z : z \notin \mathbb{F}_{-1}, 0 < \frac{\operatorname{mes}((z+Q) \cap \{u \notin 0\})}{\operatorname{mes}(z+Q)} < \varepsilon \right\}.$$

По построению все блоки, которые составляют $E_I \cup D_J$, содержатся в $K_u \rho Q$. Также по построению (при условии, что $T \geq t_\varepsilon$)

$$\operatorname{mes}(E_I) \leq \frac{\operatorname{mes}\{u \neq 0\}}{1 - \delta} + \frac{\operatorname{mes}(\{u \neq 0\} \backslash ((\mathbb{F}_{-1} + Q)))}{\varepsilon} \leq (1 + C\varepsilon) \rho^d.$$

Остается показать, что максимальное рэлеевское отношение для соленоидальных функций на $E_I \cup D_J$ может быть близко к $\underline{\mathscr{L}}$. Чтобы построить функцию с большим рэлеевским отношением, можно модифицировать исходную функцию u, обращающуюся в нуль вне $E_I \cup D_J$. Изменения проводятся на D_J отдельно на каждом подблоке $z + Q$, $z \in J$.

Пусть $\zeta_z^W : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ — гладкая функция такая, что

$$\zeta_z^W(x) = \begin{cases} 1, & x \notin z + Q, \\ 0, & x \in z + W, \end{cases} \qquad \left|\nabla \zeta_z^W(x)\right| \leq c.$$

Дивергенция функции $\zeta_z^W u$ равна $\nabla \cdot (\zeta_z^W u) = \nabla \zeta_z^W \cdot u$, и из соленоидальности u следует, что

$$\int\limits_{z+Q \backslash W} \nabla \zeta_z^W \cdot u \, dV = \int\limits_{\partial(z+Q)} (u \cdot \mathbf{n}) \, dS = \int\limits_{z+Q} \nabla \cdot u \, dV = 0.$$

Значит, существует функция $w_z \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(z + Q \setminus W)$ (см. например, [6, гл. III, лемма 3.1]) такая, что

$$\nabla \cdot w_z = -\nabla \cdot \left(\zeta_z^W u\right)$$

и

$$\int\limits_{z+Q \backslash W} (|w_z|^2 + |\nabla \otimes w_z|^2) \leq C \int\limits_{z+Q \backslash W} \left(\nabla \zeta_z^W \cdot u\right)^2.$$

По предложению 2.2

$$\int\limits_{z+Q \backslash W} (|w_z|^2 + |\nabla \otimes w_z|^2) \leq C \int\limits_{z+Q \backslash W} (\nabla \zeta_z^W \cdot u)^2 \leq C' \varepsilon^{1/d} \int\limits_{z+Q} |\nabla \otimes u|^2.$$

Функция

$$U(x) = \begin{cases} \zeta_z^W(x) u(x) + w_z(x), & x \in z + Q \backslash W, \ z \in J, \\ u(x), & x \notin D_J, \end{cases}$$

соленоидальна и удовлетворяет следующему неравенству (где $D_J^+ = \bigcup_{z\in J}(z+Q)$):

$$\frac{\int |U|^2}{\rho^2 \int |\nabla\otimes U|^2} \geq \frac{\int |u|^2 - C\varepsilon^{1/d} \int_{D_J^+} |\nabla\otimes u|^2}{\rho^2(\int |\nabla\otimes u|^2 + C\varepsilon^{1/d} \int\limits_{D_j^+} |\nabla\otimes u|^2)}$$

$$\geq \frac{\underline{\mathscr{L}}(1-\varepsilon^2)}{1+C\varepsilon^{1/d}} - \frac{C\varepsilon^{1/d}}{\rho^2} \geq (1 - C'\varepsilon^{1/d})\underline{\mathscr{L}}.$$

Это доказывает лемму. $\square$

4.2. Доказательство теоремы 1.2.

Выберем малое положительное число ε. Лемма 4.1 гарантирует существование множеств $I = I(\varepsilon,\rho) \subset \mathbb{Z}^d$, $J = J(\varepsilon,\rho) \subset \mathbb{Z}^d$ и функции $\rho = \rho(\varepsilon)$ таких, что

$$E_I \cup D_J \subseteq K^*(\varepsilon)\rho, \qquad \frac{\operatorname{mes} E_I}{\rho^d} \leq (1+\varepsilon^2)$$

и

$$\frac{\mathfrak{S}(rQ\backslash M)}{\rho^2} \geq (1-\varepsilon)\underline{\mathscr{L}}, \tag{4.3}$$

если только $\rho \geq \rho(\varepsilon)$ и свободное пространство $rQ\backslash M$ содержит хотя бы одно подмножество, полученное сдвигом $E_I \cup D_J$ на целочисленный вектор $z \in \mathbb{Z}^d$.

Выберем еще

$$\hat\rho = \frac{1-3\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\sqrt[d]{\frac{d}{\nu}\ln r}$$

и разбиение rQ на кубы $\widetilde{C}(z) = N(z+Q)$ нечетного целого размера $N = N(r)$ так, что

$$2 < \frac{N(r)}{K^*(\varepsilon)\hat\rho} < 10.$$

Рассмотрим события $A_z = \{$все ячейки в $Nz + E_I$ свободны$\}$, $C(z) \subseteq rQ$. По независимости «меток» ξ_z в (1.6) события A_z независимы. Они все имеют вероятность

$$p_r = \mathbf{P}(A_z) = \prod_{z\in I} \mathbf{P}\{\xi_z = 0\} = \exp\{-\nu \operatorname{mes} E_I\} \geq \exp\{-d(1-3\varepsilon)\ln r\}.$$

Число L кубов $\widetilde{C}(z)$ без общих точек, которые содержит rQ, допускает оценку

$$L \geq \left(\frac{r}{10K^*(\varepsilon)\hat\rho}\right)^d = \exp\left\{d\ln r\left(1 - \frac{\ln(10K^*(\varepsilon)) + \ln\hat\rho}{\ln r}\right)\right\}.$$

Для того чтобы удовлетворить неравенство (4.3), достаточно, чтобы произошло хотя бы одно из событий A_z. Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mathfrak{S}(rQ\backslash M)}{\left(\frac{1-3\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\sqrt[d]{\frac{d}{\nu}\ln r}\right)^2} \geq (1-\varepsilon)\underline{\mathscr{L}}\right\}$$

$$\geq \mathbf{P}\Big(\bigcup_{z:\widetilde{C}(z)\subset rQ} A_z\Big) \geq 1 - (1-p_r)^L \geq 1 - \exp\{-Lp_r\}.$$

Если r достаточно велико, то

$$Lp_r \geq \exp\biggl\{d\ln r\biggl(1 - \frac{\ln(10K^*(\varepsilon)) + \ln\hat{\rho}}{\ln r}\biggr) - d(1-3\varepsilon)\ln r\biggr\} \geq \exp\{-C\varepsilon\ln r\}.$$

Следовательно, для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{r\to\infty}\mathbf{P}\biggl\{\frac{\mathfrak{S}(rQ\backslash M)}{\left(\frac{d}{\nu}\ln r\right)^{2/d}} \geq \left(\frac{1-3\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\right)^2(1-\varepsilon)\underline{\mathscr{S}}\biggr\} = 1,$$

что дает нижнюю границу теоремы. $\square$

А. Приложение. Приближение слабой сжимаемости

Содержание этого раздела составляет сравнение нескольких вариантов максимального рэлеевского отношения для функций из пространства Соболева $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, обращающихся в нуль вне множества единичной лебеговой меры.

А.1. Верхняя граница для максимального рэлеевского отношения. Аналогом (1.10) для уравнений, описывающих течения сжимаемой жидкости со сжимаемостью $\alpha > 0$, является величина

$$\mathscr{C}_\alpha = \sup\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^d}|u(x)|^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}^d}(|\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{\alpha}(\nabla\cdot u(x))^2)\,dx} : \operatorname{mes}\{u \neq 0\} \leq 1\right\}. \tag{A.1}$$

Непосредственно из определения следует, что $\mathscr{C}_\alpha$ — неубывающая функция от α и

$$\forall\alpha \quad \mathscr{S} \leq \mathscr{C}_\alpha \leq \Lambda, \tag{A.2}$$

где $1/\Lambda$ — наименьшее собственное число оператора Лапласа, действующего на функции $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, которые обращаются в нуль вне регулярного множества единичной лебеговой меры,

$$\Lambda = \sup\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)^2\,dx}{\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\phi(x)|^2\,dx} : \phi \in W_2^1(\mathbb{R}^d),\ \operatorname{mes}\{\phi \neq 0\} \leq 1\right\}.$$

Все три величины в (А.2) определяются одной размерностью d.

Меняя пространственный масштаб, легко видеть, что для функции, обращающейся в нуль вне множества лебеговой меры V, определения (1.10) и (А.1) доставляют оценки

$$\int|u|^2 \leq V^{2/d}\mathscr{S}\int|\nabla u|^2, \quad \text{если} \quad \nabla\cdot u = 0, \tag{A.3}$$

и

$$\int|u|^2 \leq V^{2/d}\mathscr{C}_\alpha\int\left(|\nabla\otimes u|^2 + \frac{1}{\alpha}(\nabla\cdot u)^2\right) \tag{A.4}$$

без предположения соленоидальности.

Поскольку величина $\mathscr{C}_\alpha$ равномерно по α ограничена, существует предел

$$\mathscr{C} = \lim_{\alpha\searrow 0}\mathscr{C}_\alpha \geq \mathscr{S},$$

и, таким образом,

$$\mathscr{C}_\alpha = \mathscr{C} + G(\alpha), \quad \lim_{\alpha\searrow 0}G(\alpha) = 0. \tag{A.5}$$

Определения $\mathscr{C}$ и $\mathscr{S}$ не исключают существования положительного «зазора» $\mathscr{C} - \mathscr{S}$. Этого зазора, однако, не существует.

Лемма A.1. *Верхние грани в* (1.10) *и* (A.5) *совпадают:* $\mathscr{C} = \mathscr{S}$.

Главным в доказательстве леммы является проверка того, что существует соленоидальная функция из $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, которая обращается в нуль вне множества единичной меры и имеет достаточно большую в сравнении с L^2-нормой градиента норму в L^2. Ее построение составляет содержание лемм A.2 и A.3 ниже.

Лемма A.2. *Существуют сходящаяся к нулю последовательность* $\alpha_k \searrow 0$ *и последовательность функций* $u_k \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, *которые удовлетворяют следующим условиям:*

(a) *при каждом* k

$$\mathrm{mes}\{u_k \neq 0\} = 1, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u_k|^2 = 1,$$

и

$$(\mathscr{C} - \alpha_k) \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla \otimes u_k|^2 + \frac{1}{\alpha_k} (\nabla \cdot u_k)^2 \right) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u_k|^2; \tag{A.6}$$

(b) *для каждого* $\gamma > 0$ *существует шар* $r_\gamma B \subseteq \mathbb{R}^d$ *такой, что*

$$\limsup \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus r_\gamma B} (1 + |u_k|^2) \leq \gamma.$$

Лемма A.3. *Пусть* (u_k) — *последовательность функций, удовлетворяющая условиям* (a), (b) *леммы* A.2. *Эта последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся к функции* $u_\infty \in \mathring{W}^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ *сильно в* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *и слабо в каждом из пространств* $W^{1,2}(rB)$, $r > 0$. *Предельная функция удовлетворяет неравенству* $\mathrm{mes}\{u_\infty \neq 0\} \leq 1$. *Кроме того,*

$$\mathscr{C} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla \otimes u_\infty|^2 \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u_\infty|^2 = 1, \quad \nabla \cdot u_\infty = 0.$$

Доказательство леммы A.1 ведется методом от противного. Предположим, что

$$\mathscr{C} = \mathscr{S} + \beta, \quad \beta > 0. \tag{A.7}$$

Леммы A.2 и A.3 показывают, что существует ненулевая соленоидальная функция такая, что

$$(\mathscr{S} + \beta) \int |\nabla \otimes u_\infty|^2 \leq \int |u_\infty|^2 = 1.$$

Однако по (A.3)

$$\int |u_\infty|^2 \leq \mathscr{S} \int |\nabla \otimes u_\infty|^2.$$

Следовательно, предположение (A.7) ошибочно. $\square$

Доказательство леммы A.3. Для рассматриваемой последовательности обе величины $|u_k|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ и $|\nabla \otimes u_k|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ равномерно ограничены. Значит, последовательность допускает равномерную оценку интегрального модуля непрерывности:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |u_k(x + h) - u_k(x)|^2 \leq c|h|.$$

Кроме того, для каждого $\gamma > 0$ все функции u_k, за исключением конечного числа, удовлетворяют неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus r_\gamma B} (1 + |u_k|^2) \le \gamma.$$

Известные критерии компактности в $L^2(\mathbb{R}^d)$ (см., например, [10, гл. X, п. 1] или [11, гл. V, п. 5.1]) гарантируют существование сходящейся подпоследовательности $(u_{k'}) \prec (u_k)$, которая сходится сильно в $L^2(\mathbb{R}^d)$ к функции u_∞. По построению $|u_\infty|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{|u_\infty| \ge \varepsilon\} &\le \limsup(\operatorname{mes}\{|u_\infty - u_{k'}| \ge \varepsilon/2\} + \operatorname{mes}\{|u_{k'}| \ge \varepsilon/2\}) \\ &\le \limsup\left(\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 |u_\infty - u_{k'}|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 1\right) = 1.\end{aligned}$$

Для каждого шара $B_l = \{|x| < l\}$, $l = 1, 2, \dots$, гильбертово пространство $W^{1,2}(B_l)$ сепарабельно и рефлексивно (см., например, [11, гл. V, теорема 3.1]), а $W_2^1(B_l)$-нормы $u_{k'}$ равномерно ограничены. Поэтому можно перейти к меньшей подпоследовательности $u_{k''} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, для которой сужения на каждый из шаров B_l слабо сходятся в пространстве $W^{1,2}(B_l)$. $W^{1,2}(B_l)$-слабые пределы сужений $u_{k''}|_{B_l}$ могут быть отождествлены с $u_\infty|_{B_l}$. Сказанное подразумевает слабую в $L^2(B_l)$ сходимость градиентов, $\nabla \otimes u_{k''} \to \nabla \otimes u_\infty$, поэтому по выбору исходной последовательности (A.6)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla \otimes u_\infty|^2 = \lim_{l\to\infty} \int\limits_{B_l} |\nabla \otimes u_\infty|^2 \le \lim_{l\to\infty} \limsup \int\limits_{B_l} |\nabla \otimes u_{k''}|^2 \le \frac{1}{\mathscr{C}}$$

(см. [10, гл. V, теорема 1.1]). Предельная функция также соленоидальна: для любой скалярной пробной функции $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\int u_\infty \cdot \nabla\phi = \lim \int u_{k''} \cdot \nabla\phi = \lim \int (\nabla \cdot u_{k''})\phi,$$

а по (A.6)

$$\limsup \left| \int (\nabla \cdot u_{k''})\phi \right| \le \lim \sqrt{\alpha_{k''}} |\phi|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0. \quad \square$$

Замечание A.1. Пусть $\mathscr{C}^{(R)} = \lim\limits_{\alpha \searrow 0} \mathscr{C}^{(R)}_\alpha$, где

$$\mathscr{C}^{(R)}_\alpha = \sup\left\{ \frac{\int |u|^2}{\int (|\nabla \otimes u|^2 + \frac{1}{\alpha}(\nabla \cdot u)^2)} : u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(RQ),\ \operatorname{mes}\{u \ne 0\} \le 1 \right\}$$

и

$$\mathscr{S}^{(R)} = \sup\left\{ \frac{\int |u|^2}{\int |\nabla \otimes u|^2} : u \in \mathbf{V}(RQ),\ \operatorname{mes}\{u \notin 0\} \le 1 \right\}. \tag{A.8}$$

Можно выбрать числовую последовательность $\alpha_k \searrow 0$ и последовательность функций u_k с носителями в RQ, которые удовлетворяют условиям (a) леммы A.2. Поскольку шары в $L^2(RQ)$ слабо предкомпактны, можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(RQ)$ к функции из $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(RQ)$. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы A.3, можно заключить, что

$$\mathscr{S}^{(R)} = \mathscr{C}^{(R)}.$$

Доказательство леммы А.2. (i) Выберем сначала произвольную строго положительную последовательность, сходящуюся к нулю $\alpha_k \searrow 0$, и последовательность функций $U_k(x)$, удовлетворяющую условию (a) леммы. Существование такой последовательности вытекает непосредственно из определения $\mathscr{C}_\alpha$ и (A.5). Выбор ее не единствен — можно было бы, например, изменить аргумент x на $x - \xi_k$, $\xi_k \in \mathbb{R}^d$, не меняя интегралов в (A.6).

Зафиксируем произвольное (в дальнейшем малое положительное) число $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ и показатель $A > 10d$. Эти два параметра будут использованы для классификации единичных кубов-ячеек $z + Q$ в соответствии с частью объема, которую занимают в них множества $\{U_k \neq 0\}$. Каждая из функций $U = U_k$ исходной последовательности, удовлетворяющей (A.6), порождает собственную классификацию такого рода.

Фиксируем пока номер функции k и определяем множество $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\delta,k}$ целочисленных векторов $z \in \mathbb{Z}^d$, нумерующее «свободные» ячейки (где U_k отлична от нуля на заметной части объема) соотношением

$$z \in \mathbb{F}_{\delta,k} \Longleftrightarrow |\{U_k \neq 0\} \cap (z + Q)| > \delta^A.$$

Множество $\mathbb{F}_{\delta,k}$ конечно, и выбор функций из (A.6) доставляет очевидную оценку

$$\operatorname{card}(\mathbb{F}_{\delta,k}) \leq \delta^{-A}. \tag{A.9}$$

Очевидно, что зависимость $\mathbb{F}_{\delta,k}$ от δ монотонна для каждого фиксированного номера функции k: если $\delta'' < \delta'$, то

$$\mathbb{F}_{\delta',k} \subseteq \mathbb{F}_{\delta'',k}. \tag{A.10}$$

В дальнейшем будет удобно говорить, что две точки $z', z'' \in \mathbb{F}_{\delta,k}$ принадлежат одной компоненте свободного множества $\mathbb{F}_{\delta,k}$, если их можно соединить цепочкой смежных точек целочисленной решетки, принадлежащих множеству $\mathbb{F}_{\delta,k}$. Иначе говоря, или $|z' - z''| = 1$, или пару z', z'' можно дополнить $L \geq 1$ точками z_j с тем, чтобы получить последовательность $z_0 = z''$, $z_1, \ldots, z_{L+1} = z''$, удовлетворяющую условию

$$z_j \in \mathbb{F}_{\delta,k} \quad |z_j - z_{j+1}| = 1, \quad j = 0, \ldots, L. \tag{A.11}$$

Для каждой пары параметров δ, k множество $\mathbb{F}_{\delta,k}$ состоит из конечного числа $M = M(k, \delta)$ компонент,

$$\mathbb{F}_{\delta,k} = \bigcup_{m=1}^{M} \mathbb{C}_{\delta,k,m}. \tag{A.12}$$

«Свободное» подмножество $\mathbb{Z}^d$ порождает массивное «свободное» множество

$$F_{\delta,k} = \bigcup_{z \in \mathbb{F}_{\delta,k}} (z + \overline{Q}), \tag{A.13}$$

а каждая его компонента $\mathbb{C}_{\delta,k,m}$ — собственное массивное множество

$$C^0_{\delta,k,m} = \bigcup_{z \in \mathbb{C}_{\delta,m}} (z + Q).$$

Множества $C^0_{\delta,k,m}$ не имеют общих точек. Для малых δ δ-окрестность $F^\delta_{\delta,k}$ свободного множества $F_{\delta,k}$ представляет собой объединение не имеющих общих точек множеств $C_m = C_{\delta,k,m}$, являющихся δ-окрестностями $C^0_{\delta,k,m}$:

$$F^\delta_{\delta,k} = \bigcup_{m=1}^{M} C_{\delta,k,m}, \quad C_{\delta,k,m'} \cap C''_{\delta,k,m''} = \varnothing, \text{ если } m' \neq m. \tag{A.14}$$

Удобно ввести массивные множества еще одного типа:

$$C^+_{\delta,k,m} = \bigcup_{z:\mathrm{dist}(z,\mathbb{C}_{\delta,k,m})\le 1} (z+Q),$$

соответствующие 1-окрестностям компонент $\mathbb{C}_{\delta,k,m}$ на решетке $\mathbb{Z}^d$. Заметим, что при $\delta \le \frac{1}{3}$

$$C^+_{\delta,k,m} \supseteq C_{\delta,k,m} \supseteq C^0_{\delta,k,m}.$$

По построению каждая пара вершин $z', z'' \in C^+_{\delta,k,m} \cap \mathbb{Z}^d$ может быть соединена цепочкой смежных вершин из $\mathbb{C}_{\delta,k,m}$. Поэтому диаметр каждого множества $C^+_{\delta,k,m}$ допускает оценку

$$\mathrm{diam}(C^+_{\delta,k,m}) \le c\delta^{-A}, \quad m = 1, \dots, M. \tag{A.15}$$

(ii) Следующая цель — показать, что для малых δ большая часть объема $F^\delta_{\delta,k}$ сосредоточена в одной из компонент $C_m = C_{\delta,k,m}$ «свободного» множества $F_{\delta,k}$. Непосредственно из предложения 2.2 следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus F_{\delta,k}} |U_k|^2 \le c\delta^{A/d} \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus F_{\delta,k}} |\nabla \otimes U_k|^2. \tag{A.16}$$

Поэтому для малых δ «свободное» множество не может быть пустым — в этом случае приведенная выше оценка противоречила бы (A.6).

При более детальном анализе строения множества $F_{\delta,k}$ будет удобно использовать гладкие (класса C^∞) срезающие функции $\zeta = \zeta_{\delta,k}(x) : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ такие, что

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_{\delta,k}, \\ 0, & \mathrm{dist}(x, F_{\delta,k}) \ge \delta, \end{cases} \qquad |\nabla\zeta(x)| \le C/\delta \tag{A.17}$$

(см. детали построения в [7, примечание к (3.7)]).

Поскольку $U_k = \zeta U_k + (1-\zeta)U_k$, неравенство Коши и (A.16) доставляют следующую оценку для интеграла в правой части (A.6): при $\kappa = \sqrt{\delta^{A/d}}$

$$\begin{aligned} \int |U_k|^2 &\le (1+\kappa)\int |\zeta U_k|^2 + \left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\int |(1-\zeta)U_k|^2 \\ &\le (1+\kappa)\int |\zeta U_k|^2 + \left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus F_{\delta,k}} |U_k|^2 \\ &\le (1+\sqrt{\delta^{A/d}})\int |\zeta U_k|^2 + c\sqrt{\delta^{A/d}}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus F_{\delta,k}} |\nabla\otimes U_k|^2. \end{aligned} \tag{A.18}$$

По выбору срезающей функции произведение ζU_k может быть представлено суммой функций, у которых носители содержатся в отдельных компонентах (A.14):

$$\zeta(x)U_k(x) = \sum_{m=1}^M \zeta(x)U_k(x)1_{C_m}(x), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\zeta U_k|^2 = \sum_{m=1}^M \int\limits_{B_m} |\zeta U_k|^2, \tag{A.19}$$

где $B_m = C_m \cap \{U_k \neq 0\}$. Положим $V_m = \operatorname{mes}(B_m)$ и выберем пару положительных параметров $\alpha' > 0$, $\kappa' > 0$. Тогда из (A.4), формулы дифференцирования ζU_k и формулы Коши следует, что

$$\int\limits_{B_m} |\zeta U_k|^2 \leq V_m^{2/d} \mathscr{C}_{\alpha'} \int\limits_{B_m} \left(|\nabla \otimes (\zeta U_k)|^2 + \frac{1}{\alpha'} (\nabla \cdot (\zeta U_k))^2 \right) \leq V_m^{2/d} \Bigg\{ (1+\kappa') \mathscr{C}_{\alpha'}$$
$$\times \int\limits_{B_m} \left(|\nabla \otimes U_k| + \frac{1}{\alpha'} (\nabla \cdot U_k)^2 \right) c \left(1 + \frac{1}{\kappa'}\right) \left(1 + \frac{1}{\alpha'}\right) \int\limits_{B_m \cap \{\nabla\zeta \neq 0\}} |\nabla \zeta \otimes U_k|^2 \Bigg\}. \tag{A.20}$$

При оценке интеграла, содержащего производные срезающей функции ζ, заметим, что каждый из блоков $z+Q$, не содержащийся в множестве $F_{\delta,k}$, может иметь общие точки не более чем с 3^d компонентами C_m. Поэтому неравенства (A.16) и (A.17) показывают, что

$$\sum_{m=1}^{M} \int\limits_{B_m \cap \{\nabla\zeta \neq 0\}} |\nabla \zeta \otimes U_k|^2 \leq c\delta^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus F_{\delta,k}} |U_k|^2 \leq c\delta^{A/d-2} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus F_{\delta,k}} |\nabla \otimes U_k|^2.$$

Выберем теперь параметры (A.20) равными $\alpha' = \delta$ и $\kappa = \delta$. В этом случае $\mathscr{C}_{\alpha'} = \mathscr{C} + G(\delta)$, и после суммирования неравенств, относящихся к отдельным компонентам B_m, указанные выше неравенства приводят к оценке

$$\int |U_k|^2 \leq (\max_m V_m)^{2/d} \mathscr{C}_{\alpha'} (1+\kappa')(1+\sqrt{\delta^{A/d}}) \int\limits_{F^\delta_{\delta,k}} \left(|\nabla \otimes U_k|^2 + \frac{1}{\alpha'} (\nabla \cdot U_k)^2 \right)$$
$$+ c\left(\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha'}\right) \delta^{A/d-2} + \sqrt{\delta^{A/d}} \right) \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus F_{\delta,k}} |\nabla \otimes U_k|^2$$
$$\leq (\mathscr{C} + G(\delta))(1+c\delta)(\max_m V_m^{2/d} + c\delta^{A_+})$$
$$\times \int \left(|\nabla \otimes U_k|^2 + \frac{1}{\delta} (\nabla \cdot U_k)^2 \right), \quad A_* = \min\left\{ \frac{A}{d} - 4, \frac{A}{2d} \right\} > 1. \tag{A.21}$$

В сочетании с (A.6) это неравенство показывает, что в случае $\alpha_k \leq \delta$ с необходимостью

$$\frac{\mathscr{C} - \delta}{\mathscr{C} + G(\delta)} \frac{1}{1+\delta} - c\delta^{A_*} \leq \max_m V_m^{2/d},$$

что при малых δ сводится к

$$\max_m V_m \geq 1 - c(G(\delta) + \delta). \tag{A.22}$$

(iii) Удобно на этой стадии «подправить» функции U_k, отвечающие достаточно малым значениям α_k, так, чтобы удовлетворить условию (b) леммы.

С этой целью выберем число δ_0 настолько малым, чтобы правая часть (A.22) превосходила $\frac{3}{4}$. Поскольку суммарная мера множества $\{U_k \neq 0\}$ равна единице, $\mathbb{F}_{\delta_0,k}$ содержит всего одну компоненту $\mathbb{C}_{\delta_0,k,m^*}$ такую, что $V_{m^*} \geq \frac{3}{4}$. Уже отмечалось, что перенос — замена $U_k(x)$ на $U_k(x-\xi_k)$ — не изменяет интегралов в условии (a). Поэтому можно выбрать сдвиг так, чтобы удовлетворить условию $-\xi_k \in C_{\delta_0,k,m^*}$, т. е. добиться, чтобы начало координат содержалось внутри наибольшей компоненты $\xi_k + C_{\delta_0,k,m^*}$ свободного множества функции $u_k(x) = U_k(x+\xi_k)$, «подправленной» переносом:

$$0 \in \xi_k + C_{\delta_0,k,m^*} = \{x : x - \xi_k \in C_{\delta_0,k,m^*}\}.$$

Как бы причудлива ни была точная форма множества $\{u_k \neq 0\}$, указанные выше условия гарантируют, что начало координат накрывается по крайней мере множеством $C^+_{\delta_0,k,m^*}$, соответствующим компоненте множества $\mathbb{F}_{\delta_0,k}$, у которой δ_0-окрестность имеет наибольшую меру.

Для того же номера функции k и меньших значений параметра $\delta < \delta_0$ наибольшая компонента $\mathbb{C}_{\delta,k,m^+} \subset \mathbb{Z}^d$ множества, нумерующего свободные ячейки, необходимо включает $\mathbb{C}_{\delta_0,k,m^*}$. По (A.22) лебегова мера множества $\{u_k \neq 0\}$ составляет не менее $\frac{3}{4}$ в каждом из двух «главных» массивных множеств C_{δ_0,k,m^*}, C_{δ,k,m^+}, соответствующих значениям δ_0 и δ параметра, определяющего концентрацию свободных ячеек. Суммарный свободный объем постоянен, $\operatorname{mes}\{u_k \neq 0\} = 1$, что делает невозможным отсутствие общих точек в C_{δ_0,k,m^*} и C_{δ,k,m^+}. Но эти множества имеют непустое пересечение только в том случае, когда их «каркасы» $\mathbb{C}_{\delta_0,k,m^*}, \mathbb{C}_{\delta,k,m^+} \subset \mathbb{Z}^d$ содержат общие или хотя бы смежные точки:

$$\exists z^* \in \mathbb{C}_{\delta_0,k,m^*}, z^+ \in \mathbb{C}_{\delta,k,m^+} \quad |z^* - z^+| \leq 1.$$

Поскольку все точки $\mathbb{C}_{\delta_0,k,m^*}$ необходимо принадлежат одной и той же компоненте $\mathbb{F}_{\delta,k}$ и являются к тому же (δ,k)-свободными и смежными, приведенные соображения позволяют заключить, что в действительности $\mathbb{C}_{\delta_0,k,m^*} \subseteq \mathbb{C}_{\delta,k,m^+}$ и $C^+_{\delta_0,k,m^*} \subseteq C^+_{\delta,k,m^+}$; таким образом, начало координат содержится внутри C^+_{δ,k,m^+}, а также в большем шаре

$$\widetilde{K}_\delta = (2c\delta^{-A})B = \{x : |x| \leq 2c\delta^{-A}\} \supseteq C^+_{\delta,k,m^+}, \tag{A.23}$$

потому что

$$\operatorname{diam}(C^+_{\delta,k,m^+}) \leq c\delta^{-A}.$$

Тем самым (A.22) показывает, что

$$\operatorname{mes}(\{u_k \neq 0\} \cap (\mathbb{R}^d \backslash \widetilde{K}_\delta)) \leq c(G(\delta) + \delta). \tag{A.24}$$

(iv) Теперь можно получить оценку интеграла $|u_k|^2$ по дополнению множества $\widetilde{K}_\delta$. Заметим, что этот интеграл равен интегралу исходной «неперенесенной» функции U_k по части пространства, занятой или плотными кубами, или «неглавными» компонентами массивного свободного множества, чья суммарная мера не превосходит

$$1 - V_{m^+} \leq c(G(\delta) + \delta).$$

Поскольку наибольшая компонента свободного пространства теперь исключена, можно применить то же рассуждение, что при выводе (A.21), с использованием более грубых оценок через максимальное рэлеевское отношение для лапласиана Λ (см. (A.2)), чтобы получить из (A.18), (A.19) и (A.22) неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \backslash \widetilde{K}_\delta} |u_k|^2 \leq c\Lambda\big(\max_{m \neq m^+} V_m^{2/d} + c\delta^{A_*}\big) \int |\nabla \otimes U_k|^2 \leq c'(G(\delta) + \delta)^{2/d}. \tag{A.25}$$

(v) Для завершения доказательства остается выбрать, отправляясь от малого положительного числа $\gamma > 0$, значение $\delta = \delta(\gamma)$, при котором правые части

(A.24) и (A.25) обе не превосходят $\gamma/2$. Шар $r_\gamma B$ леммы — это шар из (A.23) с соответствующим диаметром $2r_\gamma$, который определяет $\delta = \delta(\gamma)$. $\square$

A.2. Максимальное рэлеевское отношение: случай компактного носителя.

Замечание A.2. Лемма A.1 используется для оценки сверху максимального рэлеевского отношения $\mathfrak{S}_r$, определенного в (1.7). Нижнюю оценку этой величины можно получить с помощью еще одного варианта рэлеевского отношения, введенного в (1.11).

Легко видеть, что

$$\underline{\mathscr{S}} = \sup_{R>0} \mathscr{S}^{(R)}, \tag{A.26}$$

где $\mathscr{S}^{(R)}$ задается равенством (A.8). Действительно, по определению $\underline{\mathscr{S}} \geq \sup\limits_{R>0} \mathscr{S}^{(R)}$. Всякая функция $u \in V_{bd}$ имеет компактный носитель, поэтому ее рэлеевское отношение не превосходит $\mathscr{S}^{(R)}$ при некотором $R > 0$. Следовательно, $\underline{\mathscr{S}} \leq \sup\limits_{R>0} \mathscr{S}^{(R)}$.

Оценки $\mathfrak{S}_r$ сверху и снизу может разделять положительный зазор — если (1.10) не совпадает с (1.11).

Лемма A.4. *В двумерном случае* ($d = 2$) *справедливо равенство*

$$\mathscr{S} = \underline{\mathscr{S}}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $u \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^d)$ такую, что $\operatorname{mes}\{u \neq 0\} \leq 1$ и $|u|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Цель последующих рассуждений — показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется соленоидальная функция U с компактным носителем, которая приближает функцию u так, что

$$|u - U|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon, \quad |\nabla \otimes u - \nabla \otimes U|_{L^2} \leq \varepsilon |\nabla \otimes u|_{L^2}, \quad \operatorname{mes}\{U \neq 0\} \leq 1 + \varepsilon.$$

(a) Исключение далеких точек. Выберем малое положительное число $\delta > 0$, большой положительный показатель $K > 0$ (ограничения, которым он должен удовлетворять, будут обсуждены ниже) и еще одно положительное число $R_0 > \delta$, достаточно большое, чтобы множество

$$A_0 = \{x : |x| > R_0,\ u(x) \neq 0\}$$

удовлетворяло условиям

$$\operatorname{mes}(A_0) \leq \delta^K, \quad \int\limits_{A_0} |\nabla u|^2 < \delta^K, \quad \int\limits_{A_0} |u|^2 < \delta^K. \tag{A.27}$$

Положим

$$R_n = \sqrt{A + \delta n}, \quad \Delta_n = R_{n+1} - R_n, \quad S_n = \{R_n \leq |x| < R_{n+1}\}.$$

Легко видеть, что для некоторых положительных констант c, c_i, N

$$\frac{\Delta_{n-1} + \Delta_n}{\Delta_n} \leq c, \quad c_1 \frac{\delta}{n} \leq \Delta_n^2 \leq c_2 \frac{\delta}{n} \quad \text{при } n \geq N.$$

Кольца S_n, $n \geq 0$, не имеют общих точек. Они покрывают всю ту часть плоскости, которая лежит вне окружности $\{|x| \leq R_0\}$:

$$\mathbb{R}^2 = \{|x| \leq R_0\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n \right).$$

По выбору R_n площади этих колец равномерно малы:

$$\mathrm{mes}(S_n) \le 2\pi\Delta_n R_{n+1} \le c\delta.$$

Поскольку ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, существуют произвольно большие значения n, для которых

$$\int\limits_{S_n} (1 + |u|^2 + |\nabla \otimes u|^2) \le \frac{\delta^K}{n}. \tag{A.28}$$

Такое значение n в дальнейшем фиксировано, а $\zeta : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ является $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$-гладкой срезающей функцией такой, что

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < R_n + \frac{1}{10}\Delta_n, \\ \\ 0, & |x| > R_n + \frac{7}{10}, \end{cases} \qquad |\nabla^{\otimes k}\zeta(x)| \le \frac{c}{\Delta_n^k}, \quad k \ge 1. \tag{A.29}$$

Функция ζu обращается в нуль при $|x| > R_n$, а ее дивергенция $\nabla \cdot (\zeta u) = \nabla\zeta \cdot u$ удовлетворяет неравенству

$$\int |\nabla \cdot (\zeta u)|^2 \le \frac{c}{\Delta_n^2} \int\limits_{S_n} |u|^2 \le c' \delta^{K-1}.$$

Кроме того,

$$\mathrm{mes}(S_n \cap \{u \ne 0\}) \le \frac{\delta^K}{n} \le c\delta^{K-1}\Delta_n^2.$$

Функция ζu не соленоидальна, поэтому нужно построить для нее «поправку», т. е. функцию w из пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(S_n^0)$ такую, чтобы была соленоидальна функция $U = \zeta u - w \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^d)$ (описанная поправка может быть выбрана не единственным образом). Условие, обеспечивающее существование поправки, выполнено (см. [12, § 3.2] или [1]):

$$\int\limits_{S_n} (\nabla \cdot (\zeta u))\, dV = -\int\limits_{|x| = R_n + \frac{1}{10}\Delta_n} (\mathbf{n} \cdot u)\, dS = -\int\limits_{|x| < R_n} (\nabla \cdot u)\, dV = 0. \tag{A.30}$$

Как бы ни была выбрана поправка w, функция $\zeta u - w$ вне множества $\{u \ne 0\}$ не обращается в нуль только на S_n, и потому

$$\mathrm{mes}\{U \ne 0\} \le \mathrm{mes}\{u \ne 0\} + c\delta. \tag{A.31}$$

Остается проверить, что построение можно осуществить так, чтобы $W^{1,2}$-норма $u - U$ была мала. С этой целью задача сводится к построению соленоидальных полей на малых звездных областях стандартной формы.

(b) Компенсация трансверсального потока. Удобно начать с построения функции на S_n, компенсирующей поток исходного поля скорости u через внешнюю границу кольца $\{|x| = R_{n+1}\}$ — потока, который исчезает при переходе к ζu из-за появления срезающего множителя.

Вычисления используют полярные координаты (r, θ), $0 < r < \infty$, $0 \le \theta < 2\pi$. Ниже сечение кольца S_n, которое соответствует полярному углу θ, обозначается через Σ_θ, а H_θ обозначает кольцевой сектор $\mathbb{R}^2$, ограниченный Σ_0, Σ_θ

и окружностями $C_{n-1} = \{|x| = R_n\}$, $C_n = \{|x| = R_{n+1}\}$. В исходных прямоугольных координатах единичный вектор внешней нормали к границе ∂H_θ имеет вид

$$\mathbf{n} = \begin{cases} \mathbf{e} = \frac{1}{|x|}x = (\cos\theta, \sin\theta), & x \in C_{n+1}, \\ -\mathbf{e}, & x \in C_n, \\ \mathbf{f}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta), & x \in \Sigma_\theta, \\ \mathbf{f}_0 = (0, 1), & x \in \Sigma_{0.} \end{cases}$$

Поток исходного поля u через границу H_θ равен нулю из-за того, что u соленоидально, поэтому

$$\int\limits_{\partial H_\theta} (\mathbf{n} \cdot u)\, dS = \int\limits_{\Sigma_\theta} (\mathbf{f}_\theta \cdot u)\, dS - \int\limits_{\Sigma_0} (\mathbf{f}_0 \cdot u)\, dS + \int\limits_{C_n} (\mathbf{e} \cdot u)\, dS - \int\limits_{C_{n-1}} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})\, dS = 0.$$

Для произведения ζu поток может быть ненулевым:

$$\int\limits_{\partial H_\theta} (\mathbf{n} \cdot \zeta u)\, dS = \int\limits_{\Sigma_\theta} (\mathbf{f}_\theta \cdot \zeta u)\, dS - \int\limits_{\Sigma_0} (\mathbf{f}_0 \cdot \zeta u)\, dS - \int\limits_{C_{n-1}} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{u})\, dS = \int\limits_{H_\theta} (\nabla\zeta \cdot u)\, dV.$$

Этот поток можно компенсировать функцией $W(x)\mathbf{f}_{\theta(x)}$, где

$$W(x) = \frac{1}{\Delta_n} Z\left(\frac{|x| - R_n}{\Delta_n}\right) \int\limits_{H_\theta} (\nabla\zeta \cdot u)\, dV, \tag{A.32}$$

а $Z(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — гладкая ограниченная функция такая, что

$$Z(t) = \begin{cases} 0, & t \notin (\frac{2}{10}, \frac{8}{10}), \\ \text{const}, & t \in (\frac{3}{10}, \frac{7}{10}), \end{cases} \qquad \int\limits_0^1 Z(t)\, dt = 1.$$

Очевидно, $\zeta u - W\mathbf{f}$ равна ζu на границе S_n. На сечениях Σ_θ и Σ_0 направление W совпадает с направлением внешней нормали, и только множитель $Z(\frac{1}{\Delta_n}(|x| - R_{n-1}))$ меняется в пределах сечения, поэтому дополнительный поток через сечение Σ_θ кольца S_n равен

$$\int\limits_{\Sigma_\theta} (\mathbf{f}_\theta \cdot W)\, dS = \frac{1}{\Delta_n} \int\limits_{R_n}^{R_n + \Delta_n} Z\left(\frac{r - R_n}{\Delta_n}\right) dr \int\limits_{H_\theta} (\nabla\zeta \cdot u)\, dV = \int\limits_{H_\theta} (\nabla\zeta \cdot u)\, dV.$$

Следовательно, для всякой пары полярных углов $0 \le \theta' < \theta'' \le 2\pi$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{\Sigma_{\theta''}} (\mathbf{f}_{\theta''} \cdot W\mathbf{f}_{\theta''})\, dS - \int\limits_{\Sigma_{\theta'}} (\mathbf{f}_{\theta'} \cdot W\mathbf{f}_{\theta'})\, dS = \int\limits_{H_{\theta''} \setminus H_{\theta'}} (\nabla\zeta \cdot u)\, dV.$$

Таким образом, поток векторного поля $\zeta u - W\mathbf{f}$ через границу $\partial(H_{\theta''} \setminus H_{\theta'})$ равен нулю для любого кольцевого сектора:

$$\int\limits_{\partial H_n} \mathbf{n} \cdot (\zeta u - W\mathbf{f})\, dS = \int\limits_{H_{\theta''} \setminus H_{\theta'}} \nabla\zeta \cdot u\, dV - \int\limits_{H_{\theta''} \setminus H_{\theta'}} \nabla\zeta \cdot u\, dV = 0. \tag{A33}$$

Зависимость W от полярного угла θ 2π-периодична по (A.30), поэтому (A.32) определяет гладкую функцию, обращающуюся в нуль вне кольца S_n.

Удобно записать матрицу Якоби $W\mathbf{f}$ с использованием частных производных $W(x(r,\theta))$ по полярным координатам:

$$\nabla\otimes(W\mathbf{f})=\nabla W\otimes\mathbf{f}+\frac{1}{r}W(\mathscr{P}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{f})=\frac{\partial W}{\partial r}\mathbf{e}\otimes\mathbf{f}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\mathbf{f}\otimes\mathbf{f}+\frac{1}{r}W(\mathscr{P}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{f}),\tag{A.34}$$

где $\mathscr{P}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

(c) Оценки для исходного векторного поля. Последующие вычисления преобразуют неравенства (A.28) в оценки L^2-норм $W\mathbf{f}$ и производных этой функции. Существенно, что начальную оценку (A.28) для L^2-нормы $|u|$ можно улучшить, воспользовавшись неравенством Пуанкаре — Фридрихса из предложения 2.2.

Определение W использует только сужение u на меньшее кольцо

$$S_n^-=\left\{x:R_n+\frac{1}{10}\Delta_n<|x|<R_n+\frac{8}{10}\Delta_n\right\}\subset S_n.$$

Можно разрезать это последнее на секторы с центральным углом $\alpha=\frac{2\pi}{n}$:

$$S_{n,k}=\left\{x\in S_n^-:\frac{k}{n}2\pi<\theta(x)\le\frac{k+1}{n}2\pi\right\}.$$

Каждый из этих секторов содержится в выпуклой области $C_{n,k}$, ограниченной лучами, выделяющими сектор, внешней круговой границей радиуса $R_n+\frac{8}{10}\Delta_n$ и хордой внутренней круговой границы радиуса $R_n+\frac{1}{10}\Delta_n$. Эта выпуклая область лежит внутри кольца S_n, если n достаточно велико. Действительно, $\Delta_n/R_n\ge\frac{1}{n}$, поэтому

$$\left(R_n+\frac{1}{10}\Delta_n\right)\cos\frac{\pi}{n}-R_n\ge R_n\left(\left(1+\frac{\Delta_n}{R_n}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{2n^2}\right)-1\right)>0.$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{diam}(C_{n,k})\le c'\Delta_n,\quad \operatorname{mes}(C_{n,k})\ge c''\Delta_n^2.$$

Доля площади $C_{n,k}$, приходящаяся на множество, где u не обращается в нуль, допускает оценку

$$\frac{\operatorname{mes}(\{u\ne0\}\cap C_{n,k})}{\operatorname{mes}(C_{n,k})}\le\frac{c\delta^K}{n\Delta_n^2}\le c\delta^{K-1}.$$

Поэтому можно применить предложение 2.2, чтобы убедиться в том, что

$$\int\limits_{C_{n,k}}|u|^2\,dV\le c\delta^{(K-1)/2}\Delta_n^2\int\limits_{C_{n,k}}|\nabla\otimes u|^2\,dV.$$

Отсюда следует неравенство

$$\int\limits_{S_n^-}|u|^2\,dV\le c\delta^{(K-1)/2}\Delta_n^2\int\limits_{S_n}|\nabla\otimes u|^2\,dV.\tag{A.35}$$

(d) Градиент компенсирующего потока. По (A.34)

$$\int\limits_{S_n}|\nabla\otimes W\mathbf{f}|^2\,dV\le C(J_1+J_2+J_3),\tag{A.36}$$

где C — положительная константа,

$$J_1 = \int\limits_{S_n} \left|\frac{\partial W}{\partial r}\right|^2 dV, \quad J_2 = \int\limits_{S_n} \left|\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right|^2 dV, \quad J_3 = \int\limits_{S_n} \left|\frac{1}{r}W\right|^2 dV.$$

Из оценок для производных ζ и Z в (A.29) и (A.32), неравенства Коши и (A.35) немедленно следует, что всегда, когда $K > 2$,

$$\left|\frac{\partial W}{\partial r}(r,\theta)\right|^2 \le \frac{\sup(Z'(t))^2}{\Delta_n^4}\bigg(\int\limits_{H_\theta}(\nabla\zeta\cdot u)\,dV\bigg)^2$$
$$\le \frac{C}{\Delta_n^6}\operatorname{mes}(S_n\cap\{u\ne 0\})\int\limits_{S_n^-}|u|^2\,dV \le \frac{C}{\Delta_n^6}\frac{\delta^K}{n}\Delta_n^2\delta^{K/2-1}\frac{\delta^K}{n} \le C\delta^A, \quad A>0.$$

Таким образом, в соотношении (A.36)

$$J_1 \le C\delta^A\Delta_n R_n \le C\delta^{A+1}. \tag{A.37}$$

Оценка для J_3 выводится аналогично:

$$\left|\frac{1}{r}W\right|^2 \le C\frac{1}{\Delta_n^2 R_n^2}\bigg(\int\limits_{H_\theta}(\nabla\zeta\cdot u)\,dV\bigg)^2$$
$$\le \frac{C}{\delta^2\Delta_n^2}\operatorname{mes}(S_n\cap\{u\ne 0\})\int\limits_{S_n^-}|u|^2\,dV \le C\frac{\delta^K}{n}\delta^{K/2-3}.$$

Отсюда следует, что при $K > 2$

$$J_3 \le C\Delta_n R_n\frac{\delta^K}{n}\delta^{K/2-3} \le C\delta^A, \quad A>0. \tag{A.38}$$

Вывод оценки для J_2 несколько иной. Удобно переписать определение J_3 в полярных координатах. По (A.32) и неравенству Коши

$$\frac{\partial W}{\partial\theta}(r,\theta) = \frac{1}{\Delta_n}Z\bigg(\frac{r-R_n}{\Delta_n}\bigg)\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_0^\theta d\theta'\int\limits_{R_n+\frac{1}{10}\Delta_n}^{R_n+\frac{8}{10}\Delta_n}(\nabla\zeta\cdot u)(x(r',\theta'))r'dr',$$

поэтому

$$\left|\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}(r,\theta)\right|^2 \le \frac{C}{r^2\Delta_n^2}\int\limits_{R_n+\frac{1}{10}\Delta_n}^{R_n+\frac{8}{10}\Delta_n}1_{\{u\ne0\}}(x(r',\theta))r'dr'\,\frac{\sup(Z'(t))^2}{\Delta_n^2}$$
$$\times\int\limits_{R_n+\frac{1}{10}\Delta_n}^{R_n+\frac{8}{10}\Delta_n}|u(x(r',\theta))|^2r'dr' \le \frac{CR_n}{r^2\Delta_n^3}\int\limits_{R_n+\frac{1}{10}\Delta_n}^{R_n+\frac{8}{10}\Delta_n}|u(x(r',\theta))|^2r'dr'.$$

Вследствие этого существует положительный показатель $A > 0$ такой, что

$$J_2 = \int\limits_{S_n}\left|\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right|^2 dV \le \int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_{R_n}^{R_n+\Delta_n}\bigg(\frac{CR_n}{r^2\Delta_n^3}\int\limits_{R_n+\frac{1}{10}\Delta_n}^{R_n+\frac{8}{10}\Delta_n}|u(x(r',\theta))|^2r'dr'\bigg)r\,dr$$
$$\le C\frac{R_n^2\Delta_n}{R_n^2\Delta_n^3}\int\limits_{S_n^-}|u(x)|^2\,dV \le C\delta^{(K-1)/2}\int\limits_{S_n}|\nabla\otimes u|^2\,dV \le C\delta^A. \tag{A.39}$$

Сходное рассуждение доставляет оценку для L^2-нормы функции $W\mathbf{f}$: по неравенству Коши

$$|W(x)|^2 \le \frac{C}{\Delta_n^4}\,\mathrm{mes}(S_n \cap \{u \ne 0\}) \int\limits_{S_n^-} |u|^2\,dV$$
$$\le \frac{C}{\Delta_n^2}\,\mathrm{mes}(S_n \cap \{u \ne 0\}) \int\limits_{S_n} |\nabla \otimes u|^2\,dV \le \frac{Cn}{\delta}\frac{\delta^K}{n}\frac{\delta^K}{n},$$

поэтому

$$\int\limits_{S_n} |W(x)|^2\,dV \le C\delta^A, \quad A > 0. \tag{A.40}$$

Следствием (A.37), (A.39), (A.38) и (A.40) является то, что при достаточно большом $K > 0$ существует положительный показатель $A > 0$ такой, что с константой, не зависящей от $\delta > 0$,

$$\int\limits_{S_n} |\nabla \otimes W\mathbf{f}|^2\,dV \le C\delta^A. \tag{A.41}$$

(e) Устранение дивергенции. Векторное поле $\zeta u - W\mathbf{f}$ не соленоидально, но по (A.33) его поток через границу любого сектора кольца S_n равен нулю. Разрежем вновь S_n на секторы $S_{n,k}^+$ диаметра $\mathscr{O}(\Delta_n)$, содержащие $S_{n,k}$. Легко видеть, что при малых δ каждый из этих секторов звезден относительно некоторого круга диаметра $c_0\Delta_n$, где $c_0 > 0$ не зависит от δ. Известные теоремы о разрешимости уравнения $\nabla \cdot V = \phi$ (см., например, [2, лемма III.3.1]), показывают, что для каждого сектора $S_{n,k}^+$ существует функция $V_{n,k} \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(C_{n,k}^+)$ такая, что

$$\nabla \cdot V_{n,k} = -\nabla \cdot (\zeta u - W\mathbf{f})$$

и

$$|V_{n,k}|_{W^{1,2}(C_{n,k}^+)} \le C|\nabla \cdot (\zeta u - W\mathbf{f})|_{L^2(C_{n,k}^+)},$$

где константа C не зависит от δ, n или k. Следовательно, функция $V \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(S_n^0)$, равная $V_{n,k}$ в каждом секторе $S_{n,k}^+$, допускает оценку

$$|V|_{L^2(S_n)}^2 + |\nabla \otimes V|_{L^2(S_n)}^2 \le C|\nabla \cdot (\zeta u - W\mathbf{f})|_{L^2(C_n)}^2.$$

Векторное поле $w = \zeta u - W\mathbf{f} - V$ соленоидально, а соотношение (A.27) и оценки, полученные в предыдущих разделах доказательства, показывают, что существуют константы C, A такие, что

$$|u - w|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} \le C\delta^A, \quad A > 0. \tag{A.42}$$

По построению носитель w ограничен и

$$\mathrm{mes}\{w \ne 0\} \le 1 + \delta, \qquad \frac{|w|_{L^2}^2}{|\nabla \otimes w|_{L^2}^2} \le \frac{|u|_{L^2}^2 + C\delta^A}{|\nabla \otimes u|_{L^2}^2 - C\delta^A}.$$

Поскольку $\delta > 0$ произвольно, это доказывает равенство

$$\sup\left\{\frac{|u|_{L^2}^2}{|\nabla \otimes u|_{L^2}^2} : \mathrm{mes}\{u \ne 0\} \le 1, \nabla \cdot u = 0\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{|u|_{L^2}^2}{|\nabla \otimes u|_{L^2}^2} : \mathrm{mes}\{u \ne 0\} \le 1, \nabla \cdot u = 0,\ \mathrm{supp}(u)\ \text{ограничен}\right\}.$$

Лемма доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Temam R.* Navier — Stokes equations: Theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland, 1979.
2. *Galdi P.* An introduction to the mathematical theory of the Navier — Stokes equations. New York: Springer-Verl., 1994.
3. *Sznitman, A.-S.* Brownian motion and obstacles // 1st European congr. of mathematics. V. 1. Basel: Birkhäuser, 1994. P. 225–248.
4. *Sanchez-Palencia E.* Non-homogeneous media and vibration theory. Berlin: Springer-Verl., 1980. (Lecture Notes in Phys.; 127).
5. *Yurinsky V. V.* Raising spectrum bottom by random potential // Siberian Adv. Math. 1997. V. 7, N 2. P. 124–150.
6. *Sznitman A.-S.* Fluctuation of principal eigenvalues and random scales // Com. Math. Phys. 1997. V. 189. P. 337–363.
7. *Yurinsky V. V.* Spectrum bottom and largest vacuity // Probab. Theory Related Fields. 1999. V. 114. P. 151–175.
8. *Beliaev A. Yu., Yurinsky V. V.* Bottom of Laplacian's spectrum in Poisson cloud // Siberian Adv. Math. 1995. V. 5, N 4. P. 113–150.
9. *Grimmett J.* Percolation. New York: Springer-Verl., 1989.
10. *Yosida K.* Functional analysis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl, 1980.
11. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Spectral theory and differential operators. Oxford: Clarendon Press, 1987.
12. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 1 ноября 2000 г.

Юринский Вадим Владимирович
Departamento de Matemática/Informática e Centro de Matemática,
Universidade da Beira Interior, 6200-001 Covilhã, Portugal,
yurinsky@ubi.pt