Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 519.21; 519.219.5

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВРЕМЕН ПРЕБЫВАНИЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ БЛУЖДАНИЙ

В. С. Лугавов, Б. А. Рогозин

Аннотация: Рассмотрены факторизационные представления для времени пребывания на полупрямой и в интервале. Библиогр. 10.

Введение

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, с вероятностью 1 тождественно не равных нулю. Обозначим

$$\varphi(\lambda) = E(e^{\lambda\xi_1}) \tag{1}$$

и при $n \geq 1$ положим $S(n) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $S(0) = 0$. Для произвольного интервала A действительной прямой рассмотрим время пребывания блуждания $\{S(n);\ n \geq 0\}$ в множестве A за k шагов:

$$u(A,k) = \mathrm{Card}\{n \in [1,k] : S(n) \in A\}, \quad k \geq 1, \quad u(A,0) = 0.$$

В работе получено преобразование над распределением функционала

$$u((\gamma_1,\gamma_2],n), \quad \gamma_1 < \gamma_2.$$

Для этого в § 2 рассматривается полумарковское блуждание на прямой, управляемое конечной цепью Маркова, $\{Z(n), \sigma(n),\ n = 0,1,\dots\}$. Эволюция этого процесса задается матрицей преобразований переходных вероятностей за один шаг при $\operatorname{Re}\lambda = 0$:

$$\Psi(\lambda) = \|E(e^{\lambda(Z(n+1)-Z(n))}; \sigma(n+1) = j/Z(n) = x, \sigma(n) = i)\|_{i,j=\overline{1,N}} = \|\Psi_{ij}(\lambda)\|_{i,j=\overline{1,N}},$$

и вектором преобразований распределения начального положения:

$$\overline{\Psi}(\lambda) = (E(e^{\lambda Z(0)}/\sigma(0) = 1), \dots, E(e^{\lambda Z(0)}/\sigma(0) = N)) = (\Psi_1(\lambda), \dots, \Psi_N(\lambda)).$$

С помощью результатов работы [1] в теореме 2 получено факторизационное представление для распределений

$$(Z(k), n_1(k), \dots, n_N(k)), \quad k = 1, \dots,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–01130, 00–15–96178) и INTAS (код проекта 99–01317).

где $n_j(k) = \mathrm{Card}\{n \in [1,k] : Z(n) > 0, \sigma(n) = j\}$. В теореме 3 дается факторизационное представление для распределений

$$(Z(k), \overline{m}(k)), \quad k = 1, \dots,$$

где $\overline{m}(k) = (m_1(k), m_2(k), \dots, m_N(k))$ и при $l = \overline{1, N}$, $k = 2, \dots$

$$m_l(k) = \mathrm{Card}\{n \in [1, k-1] : Z(n) \geq Z(k), \sigma(n) = l\},$$

$m_1(1) = \dots = m_N(1) = 0$. В лемме дана вероятностная интерпретация компонент факторизации, участвующих в теоремах 2, 3.

Результаты, содержащиеся в теореме 2 и лемме, обобщают теорему 1 и лемму 1 работы [2]; обзор более ранних результатов о времени пребывания полумарковских блужданий на полупрямой содержится в [2]. Исчерпывающие сведения о предшествующих результатах этого рода при $N = 1$, т. е. для простого блуждания, приведены в работе [3].

В § 1 приводится сводка необходимых для доказательства теоремы 2 результатов из работы [1]. Эти результаты касаются решения определенной системы рекуррентных уравнений в банаховой алгебре. В этом же параграфе, в теореме 1, дается факторизационное представление для решения новой системы рекуррентных уравнений, необходимое для доказательства теоремы 3.

В § 3 получено факторизационное представление распределения

$$(u((\gamma_1, \gamma_2], k), S(k))$$

при $\gamma_1 < \gamma_2$, $k = 1, \dots$. Для этого рассматривается полумарковский процесс при $N = 2\{S(n, \bar{\gamma}), \sigma(n); n = 0, 1, \dots\}$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$, с матрицей преобразований переходных вероятностей

$$\Psi(\lambda) = \Phi_{\bar{\gamma}}(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 \lambda} & 0 \\ 0 & e^{\gamma_2 \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varphi(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma_1 \lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 \lambda} \end{pmatrix}$$

и начальным вектором $\overline{\Psi}(\lambda) = (e^{-\gamma_1 \lambda}, e^{-\gamma_2 \lambda})$ и применяется теорема 2. Полученные результаты позволяют, в частности, найти преобразование над распределением функционала $v_{(\gamma_1, \gamma_2]} = \inf\{k > 0 : S(k) \notin (\gamma_1, \gamma_2]\}$.

В § 4 рассмотрены примеры случайных блужданий, для которых в явном виде найдены компоненты факторизации, участвующие в представлении распределения $(u((\gamma_1, \gamma_2], k), S(k))$, $k \geq 1$.

§ 1. Факторизационные операторы и системы рекуррентных уравнений

Рассмотрим над полем комплексных чисел C произвольную банахову алгебру $\mathscr{B}$ с элементами $f, g \dots$. Обозначим через θ нулевой элемент и через e единичный элемент алгебры $\mathscr{B}$. Через $|f|$ обозначим норму элемента f; $|e| = 1$. Пусть $\mathscr{L}$ — преобразование $\mathscr{B}$ в себя, удовлетворяющее условиям:

(i) $\mathscr{L}$ — ограниченное линейное преобразование,

(ii) $\mathscr{L}$ — преобразование проектирования: $\mathscr{L}^2(f) = \mathscr{L}(f)$,

(iii) $\mathscr{L}(f_1 f_2) = \mathscr{L}(f_1 \mathscr{L}(f_2)) + \mathscr{L}(\mathscr{L}(f_1) f_2) - \mathscr{L}(f_1)\mathscr{L}(f_2)$.

Норму преобразования $\mathscr{L}$ определим как наименьшее неотрицательное число $|\mathscr{L}|$, удовлетворяющее неравенству $|\mathscr{L}(f)| \leq |\mathscr{L}| \cdot |f|$. Если преобразование $\mathscr{L}$ ненулевое, то в силу условия (ii) $|\mathscr{L}| \geq 1$. Наряду с преобразованием $\mathscr{L}$ определим преобразование $\mathscr{L}^\star$, полагая $\mathscr{L}^\star(f) = f - \mathscr{L}(f)$. Нетрудно видеть, что если

$\mathscr{L}$ удовлетворяет условиям (i)–(iii), то $\mathscr{L}^\star$ также им удовлетворяет. Обозначим через $\mathscr{L}(\mathscr{B})$ образ алгебры $\mathscr{B}$ при отображении $\mathscr{L} : \mathscr{L}(\mathscr{B}) = \{g \in \mathscr{B} : \mathscr{L}(f) = g$ при некотором $f \in \mathscr{B}\}$. Аналогично определим $\mathscr{L}^\star(\mathscr{B})$.

Будем говорить, следуя работе [4], что элемент $e - f$ алгебры $\mathscr{B}$ *допускает левую каноническую факторизацию по оператору* $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L}$-л.к.ф.), если имеет место разложение $e - f = f_+ f_-$ и существуют элементы f_+^{-1}, f_-^{-1}, при этом элементы $f_+ - e$, $f_+^{-1} - e$ принадлежат $\mathscr{L}(\mathscr{B})$ и элементы $f_- - e$, $f_-^{-1} - e$ принадлежат $\mathscr{L}^\star(\mathscr{B})$.

Если элемент $e - f$ допускает $\mathscr{L}$-л.к.ф., то эта факторизация единственна [4]. Известно [1], что при $|f| \max\{|\mathscr{L}|\, |\mathscr{L}^\star|\} < 1$ $\mathscr{L}$-л.к.ф. элемента $e - f$ существует, и если $a_0 = b_0 = e$, $a_k = \mathscr{L}(a_{k-1} f)$, $b_k = \mathscr{L}^\star(f b_{k-1})$ при $k \geq 1$, то

$$f_+ = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)^{-1}, \quad f_- = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)^{-1}.$$

Функцию $h(\rho)$ комплексного переменного ρ, принимающую значения из $\mathscr{B}$, будем называть аналитической в окрестности точки r_0, если при достаточно малом $|\rho - r_0|$ она представима в виде

$$h(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho - r_0)^n h_n, \quad h_n \in \mathscr{B},$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\rho - r_0|^n |h_n| < \infty.$$

В дальнейшем нам понадобится результат работы [1]: если оператор $\mathscr{L}$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) и $g_\pm(\rho)$ — компоненты $\mathscr{L}$-л.к.ф. элемента

$$(e - \rho g_2)^{-1}(e - \rho g_1) = e - \rho\{(e - \rho g_2)^{-1}(g_1 - g_2)\}$$

алгебры $\mathscr{L}$:

$$(e - \rho g_2)^{-1}(e - \rho g_1) = g_+(\rho) g_-(\rho), \tag{2}$$

то решение системы рекуррентных уравнений

$$f_n = \mathscr{L}(f_{n-1} g_1) + \mathscr{L}^\star(f_{n-1} g_2), \tag{3}$$

$n = 1, 2 \ldots$; $f_0, g_1, g_2 \in \mathscr{B}$, задается следующим соотношением для производящей функции $f(\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho^n f_n$ последовательности $f_0, f_1 \ldots$:

$$f(\rho) = \{\mathscr{L}[f_0 (g_-(\rho))^{-1}] + \mathscr{L}^\star[f_0 g_+(\rho)]\}(g_+(\rho))^{-1}(e - \rho g_2)^{-1}. \tag{4}$$

Дополним приведенные результаты исследованием системы рекуррентных уравнений:

$$u_0 = \theta,\ u_1 = f,\ u_n = g_1 \mathscr{L}^\star(u_{n-1}) + g_2 \mathscr{L}(u_{n-1}), \quad n = 2, \ldots, \tag{5}$$

при $f, g_1, g_2 \in \mathscr{B}$.

При $|\rho| \max\{|g_1||\mathscr{L}^\star|, |g_2||\mathscr{L}|\} < 1$ производящая функция $u(\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho^n u_n$ принадлежит $\mathscr{B}$ и удовлетворяет при $y(\rho) = u(\rho)$ уравнению

$$y(\rho) = \rho g_1 \mathscr{L}^\star y(\rho) + \rho g_2 \mathscr{L} y(\rho) + \rho f. \tag{6}$$

Используя систему (5), нетрудно заметить, что решение уравнения (6) в классе аналитических в окрестности точки $\rho = 0$ функций со значениями в банаховой алгебре $\mathscr{B}$, для которых $y(0) = \theta$, $y'(0) = f$, единственно и совпадает с $u(\rho)$. Факторизационное представление для $u(\rho)$ дает

Теорема 1. *Если* $f, g_1, g_2 \in \mathscr{B}$, *то при*

$$|\rho|(|g_1 - g_2| + \min(|g_1||g_2|)) \max\{|\mathscr{L}^\star||\mathscr{L}|\} < 1$$

производящая функция $u(\rho)$ *принадлежит* $\mathscr{B}$ *и имеет следующее представление:*

$$u(\rho) = g_-^{-1}(\rho)\mathscr{L}^\star\big(g_+^{-1}(\rho)(e - \rho g_2)^{-1}\rho f\big) + g_+(\rho)\mathscr{L}(g_-(\rho)(e - \rho g_1)^{-1}\rho f),$$

где $g_+(\rho)$, $g_-(\rho)$ — *компоненты* $\mathscr{L}$*-л.к.ф.* (2).

Доказательство. Преобразуем (6):

$$(e - \rho g_2)^{-1}(e - \rho g_1)\mathscr{L}^\star y(\rho) + \mathscr{L} y(\rho) = (e - \rho g_2)^{-1}\rho f.$$

Отсюда

$$g_-(\rho)\mathscr{L}^\star y(\rho) + g_+^{-1}(\rho)\mathscr{L} y(\rho) = g_+^{-1}(\rho)(e - \rho g_2)^{-1}\rho f. \tag{7}$$

Применяя оператор $\mathscr{L}^\star$ к правой и левой частям (7), получим

$$g_-(\rho)\mathscr{L}^\star y(\rho) = \mathscr{L}^\star(g_+^{-1}(\rho)(e - \rho g_2)^{-1}\rho f).$$

Аналогично из (7), применяя оператор $\mathscr{L}$, получим

$$g_+^{-1}(\rho)\mathscr{L} y(\rho) = \mathscr{L}\big(g_+^{-1}(\rho)(e - \rho g_2)^{-1}\rho f\big) = \mathscr{L}(g_-(\rho)(e - \rho g_1)^{-1}\rho f).$$

Так как $y(\rho) = \mathscr{L}^\star y(\rho) + \mathscr{L} y(\rho)$ и $y(0) = \theta$, $y'(0) = f$, то теорема доказана.

Обозначим через $\mathscr{V}_1$ класс функций, представимых при $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda x\} v(dx),$$

где v — комплекснозначная конечная мера на прямой. Для функции

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda x\} v(dx)$$

из $\mathscr{V}_1$ определим норму $|f(\lambda)|_1$, полагая ее равной полной вариации меры v на $(-\infty, \infty)$. Относительно введенной нормы и обычных операций сложения, умножения, умножения на константу из C совокупность $\mathscr{V}_1$ является коммутативной банаховой алгеброй с единицей. Обозначим через $\mathscr{V}_N$ класс матриц порядка N с элементами из $\mathscr{V}_1$. Для матрицы $F(\lambda) = \|f_{ij}(\lambda)\|_{i,j=\overline{1,N}} \in \mathscr{V}_N$ определим норму

$$|F(\lambda)|_N = \max_{i=\overline{1,N}} \sum_{j=1}^{N} |f_{ij}(\lambda)|_1.$$

Определяя сложение и умножение в соответствии с правилами алгебры матриц, легко убедиться, что совокупность $\mathscr{V}_N$ есть некоммутативная банахова алгебра с единицей $I = \|\delta_{ij}\|_{i,j=\overline{1,N}}$, где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$ $(i, j = \overline{1, N})$. Для произвольного интервала $\{\alpha, \beta\}$ действительной прямой рассмотрим оператор $T_{\{\alpha,\beta\}}$, определяемый для

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda x\} v(dx) \in \mathscr{V}_1$$

равенством

$$T_{\{\alpha,\beta\}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{\lambda x\}v(dx)\right)=\int\limits_{\{\alpha,\beta\}}\exp\{\lambda x\}v(dx),$$

и одновременно определим

$$T_{\{\alpha,\beta\}}(F(\lambda))=\|T_{\{\alpha,\beta\}}(f_{ij}(\lambda))\|_{i,j=\overline{1,N}}$$

для матрицы $F(\lambda)=\|f_{ij}(\lambda)\|_{i,j=\overline{1,N}}\in\mathscr{V}_N$. Обозначим $T=T_{(0,\infty)}$, $T^\star=T_{(-\infty,0]}$. Преобразование T удовлетворяет условиям (i)–(iii), нормы преобразований T, $T^\star$ равны 1.

§ 2. Факторизационные тождества для полумарковских блужданий

Введем обозначения. Обозначим через $\overline{1}$ N-мерный вектор с единичными координатами. Для произвольных вектора $\overline{v}=(v_1,\dots,v_N)$ и вектора $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N)$ с целочисленными неотрицательными координатами положим

$$D(\overline{v})=\|\delta_{ij}v_i\|_{i,j=\overline{1,N}},\quad \overline{v}^{\overline{\alpha}}=\prod_{k=1}^{N}(v_k)^{\alpha_k}.$$

Рассмотрим блуждание $\{Z(n),\sigma(n);n=0,1\dots\}$, определенное во введении, и функционалы

$$n_j(k)=\operatorname{Card}\nu\{n\in[1,k]:Z(n)>0,\sigma(n)=j\},\quad j=\overline{1,N},\ k\ge1;$$

$$n_1(0)=\dots=n_N(0)=0.$$

Обозначим $\overline{n}(k)=(n_1(k),n_2(k),\dots,n_N(k))$. При $\overline{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_N)$ положим

$$U_{ij}(\lambda,\overline{\omega},k)=E(e^{\lambda Z(k)}\overline{\omega}^{\overline{n}(k)};\sigma(k)=j/\sigma(0)=i),\quad k=1,2\dots;\ i,j=\overline{1,N};$$

$$U(\lambda,\overline{\omega},k)=\|U_{ij}(\lambda,\overline{\omega},k)\|_{i,j=\overline{1,N}},\qquad U(\lambda,\overline{\omega},0)=D(\overline{\Psi}(\lambda)),$$

$$U_\rho(\lambda,\overline{\omega})=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^kU(\lambda,\overline{\omega},k).$$

Используя формулу полной вероятности по последнему шагу и марковский характер процесса $\{Z(n),\sigma(n);n=0,1\dots\}$, при $k=1,2,\dots$ получим

$$U(\lambda,\overline{\omega},k)=T^\star\{U(\lambda,\overline{\omega},k-1)\Psi(\lambda)\}+T\{U(\lambda,\overline{\omega},k-1)\Psi(\lambda)\}D(\overline{\omega}).$$

Отсюда в силу соотношения (4) следует

Теорема 2. *При*

$$|\rho|[\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i-1|+\min\{1,\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i|\}]<1,\quad \operatorname{Re}\lambda=0$$

производящая функция $U_\rho(\lambda,\overline{\omega})$ принадлежит $\mathscr{V}_N$ и имеет следующее факторизационное представление:

$$U_\rho(\lambda,\overline{\omega})=\big[T\{U\big(\lambda,\overline{\omega},0)\Psi_-^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)\big\}+T^\star\{U(\lambda,\overline{\omega},0)\Psi_+(\lambda,\overline{\omega},\rho)\}\big]$$
$$\times\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)(I-\rho\Psi(\lambda))^{-1},$$

где $\Psi_{\pm}(\lambda,\overline{\omega},\rho)$ — *компоненты* T*-л.к.ф. матрицы*

$$\Psi(\lambda,\overline{\omega},\rho)=(I-\rho\Psi(\lambda))^{-1}(I-\rho\Psi(\lambda)D(\overline{\omega}))$$

при $\operatorname{Re}\lambda=0$.

При $\overline{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\dots\omega_N)$, $k=1,2,\dots;\ i,j=\overline{1,N}$, положим

$$V_{ij}(\lambda,\overline{\omega},k)=E(e^{\lambda(Z(k)-Z(0))}\overline{\omega}^{\overline{m}(k)};\sigma(k)=j/\sigma(0)=i),$$

$$V(\lambda,\overline{\omega},k)=\|V_{ij}(\lambda,\overline{\omega},k)\|_{i,j=\overline{1,N}},\quad V_\rho(\lambda,\overline{\omega})=\sum_{n=1}^{\infty}\rho^nV(\lambda,\overline{\omega},n).$$

Применяя формулу полной вероятности по первому шагу блуждания

$$\{Z(n),\sigma(n);\ n=0,1\dots\},$$

при $n=2,\dots$ получим

$$V(\lambda,\overline{\omega},n)=\Psi(\lambda)D(\overline{\omega})T^\star(V(\lambda,\overline{\omega},n-1))+\Psi(\lambda)T(V(\lambda,\overline{\omega},n-1));$$
$$V(\lambda,\overline{\omega},1)=\Psi(\lambda).$$

Из теоремы 1 при $g_1=\Psi(\lambda)D(\overline{\omega})$, $g_2=\Psi(\lambda)$, $f=\Psi(\lambda)$ вытекает, что при

$$|\rho|[\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i-1|+\min\{1,\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i|\}]<1,\quad \operatorname{Re}\lambda=0$$

производящая функция $V_\rho(\lambda,\overline{\omega})$ принадлежит $\mathscr{V}_N$ и имеет место следующее факторизационное представление:

$$\begin{aligned}V_\rho(\lambda,\overline{\omega})=\Psi_-^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)T^\star\big[\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)(I-\rho\Psi(\lambda))^{-1}\rho\Psi(\lambda)\big]\\+\Psi_+(\lambda,\overline{\omega},\rho)T[\Psi_-(\lambda,\overline{\omega},\rho)(I-\rho\Psi(\lambda)D(\overline{\omega}))^{-1}\rho\Psi(\lambda)].\end{aligned}\tag{8}$$

Применяя к обеим частям равенства (8) оператор $T^\star$, получим

$$\begin{aligned}T^\star V_\rho(\lambda,\overline{\omega})&=\Psi_-^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)T^\star\big[\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)(I-\rho\Psi(\lambda))^{-1}\rho\Psi(\lambda)\big]\\&=\Psi_-^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)(\Psi_-(\lambda,\overline{\omega},\rho)-I)D^{-1}(\overline{1}-\overline{\omega})=\big(I-\Psi_-^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)\big)D^{-1}(\overline{1}-\overline{\omega}).\end{aligned}\tag{9}$$

При этом используется соотношение

$$(I-\rho\Psi(\lambda))^{-1}(I-\rho\Psi(\lambda)D(\overline{\omega}))=I+(I-\rho\Psi(\lambda))^{-1}\rho\Psi(\lambda)D(\overline{1}-\overline{\omega}).\tag{10}$$

Аналогично, применяя к обеим частям равенства (8) оператор T, получим

$$\begin{aligned}TV_\rho(\lambda,\overline{\omega})&=\Psi_+(\lambda,\overline{\omega},\rho)T[\Psi_-(\lambda,\overline{\omega},\rho)(I-\rho\Psi(\lambda)D(\overline{\omega}))^{-1}\rho\Psi(\lambda)]\\&=\Psi_+(\lambda,\overline{\omega},\rho)T[\Psi_-(\lambda,\overline{\omega},\rho)(I-(I-\rho\Psi(\lambda)D(\overline{\omega}))^{-1}(I-\rho\Psi(\lambda)))]\\&\times D^{-1}(\overline{1}-\overline{\omega})=\Psi_+(\lambda,\overline{\omega},\rho)(-\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)+I)D^{-1}(\overline{1}-\overline{\omega})\\&=(-I+\Psi_+(\lambda,\overline{\omega},\rho))D^{-1}(\overline{1}-\overline{\omega}).\end{aligned}\tag{11}$$

При этом использованы соотношения

$$(I-\rho\Psi(\lambda)D(\overline{\omega}))^{-1}(I-\rho\Psi(\lambda))=I-(I-\rho\Psi(\lambda)D(\overline{\omega}))^{-1}\rho\Psi(\lambda)\times D(\overline{1}-\overline{\omega}),$$
$$T\big(\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)-I\big)=\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)-I.$$

Из (9), (11) в силу равенства $V_\rho(\lambda,\overline{\omega})=TV_\rho(\lambda,\overline{\omega})+T^\star V_\rho(\lambda,\overline{\omega})$ вытекает

Теорема 3. *При*

$$|\rho|[\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i-1|+\min\{1,\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i|\}]<1,\quad \operatorname{Re}\lambda=0$$

производящая функция $V_\rho(\lambda,\overline{\omega})$ *принадлежит* $\mathscr{V}_N$ *и имеет место следующее факторизационное представление:*

$$V_\rho(\lambda,\overline{\omega})=[\Psi_+(\lambda,\overline{\omega},\rho)-\Psi_-^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)]D^{-1}(\overline{1}-\overline{\omega}),$$

где $\Psi_\pm(\lambda,\overline{\omega},\rho)$ *— компоненты* T*-л.к.ф. матрицы* $\Psi(\lambda,\overline{\omega},\rho)$ *при* $\operatorname{Re}\lambda=0$.

С помощью теорем 2, 3 получим вероятностную интерпретацию компонент факторизации $\Psi_+^{\pm1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)$, $\Psi_-^{\pm1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)$.

Лемма. *Пусть* $Z(0)=0$, *тогда при*

$$|\rho|[\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i-1|+\min\{1,\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i|\}]<1,\quad \operatorname{Re}\lambda=0$$

справедливы равенства

$$\Psi_+(\lambda,\overline{\omega},\rho)=I+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\|E(e^{\lambda Z(k)}\overline{\omega}^{\overline{m}(k)});\ Z(k)>0,\ \sigma(k)=j/\sigma(0)=i\|D(\overline{1}-\overline{\omega});\tag{12}$$

$$\Psi_-(\lambda,\overline{\omega},\rho)=I+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\|E(e^{\lambda Z(k)}\overline{\omega}^{\overline{n}(k-1)});\ Z(k)\le 0,\ \sigma(k)=j/\sigma(0)=i\|D(\overline{1}-\overline{\omega});\tag{13}$$

$$\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)=I-\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\|E(e^{\lambda Z(k)}\overline{\omega}^{\overline{n}(k-1)});\ Z(k)>0,\ \sigma(k)=j/\sigma(0)=i\|D(\overline{1}-\overline{\omega});\tag{14}$$

$$\Psi_-^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)=I-\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\|E(e^{\lambda Z(k)}\overline{\omega}^{\overline{m}(k)});\ Z(k)\le 0,\ \sigma(k)=j/\sigma(0)=i\|D(\overline{1}-\overline{\omega}).\tag{15}$$

Доказательство. Докажем соотношение (13). Из теоремы 2 и условия $U(\lambda,\overline{\omega},0)=I$ вытекает

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\|E(e^{\lambda Z(k)}\overline{\omega}^{\overline{n}(k)});Z(k)\le 0,\sigma(k)=j/\sigma(0)=i\|&=T^\star[U_\rho(\lambda,\overline{\omega})-I]\\ &=T^\star\big[\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)(I-\rho\Psi(\lambda))^{-1}-\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)\big]\\ =T^\star\big[\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)\times((I-\rho\Psi(\lambda))^{-1}-I)\big]&=T^\star\big[\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)(I-\rho\Psi(\lambda))^{-1}\rho\Psi(\lambda)\big]\\ &=T^\star\big[\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)(I-\rho\Psi(\lambda))^{-1}\rho\Psi(\lambda)D(\overline{1}-\overline{\omega})\big]D^{-1}(\overline{1}-\overline{\omega})\\ &=[-I+\Psi_-(\lambda,\overline{\omega},\rho)]D^{-1}(\overline{1}-\overline{\omega}).\end{aligned}$$

Последнее равенство получается из соотношения (10).

Докажем соотношение (14). В силу факторизационного соотношения теоремы 2 имеем

$$\Psi_+^{-1}(\lambda,\overline{\omega},\rho) = U_\rho(\lambda,\overline{\omega})(I-\rho\Psi(\lambda)) = I + (U_\rho(\lambda,\overline{\omega})-I) - U_\rho(\lambda,\overline{\omega})\rho\Psi(\lambda)$$
$$= I + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \|E(e^{\lambda Z(k)}\overline{\omega}^{\overline{n}(k)});\ Z(k)>0,\ \sigma(k)=j/\sigma(0)=i\|$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \|E(e^{\lambda Z(k)}\overline{\omega}^{\overline{n}(k-1)});\ Z(k)>0,\ \sigma(k)=j/\sigma(0)=i\|$$
$$= I - \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \|E(e^{\lambda Z(k)}\overline{\omega}^{\overline{n}(k-1)});\ Z(k)>0,\ \sigma(k)=j/\sigma(0)=i\| D(\overline{1}-\overline{\omega}).$$

Справедливость соотношений (12), (15) вытекает из теоремы 3.

Замечание 1. Матрицы $\Psi^{\pm1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)$ представляются степенными рядами, сходящимися в $\mathscr{V}_N$ при

$$|\rho|<1, \quad |\rho|\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i|<1.$$

В силу леммы аналогичные представления имеют место для матриц $\Psi_+^{\pm1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)$, $\Psi_-^{\pm1}(\lambda,\overline{\omega},\rho)$, так как

$$\sum_{l=1}^{N} m_l(k)\le k, \quad \sum_{l=1}^{N} n_l(k)\le k.$$

В связи с этим T-л.к.ф. матрицы $\Psi(\lambda,\overline{\omega},\rho)$ существует при

$$|\rho|<1, \quad |\rho|\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i|<1$$

поэтому теоремы 2, 3 и лемма имеют место при

$$|\rho|<1, \quad |\rho|\max_{i=\overline{1,N}}|\omega_i|<1.$$

§ 3. Факторизационные тождества для простых блужданий

Наряду с блужданием $\{S(n); n=0,1,\dots\}$, $S(0)=0$, рассмотрим при $N=2$ полумарковский процесс $\{S(n,\bar\gamma),\sigma(n); n=0,1,\dots\}$, $\bar\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, связанный с этим блужданием соотношениями

$$\begin{gathered}\text{если } \sigma(0)=1, \text{ то } S(2n,\bar\gamma)=S(n)-\gamma_1,\ \sigma(2n)=1;\\ S(2n+1,\bar\gamma)=S(n)-\gamma_2, \quad \sigma(2n+1)=2, \quad n=0,1,\dots,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\text{если } \sigma(0)=2, \text{ то } S(2n,\bar\gamma)=S(n)-\gamma_2, \quad \sigma(2n)=2;\\ S(2n+1,\bar\gamma)=S(n+1)-\gamma_1, \quad \sigma(2n+1)=1, \quad n=0,1,\dots,\end{gathered} \tag{17}$$

с матрицей преобразований переходных вероятностей

$$\Phi_{\bar\gamma}(\lambda) = e^{\lambda D(\bar\gamma)}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \varphi(\lambda) & 0\end{pmatrix}e^{-\lambda D(\bar\gamma)}$$

и вектором преобразований начального положения $(e^{-\gamma_1\lambda}, e^{-\gamma_2\lambda})$ (см. введение).

Применим теорему 2 к процессу $\{S(n,\bar\gamma),\sigma(n);n=0,1,\dots\}$, $\bar\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$. Положим

$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \varphi(\lambda) & 0\end{pmatrix},$$

так что

$$\Phi_{\bar\gamma}(\lambda)=e^{\lambda D(\bar\gamma)}\Phi(\lambda)e^{-\lambda D(\bar\gamma)}.$$

Для произвольной матрицы $A=\|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,2}}$ обозначим $[A]_{ij}=a_{ij}$, $i,j=\overline{1,2}$. Тогда в силу замечания 1 и соотношений (17) получим следующее утверждение.

Теорема 4. *При* $|\rho|<1$, $|\rho|\max\{|\omega_1|,|\omega_2|\}<1$, $\operatorname{Re}\lambda=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}E(e^{\lambda S(n)}\omega_1^{u((\gamma_1,+\infty),n)}\omega_2^{u((\gamma_2,+\infty),n)})=\big[\big\{T(e^{-\lambda D(\bar\gamma)}\Phi_-^{-1}(\bar\gamma,\lambda,\overline{\omega},\rho))$$
$$+T^\star(e^{-\lambda D(\bar\gamma)}\Phi_+(\bar\gamma,\lambda,\overline{\omega},\rho)\big\}\Phi_+^{-1}(\bar\gamma,\lambda,\overline{\omega},\rho)e^{\lambda D(\bar\gamma)}(I-\rho\Phi(\lambda))^{-1}\big]_{22}$$
$$=\varphi(\bar\gamma,\lambda,\omega_1,\omega_2,\rho^2),\quad(18)$$

где $\overline{\omega}=(\omega_1,\omega_2)$, $\Phi_\pm(\bar\gamma,\lambda,\overline{\omega},\rho)$ *— компоненты* T*-л.к.ф. матрицы*

$$e^{\lambda D(\bar\gamma)}(I-\rho\Phi(\lambda))^{-1}(I-\rho\Phi(\lambda)D(\overline{\omega}))e^{-\lambda D(\bar\gamma)}$$

при $\operatorname{Re}\lambda=0$.

Замечание 2. Для любого вектора $\overline{\eta}=(\eta,\eta)$ выполняется равенство $\Phi_\pm(\bar\gamma+\overline{\eta},\lambda,\overline{\omega},\rho)=\Phi_\pm(\bar\gamma,\lambda,\overline{\omega},\rho)$.

Подставляя в (18) $\omega_2=0$, получим

Следствие 1. *Пусть* $\bar\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, $\gamma_1\le\gamma_2$. *Тогда при* $|\rho|<1$, $|\rho||\omega_1|<1$, $\operatorname{Re}\lambda=0$ *имеет место равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}E\big(e^{\lambda S(n)}\ {\omega_1}^{u((\gamma_1,\gamma_2],n)};\max_{k=\overline{1,n}}S(k)\le\gamma_2)=\varphi(\bar\gamma,\lambda,\omega_1,0,\rho^2),\qquad(19)$$

при этом здесь и далее полагаем $u((\gamma_1,\gamma_2],n)=0$ *при* $\gamma_1=\gamma_2$, $n\ge0$.

Замечание 3. Из соотношения (18) при $\omega_1=v$, $\omega_2=1/v$ вытекает, что функция $\varphi(\bar\gamma,\lambda,v,1/v,\rho^2)$ представляется сходящимся числовым рядом при $|\rho|<1$, $|v||\rho|^2<1$, поскольку $u((\gamma_1,+\infty),n)\ge u((\gamma_2,+\infty),n)$ при $\gamma_1\le\gamma_2$. Во всех дальнейших рассмотрениях именно в этой области и будем считать определенной функцию $\varphi(\bar\gamma,\lambda,v,1/v,\rho^2)$.

Из теоремы 4 в силу замечания 3 вытекает

Следствие 2. *Пусть* $\bar\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, $\gamma_1\le\gamma_2$. *Тогда при* $|\rho|<1$, $|\rho|^2|v|<1$, $\operatorname{Re}\lambda=0$ *выполняется равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}E(e^{\lambda S(n)}v^{u((\gamma_1,\gamma_2],n)})=\varphi(\bar\gamma,\lambda,v,1/v,\rho^2).\qquad(20)$$

Переходя в соотношении (20) к пределу при $v\to0$, получим

Следствие 3. *Пусть* $\bar\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, $\gamma_1\le\gamma_2$. *Тогда при* $|\rho|<1$, $\operatorname{Re}\lambda=0$ *справедливо равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}E(e^{\lambda S(n)};u((\gamma_1,\gamma_2],n)=0)=\lim_{v\to0}\varphi(\bar\gamma,\lambda,v,1/v,\rho^2).\qquad(21)$$

Замечание 4. Правые части соотношений (18)–(21) при $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ могут быть выражены через функцию $1-\rho^2\varphi(\lambda)$ или компоненты канонической факторизации этой функции при $\operatorname{Re}\lambda=0$ (см. [5]). В частности, в соотношениях (20) и (21) $\varphi((\gamma,\gamma),\lambda,v,1/v,\rho^2)=1-\rho^2\varphi(\lambda)$ при любых γ, v, $\operatorname{Re}\lambda=0$, $|\rho|<1$.

Полагая в (20) $\rho^2=zv^{-1}$ и переходя к пределу при $v\to\infty$, получим

Следствие 4. *Пусть* $\bar\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 \le \gamma_2$. *Тогда при* $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *выполнено равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n E(e^{\lambda S(n)}; u((\gamma_1, \gamma_2], n) = n) = \lim_{v\to+\infty} \varphi(\bar\gamma, \lambda, v, 1/v, z/v). \tag{22}$$

Рассмотрим при $\gamma_1 \le \gamma_2$ функционал $v_{(\gamma_1,\gamma_2]} = \inf\{k > 0 : S(k) \notin (\gamma_1, \gamma_2]\}$ — момент первого попадания блуждания $\{S(k); k \ge 1\}$ в множество $(-\infty, \gamma_1] \cup (\gamma_2, +\infty]$, при этом полагаем $v_{(\gamma_1,\gamma_2]} = 1$ при $\gamma_1 = \gamma_2$. Из следствия 4 вытекает

Следствие 5. *Пусть* $\bar\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 \le \gamma_2$. *Тогда при* $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$E(z^{v_{(\gamma_1,\gamma_2]}} e^{\lambda S(v_{(\gamma_1,\gamma_2]})}) = 1 + (z\varphi(\lambda) - 1) \lim_{v\to+\infty} \varphi(\bar\gamma, \lambda, v, 1/v, z/v). \tag{23}$$

Действительно, поскольку $P\{S(1) = 0\} < 1$, с вероятностью 1 функционал $v_{(\gamma_1,\gamma_2]}$ конечный и

$$\begin{aligned} E(z^{v_{(\gamma_1,\gamma_2]}} e^{\lambda S(v_{(\gamma_1,\gamma_2]})}) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n E(e^{\lambda S(n)}; v_{(\gamma_1,\gamma_2]} = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n (E(e^{\lambda S(n)}; v_{(\gamma_1,\gamma_2]} > n-1) - E(e^{\lambda S(n)}; v_{(\gamma_1,\gamma_2]} > n)) \\ &= z\varphi(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} z^n E(e^{\lambda S(n)}; v_{(\gamma_1,\gamma_2]} > n) - \sum_{n=1}^{\infty} z^n E(e^{\lambda S(n)}; v_{(\gamma_1,\gamma_2]} > n). \end{aligned}$$

Отсюда в силу следствия 4 и совпадения множеств

$$\{v_{(\gamma_1,\gamma_2]} > n\}, \quad \{u((\gamma_1, \gamma_2], n) = n\}$$

вытекает равенство (23).

Представления для распределения момента и положения выхода случайного блуждания из интервала через компоненты соответствующей факторизации содержатся в работах [6, 7]. В [8, 9] получены полные асимптотические разложения распределений функционалов, связанных с выходом случайного блуждания из интервала.

Замечание 5. Пусть $\bar\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 \le \gamma_2$. Рассмотрим второе равенство соотношения (18), определяющее функцию $\varphi(\bar\gamma, \lambda, \omega_1, \omega_2, \rho^2)$. В этом равенстве

1) при $\gamma_2 > 0$ первое слагаемое в фигурных скобках можно опустить, поскольку

$$\big[e^{-\lambda D(\bar\gamma)} \Phi_-^{-1}(\bar\gamma, \lambda, \overline{\omega}, \rho)\big]_{2,1}, \quad \big[e^{-\lambda D(\bar\gamma)} \Phi_-^{-1}(\bar\gamma, \lambda, \overline{\omega}, \rho)\big]_{2,2} \in T^\star(\mathscr{V}_1),$$

2) при $\gamma_2 < 0$ второе слагаемое в фигурных скобках можно опустить, поскольку

$$[e^{-\lambda D(\bar\gamma)} \Phi_+(\bar\gamma, \lambda, \overline{\omega}, \rho)]_{2,1}, \quad [e^{-\lambda D(\bar\gamma)} \Phi_+(\bar\gamma, \lambda, \overline{\omega}, \rho)]_{2,2} \in T(\mathscr{V}_1),$$

3) при $\gamma_2 = 0$ выражение в фигурных скобках можно заменить матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, поскольку

$$\begin{gathered} \big[e^{-\lambda D(\bar\gamma)} \Phi_-^{-1}(\bar\gamma, \lambda, \overline{\omega}, \rho)\big]_{2,1} \in T^\star(\mathscr{V}_1), \quad \big[e^{-\lambda D(\bar\gamma)} \Phi_-^{-1}(\bar\gamma, \lambda, \overline{\omega}, \rho)\big]_{2,2} \in T^\star(\mathscr{V}_1), \\ [e^{-\lambda D(\bar\gamma)} \Phi_+(\bar\gamma, \lambda, \overline{\omega}, \rho)]_{2,1} \in T(\mathscr{V}_1), \quad [e^{-\lambda D(\bar\gamma)} \Phi_+(\bar\gamma, \lambda, \overline{\omega}, \rho)]_{2,2} - 1 \in T(\mathscr{V}_1). \end{gathered}$$

Аналогично функционалу $u((\gamma_1,\gamma_2],n)$ исследуется функционал $u([\gamma_1,\gamma_2),n)$.

Замечание 6. По этой же схеме с помощью дублирования состояний управляющей цепи Маркова можно получить факторизационные представления для времен пребывания полумарковских блужданий в интервалах. Отметим, что некоторые результаты этой работы анонсировались в [10].

§ 4. Примеры факторизационных представлений

Рассмотрим примеры факторизационных представлений матрицы
$$e^{\lambda D(\bar\gamma)}(I-\rho\Phi(\lambda))^{-1}(I-\rho\Phi(\lambda)D(\overline{\omega}))e^{-\lambda D(\bar\gamma)}. \tag{24}$$
Предварительно эту матрицу преобразуем. Имеем
$$\begin{aligned}
&e^{\lambda D(\bar\gamma)}(I-\rho\Phi(\lambda))^{-1}(I-\rho\Phi(\lambda)D(\overline{\omega}))e^{-\lambda D(\bar\gamma)}\\
&\qquad= e^{\lambda D(\bar\gamma)}[I+\rho(I-\rho\Phi(\lambda))^{-1}\Phi(\lambda)D(\overline{1}-\overline{\omega}))]e^{-\lambda D(\bar\gamma)}\\
&\qquad= I+\rho e^{\lambda D(\bar\gamma)}(1-\rho^2\varphi(\lambda))^{-1}\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho\varphi(\lambda) & 1\end{pmatrix}\Phi(\lambda)D(\overline{1}-\overline{\omega})e^{-\lambda D(\bar\gamma)}\\
&= (1-\rho^2\varphi(\lambda))^{-1}\left[I-\rho^2\varphi(\lambda)I+\rho e^{\lambda D(\bar\gamma)}\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho\varphi(\lambda) & 1\end{pmatrix}\Phi(\lambda)D(\overline{1}-\overline{\omega})e^{-\lambda D(\bar\gamma)}\right].
\end{aligned}$$
Окончательно получим
$$\begin{aligned}
&e^{\lambda D(\bar\gamma)}(I-\rho\Phi(\lambda))^{-1}(I-\rho\Phi(\lambda)D(\overline{\omega}))e^{-\lambda D(\bar\gamma)}\\
&\qquad= (1-\rho^2\varphi(\lambda))^{-1}\begin{pmatrix}1-\omega_1\rho^2\varphi(\lambda) & \rho(1-\omega_2)e^{\lambda(\gamma_1-\gamma_2)}\\ \rho(1-\omega_1)e^{\lambda(\gamma_2-\gamma_1)}\varphi(\lambda) & 1-\omega_2\rho^2\varphi(\lambda)\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{25}$$
Таким образом, для нахождения компонент T-л.к.ф. матрицы (24), достаточно построить соответствующие разложения скалярного и матричного множителей в правой части равенства (25). Каноническая факторизация функции $(1-\rho^2\varphi(\lambda))^{-1}$ и свойства ее компонент подробно исследованы в монографии [5].

В нижеприведенных примерах рассматриваются целочисленные блуждания. Для таких блужданий без ограничения общности можно считать, что вектор $\bar\gamma$ имеет целочисленные координаты, поэтому положим (см. также замечание 2) $\bar\gamma=(0,\gamma)$, где γ — целое положительное число.

Обозначим матричный множитель в правой части равенства (25) через
$$F=\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix},\quad F\in\mathscr{V}_2.$$
Пусть $F=L\cdot R$ — T-л.к.ф. матрицы F при $\operatorname{Re}\lambda=0$. Положим
$$L=\begin{pmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{22}\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{pmatrix},$$
$$H=L^{-1}=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix},\quad G=R^{-1}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}.$$
В силу представлений (12)–(15) элементы матриц L, R, H, G имеют вид
$$l_{ij}=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}l_{ij}^{(n)}e^{\lambda n},\quad r_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}r_{ij}^{(n)}e^{-\lambda n},$$
$$h_{ij}=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}h_{ij}^{(n)}e^{\lambda n},\quad g_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}g_{ij}^{(n)}e^{-\lambda n}.$$

Пример 1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$\varphi(\lambda) = M(e^{\lambda\xi_1}) = p + qe^{\lambda}, \quad \operatorname{Re}\lambda = 0$$

и γ — произвольное целое положительное число. В этом случае матричный множитель в правой части (25) имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 1-\omega_1\rho^2(p+qe^{\lambda}) & \rho(1-\omega_2)e^{-\gamma\lambda} \\ \rho(1-\omega_1)e^{\gamma\lambda}(p+qe^{\lambda}) & 1-\omega_2\rho^2(p+qe^{\lambda}) \end{pmatrix}.$$

1. Из равенства $H \cdot F = R$ вытекает, что $h_{11}f_{11} + h_{12}f_{21} = r_{11}$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Так как левая часть этого равенства аналитична при $\operatorname{Re}\lambda < 0$, непрерывна включая границу и ограничена при $\operatorname{Re}\lambda \le 0$, а правая часть обладает аналогичными свойствами в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$, то в силу теоремы Лиувилля эти части постоянны и

$$r_{11} = \lim_{\lambda\to-\infty}(h_{11}f_{11} + h_{12}f_{21}) = 1 - \omega_1\rho^2 p. \tag{26}$$

Аналогично из равенства $h_{21}f_{11} + h_{22}f_{21} = r_{21}$ вытекает равенство

$$r_{21} = \lim_{\lambda\to-\infty}(h_{21}f_{11} + h_{22}f_{21}) = 0, \tag{27}$$

а из соотношения $h_{21}f_{12} + h_{22}f_{22} = r_{22}$ — представление

$$r_{12} = \sum_{k=0}^{\gamma} r_{12}^{(k)} e^{-\lambda k}. \tag{28}$$

Из равенства $F = L \cdot R$ следует равенство

$$\det F = \det L \cdot \det R, \tag{29}$$

представляющее каноническую факторизацию функции $\det F$. Поскольку

$$\det F = (1-\rho^2\varphi(\lambda))(1-\omega_1\omega_2\rho^2\varphi(\lambda)),\ 1-\rho^2\varphi(\lambda) = (1-e^{\lambda}q\rho^2(1-p\rho^2)^{-1})(1-p\rho^2),$$

то

$$\det F = \left(1 - e^{\lambda}\frac{q\rho^2}{1-p\rho^2}\right)\left(1 - e^{\lambda}\frac{q\omega_1\omega_2\rho^2}{1-p\omega_1\omega_2\rho^2}\right)(1-p\rho^2)(1-p\omega_1\omega_2\rho^2)$$

также каноническая факторизация $\det F$. Из последнего равенства и соотношения (29) находим

$$\det R = (1-p\rho^2)(1-p\omega_1\omega_2\rho^2)$$

и, следовательно,

$$r_{22} = \frac{\det R}{r_{11}} = \frac{(1-p\rho^2)(1-p\omega_1\omega_2\rho^2)}{1-p\omega_1\rho^2}. \tag{30}$$

2. Из соотношения $F = L \cdot R$ вытекает $f_{11} = l_{11}r_{11}$, $f_{21} = l_{21}r_{11}$, а отсюда в силу (26) —

$$l_{11} = \frac{1-\omega_1\rho^2(p+qe^{\lambda})}{1-p\omega_1\rho^2}, \tag{31}$$

$$l_{21} = \frac{\rho(1-\omega_1)e^{\lambda\gamma}(p+qe^{\lambda})}{1-p\omega_1\rho^2}. \tag{32}$$

Из соотношения $f_{12}=l_{11}r_{12}+l_{12}r_{22}$ и (28), (31) имеем

$$\rho(1-\omega_2)e^{-\lambda\gamma}=\left(1-\frac{q\omega_1\rho^2}{1-p\omega_1\rho^2}\right)e^{\lambda}\sum_{k=0}^{\gamma}r_{12}^{(k)}e^{-\lambda k}+r_{22}\sum_{k=1}^{\infty}l_{12}^{(k)}e^{\lambda k}.$$

Отсюда в силу теоремы Лиувилля получим

$$r_{12}^{(\gamma)}=\rho(1-\omega_2),\quad r_{12}^{(k)}=\frac{q\omega_1\rho^2}{1-p\omega_1\rho^2}r_{12}^{(k+1)}\quad (k=\overline{0,\gamma-1}),$$
$$-\frac{q\omega_1\rho^2}{1-p\omega_1\rho^2}r_{12}^{(0)}+l_{12}^{(1)}r_{22}=0,\quad l_{12}^{k}=0\quad (k=2,\dots)$$

и, следовательно,

$$r_{12}=\rho(1-\omega_2)\left(\frac{q\omega_1\rho^2}{1-p\omega_1\rho^2}\right)^{\gamma}\sum_{k=0}^{\gamma}\left(\frac{1-p\omega_1\rho^2}{q\omega_1\rho^2}\right)^{k}e^{-\lambda k},\tag{33}$$

$$l_{12}=e^{\lambda}\left(\frac{q\omega_1\rho^2}{1-p\omega_1\rho^2}\right)^{\gamma+1}\rho(1-\omega_2)\frac{1-p\omega_1\rho^2}{(1-p\rho^2)(1-p\omega_1\omega_2\rho^2)}.\tag{34}$$

Из соотношения $f_{22}=l_{21}r_{12}+l_{22}r_{22}$ имеем

$$l_{22}=\Bigg[1-\omega_2\rho^2(p+qe^{\lambda})-\frac{\rho^2(1-\omega_1)(1-\omega_2)(p+qe^{\lambda})}{1-p\omega_1\rho^2}$$
$$\times\sum_{k=0}^{\gamma}\left(\frac{q\omega_1\rho^2}{1-p\omega_1\rho^2}\right)^{k}e^{\lambda k}\Bigg]\frac{1-p\omega_1\rho^2}{(1-p\rho^2)(1-p\omega_1\omega_2\rho^2)}.\tag{35}$$

3. Таким образом, компоненты T-л.к.ф. матрицы (24) имеют вид

$$\Phi_+(\bar\gamma,\lambda,\overline{\omega},\rho)=\left(1-e^{\lambda}\frac{q\rho^2}{1-p\rho^2}\right)^{-1}\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}\\ l_{21}&l_{22}\end{pmatrix},$$
$$\Phi_-(\bar\gamma,\lambda,\overline{\omega},\rho)=(1-p\rho^2)^{-1}\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}\\ r_{21}&r_{22}\end{pmatrix},$$

где функции l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22} заданы соотношениями (31), (34), (32), (35), а функции r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22} — соотношениями (26), (33), (27), (30).

Пример 2. Пусть $\xi_1,\xi_2,\dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$\varphi(\lambda)=M(e^{\lambda\xi_1})=\frac{1}{2}(e^{-\lambda}+e^{\lambda}),\quad \operatorname{Re}\lambda=0$$

и $\bar\gamma=(0,2)$. В силу результатов работы [5, гл. 3, § 16] каноническое разложение функции $1-\rho^2\varphi(\lambda))$ при $|\rho|<1$, $\operatorname{Re}\lambda=0$ имеет вид

$$1-\rho^2\varphi(\lambda)=\left(1-e^{\lambda}\frac{\rho^2}{1+\sqrt{1-\rho^4}}\right)\left(1-e^{-\lambda}\frac{\rho^2}{1+\sqrt{1-\rho^4}}\right)\frac{1+\sqrt{1-\rho^4}}{2}.\tag{36}$$

Отсюда легко находится соответствующее разложение для скалярного множителя в правой части (25). Найдем компоненты T-л.к.ф. матричного множителя в правой части (25), имеющего в данном случае вид

$$F=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\omega_1\rho^2(e^{-\lambda}+e^{\lambda}) & \rho(1-\omega_2)e^{-2\lambda}\\ \frac{1}{2}\rho(1-\omega_1)e^{2\lambda}(e^{-\lambda}+e^{\lambda}) & 1-\frac{1}{2}\omega_2\rho^2(e^{-\lambda}+e^{\lambda})\end{pmatrix}.$$

1. Из равенства $H \cdot F = R$ вытекает равенство $h_{11}f_{11} + h_{12}f_{21} = r_{11}$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ или, после группировки,

$$1 - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{\lambda} - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{11}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda k}\biggl(h_{11}^{(k)} - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{11}^{(k+1)} - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{11}^{(k)} e^{\lambda} + \frac{1}{2}(1-\omega_1)\rho h_{12}^{(k)}(e^{\lambda} + e^{3\lambda})\biggr) = r_{11} + \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{-\lambda}. \quad (37)$$

Из определения T-л.к.ф. вытекает, что левая часть последнего равенства аналитична при $\operatorname{Re}\lambda < 0$, непрерывна и ограничена при $\operatorname{Re}\lambda \le 0$; аналогичными свойствами в правой полуплоскости обладает и правая часть. Поэтому по теореме Лиувилля левая и правая части (37) постоянны. Отсюда после перехода в левой части (37) к пределу при $\lambda \to -\infty$ получим

$$r_{11} = 1 - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{11}^{(1)} - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{-\lambda}. \quad (38)$$

Так как левая часть (37) — величина постоянная, то, в частности, коэффициент при e^{λ} равен нулю, т. е.

$$-\frac{1}{2}\omega_1\rho^2 + h_{11}^{(1)} - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{11}^{(2)} = 0.$$

Отсюда

$$h_{11}^{(2)} = \frac{2h_{11}^{(1)}}{\omega_1\rho^2} - 1. \quad (39)$$

Из равенства $H \cdot F = R$ также имеем $h_{11}f_{12} + h_{12}f_{22} = r_{12}$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ или, после группировки,

$$\rho(1-\omega_2)h_{11}^{(2)} - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{12}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda k}\biggl(\rho(1-\omega_2)h_{11}^{(k+2)} + h_{12}^{(k)} - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{12}^{(k+1)} - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{12}^{(k)} e^{\lambda}\biggr) = r_{12} - \rho(1-\omega_2)e^{-2\lambda} - \rho(1-\omega_2)h_{11}^{(1)} e^{-\lambda}.$$

Отсюда аналогично (38) получим

$$\rho(1-\omega_2)h_{11}^{(2)} - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{12}^{(1)} = r_{12} - \rho(1-\omega_2)e^{-2\lambda} - \rho(1-\omega_2)h_{11}^{(1)} e^{-\lambda}$$

или, учитывая равенство (39),

$$r_{12} = \rho(1-\omega_2)\biggl(\frac{2h_{11}^{(1)}}{\omega_1\rho^2} - 1\biggr) - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{12}^{(1)} + \rho(1-\omega_2)h_{11}^{(1)} e^{-\lambda} + \rho(1-\omega_2)e^{-2\lambda}. \quad (40)$$

В силу равенства $h_{21}f_{11} + h_{22}f_{21} = r_{21}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_{21}^{(k)} e^{\lambda k}\biggl(1 - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{-\lambda} - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{\lambda}\biggr) + \biggl(1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_{22}^{(k)} e^{\lambda k}\biggr) \times \frac{1}{2}\rho(1-\omega_1)(e^{\lambda} + e^{3\lambda}) = r_{21},$$

откуда в силу теоремы Лиувилля находим

$$r_{21} = -\frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{21}^{(1)} \quad (41)$$

и аналогично (39)

$$h_{21}^{(2)} = \frac{2h_{21}^{(1)} + \rho(1-\omega_1)}{\omega_1\rho^2}. \tag{42}$$

В силу равенства $h_{21}f_{12} + h_{22}f_{22} = r_{22}$ имеем

$$\rho(1-\omega_2)h_{21}^{(2)} + 1 - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 e^{\lambda} - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{22}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda k}\Bigg(\rho(1-\omega_2)h_{21}^{(k+2)} + h_{22}^{(k)}$$

$$- \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{22}^{(k+1)} - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{22}^{(k)} e^{\lambda}\Bigg) = r_{22} - \rho(1-\omega_2)h_{21}^{(1)}e^{-\lambda} + \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 e^{-\lambda}.$$

Отсюда аналогично (38)

$$\rho(1-\omega_2)h_{21}^{(2)} + 1 - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{22}^{(1)} = r_{22} - \rho(1-\omega_2)h_{21}^{(1)}e^{-\lambda} + \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 e^{-\lambda},$$

и окончательно ввиду (42) получим

$$r_{22} = (1-\omega_2)\frac{2h_{21}^{(1)} + \rho(1-\omega_1)}{\omega_1\rho} + 1 - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{22}^{(1)} + \rho e^{-\lambda}\Bigg((1-\omega_2)h_{21}^{(1)} - \frac{1}{2}\omega_2\rho\Bigg). \tag{43}$$

2. Таким образом, для определения компоненты R T-л.к.ф. матрицы F осталось найти функции $h_{ij}^{(1)}$, $i,j = 1,2$. Предварительно заметим, что

$$\begin{pmatrix} h_{11}^{(1)} & h_{12}^{(1)} \\ h_{21}^{(1)} & h_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \lim_{\lambda\to-\infty}(H-I)e^{-\lambda} = \lim_{\lambda\to-\infty} H(I-L)e^{-\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda\to-\infty}\Bigg(I-L\Bigg)e^{-\lambda} = -\begin{pmatrix} l_{11}^{(1)} & l_{12}^{(1)} \\ l_{21}^{(1)} & l_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$l_{ij}^{(1)} = -h_{ij}^{(1)}, \quad i,j = 1,2. \tag{44}$$

Далее, из равенства $F = L \cdot R$ вытекает равенство

$$\det F = \det L \cdot \det R. \tag{45}$$

Так как для определителя матрицы F справедливо соотношение (см. (25))

$$\det F = (1-\rho^2\varphi(\lambda))(1-\omega_1\omega_2\rho^2\varphi(\lambda)),$$

то в силу (36) имеем

$$\det F = (1-K_1e^{\lambda})(1-K_2e^{\lambda})(1-K_1e^{-\lambda})(1-K_2e^{-\lambda})B, \tag{46}$$

где

$$K_1 = \frac{\rho^2}{1+\sqrt{1-\rho^4}}, \quad K_2 = \frac{\omega_1\omega_2\rho^2}{1+\sqrt{1-\omega_1^2\omega_2^2\rho^4}}, \quad B = \frac{1}{4}\omega_1\omega_2\rho^4 K_1^{-1}K_2^{-1}. \tag{47}$$

Из соотношений (45), (46) с помощью теоремы Лиувилля получаем

$$\det L = (1-K_1e^{\lambda})(1-K_2e^{\lambda}), \quad \det R = (1-K_1e^{-\lambda})(1-K_2e^{-\lambda})B. \tag{48}$$

Обозначим через $O_i(e^{-k\lambda})$, $k = 1,2\ldots$, функции, аналитичные при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, непрерывные и ограниченные при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ и удовлетворяющие условию

$$\overline{\lim_{\lambda\to+\infty}}\, O_i(e^{-k\lambda})e^{k\lambda} < \infty.$$

Так как (см. (48))

$$\det H = (\det L)^{-1} = 1 + (K_1 + K_2)e^{\lambda} + O_1(e^{2\lambda})$$

и, с другой стороны,

$$\det H = 1 + (h_{11}^{(1)} + h_{22}^{(1)})e^{\lambda} + O_2(e^{2\lambda}),$$

то

$$h_{22}^{(1)} = K_1 + K_2 - h_{11}^{(1)}. \tag{49}$$

Переходя от матрицы R к обратной матрице G в силу второго равенства соотношения (48) получим

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = B^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\lambda p} \sum_{v=0}^{p} K_1^v K_2^{p-v} \begin{pmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{pmatrix}$$

и, следовательно, согласно (43), (40), (41), (38) —

$$\begin{gathered} g_{11} = B^{-1}\left[(1-\omega_2)\frac{2h_{21}^{(1)} + \rho(1-\omega_1)}{\omega_1\rho} + 1 - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{22}^{(1)} + O_1(e^{-\lambda})\right], \\ g_{12} = B^{-1}\left[\frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{12}^{(1)} - \rho(1-\omega_2)\left(\frac{2h_{11}^{(1)}}{\omega_1\rho^2} - 1\right) + O_2(e^{-\lambda})\right], \\ g_{21} = B^{-1}\left[\frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{21}^{(1)} + O_3(e^{-\lambda})\right], \quad g_{22} = B^{-1}\left[1 - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{11}^{(1)} + O_4(e^{-\lambda})\right]. \end{gathered} \tag{50}$$

Из соотношения $F \cdot G = L$ вытекает $f_{11}g_{11} + f_{12}g_{21} = l_{11}$, т. е.

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{-\lambda} - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{\lambda}\right)B^{-1}\left[(1-\omega_2)\frac{2h_{21}^{(1)} + \rho(1-\omega_1)}{\omega_1\rho} + 1\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{22}^{(1)} + O_1(e^{-\lambda})\right] + \rho(1-\omega_2)e^{-2\lambda}B^{-1}\left[\frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{21}^{(1)} + O_3(e^{-\lambda})\right] = l_{11}. \end{aligned}$$

Последнее равенство в силу теоремы Лиувилля влечет

$$l_{11} = 1 - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 B^{-1}\left[(1-\omega_2)\frac{2h_{21}^{(1)} + \rho(1-\omega_1)}{\omega_1\rho} + 1 - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{22}^{(1)}\right]e^{\lambda}. \tag{51}$$

Отсюда вследствие (44), (49)

$$(1-\omega_2)\frac{2h_{21}^{(1)} + \rho(1-\omega_1)}{\omega_1\rho} + 1 - \frac{1}{2}\omega_2\rho^2\bigl(K_1 + K_2 - h_{11}^{(1)}\bigr) = \frac{2Bh_{11}^{(1)}}{\omega_1\rho^2}. \tag{52}$$

Разрешая (52) относительно $h_{21}^{(1)}$, получим

$$h_{21}^{(1)} = \frac{\omega_1\rho}{4(1-\omega_2)}\left[h_{11}^{(1)}\omega_2\rho^2\bigl(K_1^{-1}K_2^{-1} - 1\bigr) - 2 + \omega_2\rho^2(K_1 + K_2)\right] - \frac{1}{2}\rho(1-\omega_1). \tag{53}$$

Из соотношения $F \cdot G = L$ также вытекает $f_{11}g_{12} + f_{12}g_{22} = l_{12}$, и, следовательно, в силу (50) имеем

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{-\lambda} - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{\lambda}\right)B^{-1}\left[\frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{12}^{(1)} - \rho(1-\omega_2)\left(\frac{2h_{11}^{(1)}}{\omega_1\rho^2} - 1\right) + O_2(e^{-\lambda})\right] \\ &\qquad + \rho(1-\omega_2)e^{-2\lambda}B^{-1}\left[1 - \frac{1}{2}\omega_1\rho^2 h_{11}^{(1)} + O_4(e^{-\lambda})\right] = l_{12}. \end{aligned}$$

Отсюда аналогично (51)

$$l_{12} = -\frac{1}{2}\omega_1\rho^2 e^{\lambda} B^{-1}\left[\frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{12}^{(1)} - \rho(1-\omega_2)\left(\frac{2h_{11}^{(1)}}{\omega_1\rho^2} - 1\right)\right]$$

и в силу (44)

$$\frac{1}{2}\omega_2\rho^2 h_{12}^{(1)} - \rho(1-\omega_2)\left(\frac{2h_{11}^{(1)}}{\omega_1\rho^2} - 1\right) = \frac{2Bh_{12}^{(1)}}{\omega_1\rho^2}. \tag{54}$$

Разрешая (54) относительно $h_{12}^{(1)}$, получим

$$h_{12}^{(1)} = \frac{2\rho(1-\omega_2)\big(2h_{11}^{(1)} - \omega_1\rho^2\big)}{\omega_1\omega_2\rho^4 - 4B}. \tag{55}$$

Таким образом, нахождение матрицы R свелось к нахождению функции $h_{11}^{(1)}$. Выразим элементы R через $h_{11}^{(1)}$. Компонента r_{11} выражена через $h_{11}^{(1)}$ (см. (38)). Рассмотрим остальные компоненты матрицы R. В силу соотношений (40), (54), (55) имеем

$$r_{12} = \frac{-4B(1-\omega_2)\big(2h_{11}^{(1)} - \omega_1\rho^2\big)}{\omega_1\rho(\omega_1\omega_2\rho^4 - 4B)} + \rho(1-\omega_2)h_{11}^{(1)}e^{-\lambda} + \rho(1-\omega_2)e^{-2\lambda}. \tag{56}$$

Из (41), (53) находим

$$r_{21} = -\frac{1}{8}\frac{\omega_1\rho}{1-\omega_2}\big[h_{11}^{(1)}(4B - \omega_1\omega_2\rho^4) - 2\omega_1\rho^2 + \omega_1\omega_2\rho^4(K_1+K_2)\big] + \frac{1}{4}\omega_1(1-\omega_1)\rho^3. \tag{57}$$

Из соотношений (43), (52), (53) следует, что

$$r_{22} = \frac{2Bh_{11}^{(1)}}{\omega_1\rho^2} + \frac{1}{4}\rho^2 e^{-\lambda}\big(\omega_1\omega_2\rho^2 h_{11}^{(1)}\big(K_1^{-1}K_2^{-1} - 1\big) + \omega_1\omega_2\rho^2(K_1+K_2) - 2 - 2\omega_1\omega_2\big). \tag{58}$$

Для нахождения $h_{11}^{(1)}$ осталось сравнить свободные члены в обеих частях соотношения (см. (48))

$$\det R = (1 - K_1e^{-\lambda})(1 - K_2e^{-\lambda})B.$$

В силу равенств (44), (56)–(58) получим

$$\begin{gathered} h_{11}^{(1)} = \big(-8B\omega_1\rho^2 - \omega_1^3\omega_2\rho^8(K_1+K_2) + 2\omega_1^2\rho^6(1+\omega_1\omega_2)\big) \\ \times\big(-16B - 2\omega_1^2\omega_2\rho^6(K_1+K_2) + 4\omega_1\rho^4(1+\omega_1\omega_2) + \omega_1\rho^4(4B - \omega_1\omega_2\rho^4)\big)^{-1}. \end{gathered} \tag{59}$$

3. Таким образом, в силу (36) факторизационная компонента $\Phi_-(\bar\gamma, \lambda, \varpi, \rho)$ матрицы (25) при $\bar\gamma = (0,2)$ имеет вид

$$\Phi_-(\bar\gamma, \lambda, \varpi, \rho) = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^4}}\left(1 - e^{-\lambda}\frac{\rho^2}{1+\sqrt{1-\rho^4}}\right)^{-1} R,$$

где элементы r_{ij}, $i, j = 1, 2$, матрицы R определяются соотношениями (38), (56)–(59).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Takacs L.* On some recurrence equations in a Banach algebra // Acta Sci. Math. 1976. V. 38. P. 399–416.

2. *Лугавов В. С.* О распределении времени пребывания на полуоси и положения в последний момент времени процесса с независимыми приращениями, управляемого цепью Маркова // Тр. Ин-та математики АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск: Наука, 1984. Т. 3. С. 143–159.

3. *Takacs L.* On fluctuations of sums of random variables // Studies in probability and ergodic theory. Advances in mathematics supplementary studies. 1978. V. 2. P. 45–93.

4. *Пресман Э. Л.* Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 4. С. 861–900.

5. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

6. *Kemperman J. H. B.* A Winer — Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary // Ann. Math. Statist. 1963. V. 34, N 4. P. 1168–1193.

7. *Печерский Е. А.* Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и из полуинтервала // Теория вероятностей и ее применения. 1974. Т. 19, № 1. С. 104–119.

8. *Лотов В. И.* Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I; II // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 3. С. 475–485; № 4. С. 873–879.

9. *Лотов В. И.* Об асимптотике распределений, связанных с выходом недискретного случайного блуждания из интервала // Тр. Ин-та математики АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск: Наука, 1982. Т. 1. С. 18–25.

10. *Лугавов В. С.* О времени пребывания в полуплоскости и полосе процессов, управляемых цепью Маркова // Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам: Тез. докл. М.: ТВП, 1996. С. 108–109.

Статья поступила 17 марта 2000 г.

Лугавов Вячеслав Семенович
Курганский ВИ ФПС России, кафедра математики и информатики, Курган 640016
Рогозин Борис Алексеевич
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
ул. Певцова, 13, Омск 644099