Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 514.13

ХИРУРГИИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ 3–ОРБИФОЛДАХ МАЛОГО ОБЪЕМА

А. Ю. Веснин, А. Д. Медных, Б. Циммерманн

Аннотация: Три наименьших по объему гиперболических 3-орбифолда с нежесткими каспами были описаны Адамсом. Минимальные регулярные накрытия этих орбифолдов являются дополнениями известных зацеплений в трехмерной сфере. В данной работе устанавливается точное соответствие между параметрами хирургии на орбифолдах Адамса и накрывающих их многообразий. Это, в частности, дает возможность применять компьютерную программу SnapPea для вычисления объемов гиперболических 3-орбифолдов. Библиогр. 30.

Введение

Мощным средством вычисления объемов гиперболических 3-многообразий является разработанная Виксом компьютерная программа SnapPea. Гиперболические 3-многообразия малого объема изучались достаточно интенсивно. Наименьшее среди известных многообразие $\mathscr{M}_1$ с объемом 0.942707 было независимо обнаружено С. В. Матвеевым и А. Т. Фоменко, а также Дж. Виксом. Десять многообразий наименьшего объема описаны в [1, 2], где, в частности, они были получены хирургиями Дэна на гиперболических узлах и зацеплениях малого объема.

Структура множества объемов гиперболических 3-орбифолдов дана в [3]. Вычисление объемов гиперболических 3-орбифолдов, сингулярные множества которых получены обобщенными хирургиями на зацеплениях в трехмерной сфере, возможно также благодаря SnapPea.

Если же сингулярным множеством 3-орбифолда является граф, отличный от зацепления, то такого единого средства не существует и вычисление объемов представляет собой трудную задачу, которая требует индивидуального подхода в каждом отдельном случае. В связи с этим представляется естественным изучение 3-орбифолдов, получаемых хирургиями на гиперболических 3-орбифолдах.

Цель данной работы — изучение замкнутых гиперболических 3-орбифолдов, получаемых хирургией на наименьших гиперболических 3-орбифолдах с каспами, и накрытий этих орбифолдов гиперболическими 3-многообразиями, полученными хирургией на зацеплениях. Напомним [3, 4], что любой замкнутый гиперболический 3-орбифолд может быть получен с помощью хирургии на

Первые два автора благодарят Университет Триеста за гостеприимство и Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку (коды проектов 98–01–00699 и 99–01–00630)

орбифолде с *нежестким* каспом (т. е. каспом, на котором может быть осуществлена хирургия, или заполнение, Дэна). Три наименьших по объему гиперболических 3-орбифолда с нежесткими каспами описаны Адамсом [4]. Минимальные регулярные накрытия этих орбифолдов являются дополнениями известных зацеплений в трехмерной сфере. Например, наименьший орбифолд с нежестким каспом — *орбифолд Пикара* (фактор-пространство трехмерного гиперболического пространства по действию группы Пикара), накрывается дополнением к зацеплению «борромеевы кольца»; и орбифолды, полученные хирургией на орбифолде Пикара, накрываются многообразиями (в общем случае — коническими многообразиями), полученными подходящими хирургиями на «борромеевых кольцах».

В данной работе устанавливается точное соответствие между параметрами хирургии на орбифолдах Адамса и на накрывающих их многообразиях. Это дает возможность применять компьютерную программу SnapPea для вычисления объемов гиперболических 3-орбифолдов.

Здесь и далее мы будем рассматривать только ориентируемые 3-орбифолды и использовать основные факты теории орбифолдов, следуя [3, 5].

Как и объемы гиперболических 3-многообразий, объемы гиперболических 3-орбифолдов образуют вполне упорядоченное недискретное подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$ порядкового типа ω^ω, и каждый объем реализуется лишь для конечного числа орбифолдов [3]. В частности, существуют гиперболический орбифолд наименьшего объема (который до сих пор не известен) и также наименьший предельный объем.

Сингулярное множество наименьшего известного гиперболического 3-орбифолда приведено на рис. 0.1 (его носителем является трехмерная сфера; реберные метки «2» на рисунке опущены). Его объем (приближенно) равен 0.039050.

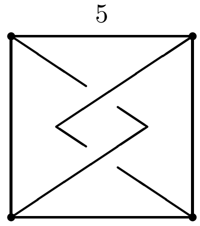

Рис. 0.1. Орбифолд наименьшего объема

Как установлено в [4], единственным наименьшим по объему 3-орбифолдом с нежестким каспом является *орбифолд Пикара*, определяемый как фактор-пространство трехмерного гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$ по действию группы Пикара $PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ и имеющий объем 0.305321. Таким образом, этот объем — наименьший предельный объем. По теореме о гиперболической хирургии объем орбифолда с каспом служит точным верхним пределом объемов орбифолдов, полученных хирургией на этом каспе. Из того, что все гиперболические орбифолды, объемы которых ограничены некоторой константой, могут быть получены хирургией на конечном множестве орбифолдов с каспами [3], следует, что все, кроме конечного числа, гиперболические 3-орбифолды, объемы которых меньше объема орбифолда Пикара, получаются хирургией на орбифолде Пикара.

Наименьшие 3-орбифолды с каспами найдены Мейергоффом и Адамсом. Они имеют в точности один (жесткий) касп, поэтому их объемы не могут быть предельными (различные описания этих орбифолдов даны в [6]).

Три наименьших гиперболических 3-орбифолда с нежесткими каспами найдены Адамсом [4]; их объемы равны 0.305321, 0.444451 и 0.457982. Мы будем называть эти орбифолды *орбифолдами Адамса* и обозначать их через $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_3$. В частности, $\mathscr{A}_1$ является орбифолдом Пикара $\mathbb{H}^3/PSL(2,\mathbb{Z}[i])$. Носителем орбифолда $\mathscr{A}_1$ служит 3-сфера с выколотой точкой $S^3\setminus\{\infty\}$, а его сингулярное множество изображено на рис. 0.2 слева. Обозначим через $\mathscr{A}_1(p,q)$ орбифолд, изображенный на рис. 0.2 справа, полученный (p,q)-хирургией на каспе орбифолда $\mathscr{A}_1$ (см. определения в § 1).

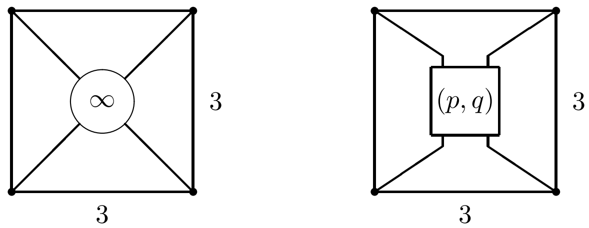

Рис. 0.2. Орбифолды $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_1(p,q)$

Известно (см. [4, 7] или [8]), что орбифолд $\mathscr{A}_1$ 24-листно накрывается дополнением к зацеплению «борромеевы кольца», которое является трехкомпонентным зацеплением 6^3_2 в обозначениях Рольфсена [9]. В § 2 мы покажем, что многообразие $6^3_2(p,q)$ (или, возможно, орбифолд или коническое многообразие), полученное (p,q)-хирургией на всех трех компонентах «борромеевых колец», является 24-листным регулярным накрытием орбифолда $\mathscr{A}_1(p-2q,p+2q)$, полученного $(p-2q,p+2q)$-хирургией на орбифолде Пикара. С помощью SnapPea (см. [10]) это позволяет вычислить объемы таких орбифолдов.

Второй орбифолд Адамса может быть получен как фактор-пространство вида $\mathscr{A}_2=\mathbb{H}^3/PGL(2,O_7)$, где для положительного, не являющегося квадратом, целого d через O_d мы обозначаем кольцо целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. В частности, орбифолд $\mathscr{A}_2$ также арифметический. Носителем орбифолда $\mathscr{A}_2$ является $S^3\setminus\{\infty\}$, а его сингулярное множество изображено на рис. 0.3 (см. [11], где представлено изображение $\mathbb{H}^3/PSL(2,O_7)$, или [12]).

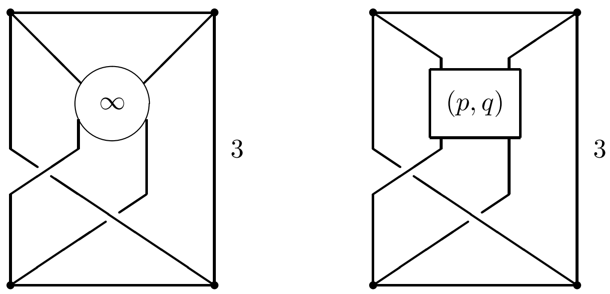

Рис. 0.3. Орбифолды $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_2(p,q)$

Как отмечено Адамсом [4], орбифолд $\mathscr{A}_2$ 12-листно накрывается дополнением трехкомпонентного зацепления 6^3_1 в S^3. Некоторые дополнения зацеплений, соизмеримые с $\mathscr{A}_2$, приведены в [8, 13]. В § 3 мы опишем точное соответствие между параметрами хирургии на орбифолде $\mathscr{A}_2$ и зацеплении 6^3_1. Наконец, орбифолд $\mathscr{A}_3$ 16-листно накрывается дополнением четырехкомпонентного зацепления 8^4_2. Точное соответствие между параметрами хирургии на орбифолде $\mathscr{A}_3$ и на зацеплении 8^4_2 будет установлено в § 4.

§ 1. Предварительные сведения

Для пары рациональных чисел p и q существует единственное представление $(p,q) = d(p',q')$, где p' и q' — взаимно простые целые числа и d является положительным рациональным числом.

По определению результатом (p,q)-хирургии на узле в S^3 является *коническое многообразие*, носитель которого — трехмерное многообразие, полученное обычной p'/q'-хирургией на узле [9], а сингулярное множество — центральная кривая во вклеенном заполненном торе, конический угол при которой равен $2\pi/d$ (см. [14] или [15] о конических многообразиях). Отметим, что такое коническое многообразие является многообразием (т. е. имеет пустое сингулярное множество) или орбифолдом в случаях, если d равно 1 или является целым соответственно.

Рациональным (p,q)*-танглом* будем называть коническое многообразие, определяемое рациональным танглом с наклоном p'/q', обе дуги которого помечены двойкой, с дополнительной дугой, помеченной d для конического угла $2\pi/d$ (который при $d=1$ не изображается; см. детали и рисунки в [16]). Некоторые иллюстративные примеры приведены на рис. 1.1. Результатом (p,q)-хирургии на нежестком каспе 3-орбифолда будет коническое многообразие, полученное вклеиванием (p,q)-тангла в касп, как изображено на рис. 0.2. Коническое многообразие становится орбифолдом при целом d.

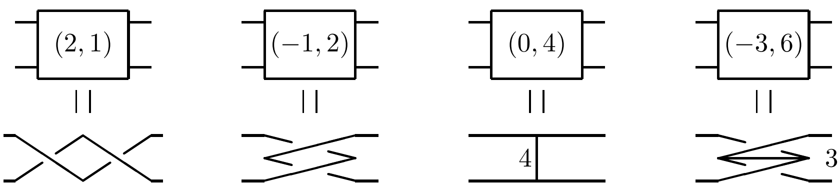

Рис. 1.1. Примеры танглов

Для удобства терминологии коническое многообразие, полученное (p,q)-хирургией на орбифолде, также будем называть орбифолдом.

Хорошо известные свойства рациональных танглов, которыми мы будем пользоваться ниже, приведены на рис. 1.2 (см. также [17]).

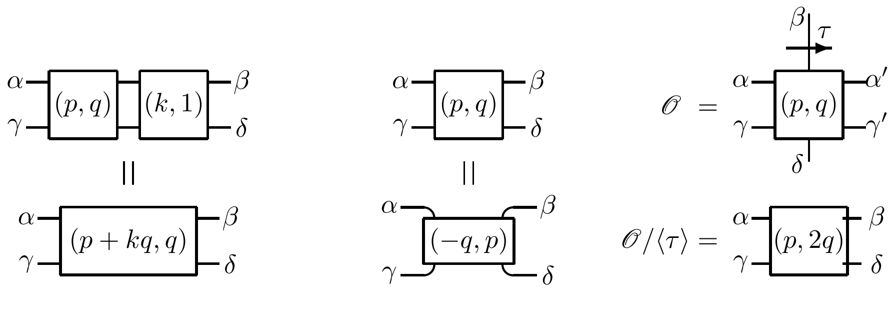

Рис. 1.2. Свойства танглов

§ 2. «Борромеевы кольца», орбифолд Пикара и θ-граф Волькотт

В этом параграфе мы рассмотрим класс замкнутых конических 3-многообразий, полученных хирургией на зацеплении 6^3_2 — «борромеевы кольца», изображенном на рис. 2.1.

Напомним, что 6^3_2 обладает симметриями, попарно меняющими каждые две из его компонент. Обозначим через $6^3_2((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ коническое многообразие, полученное хирургией на трех компонентах «борромеевых колец» 6^3_2 с параметрами хирургии (p_1, q_1), (p_2, q_2) и (p_3, q_3). Отметим, что все многообразия, получаемые хирургиями на зацеплении Уайтхеда 5^2_1 и узле «восьмерка» 4_1 принадлежат рассматриваемому классу. А именно, $6^3_2((p_1, q_1), (p_2, q_2), (-1, 1)) = 5^2_1((p_1, q_1), (p_2, q_2))$ и соответственно $6^3_2((p_1, q_1), (-1, 1), (1, 1)) = 4_1(p_1, q_1)$. Поскольку «борромеевы кольца» 6^3_2 являются гиперболическим зацеплением [5], большинство из получаемых хирургией многообразий также гиперболичны.

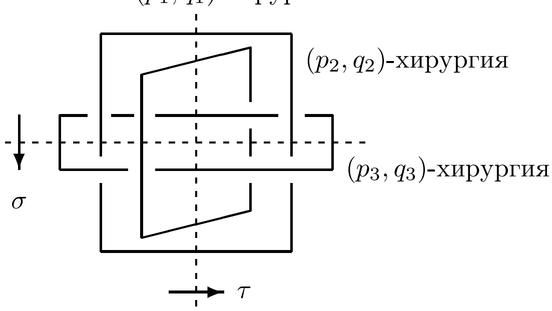

Рис. 2.1. «Борромеевы кольца» 6^3_2

Группа сохраняющих ориентацию симметрий зацепления 6^3_2 изоморфна симметрической группе $\mathbb{S}_4$ порядка 24 (см. [18] или [19]), и эта группа симметрий может быть реализована ортогональным действием $\mathbb{S}_4$ на 3-сфере, оставляющим зацепление инвариантным. Мы начнем с рассмотрения случая $\mathbb{S}_4$-эквивариантной хирургии на 6^3_2, т. е. хирургии, при которой параметры на всех трех компонентах зацепления 6^3_2 совпадают и равны, скажем, (p, q). В этом случае соответствующее коническое многообразие будем обозначать через $6^3_2(p, q)$. Действие $\mathbb{S}_4$ на дополнении к зацеплению 6^3_2 индуцирует действие $\mathbb{S}_4$ на $6^3_2(p, q)$.

Теорема 2.1. *Для любых рациональных чисел p и q коническое многообразие $6^3_2(p, q)$, полученное $\mathbb{S}_4$-эквивариантной (p, q)-хирургией на «борромеевых кольцах», является регулярным $\mathbb{S}_4$-накрытием орбифолда $\mathscr{A}_1(p-2q, p+2q)$, полученного $(p-2q, p+2q)$-хирургией на орбифолде Пикара.*

Доказательство. Начнем с $6^3_2((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ — конического многообразия, полученного хирургией на «борромеевых кольцах» (см. рис. 2.1). Оси инволюций τ и σ из группы симметрий $\mathbb{S}_4$ изображены пунктирными линиями. Инволюция τ является строго обратимой для двух компонент зацепления 6^3_2. Сингулярное множество фактор-орбифолда $6^3_2((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))/\langle\tau\rangle$ изображено на рис. 2.2.

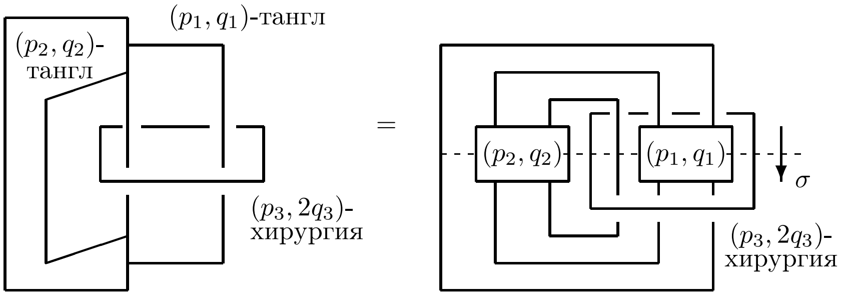

Рис. 2.2. Орбифолд $6_2^3((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))/\langle\tau\rangle$

Инволюция σ зацепления 6_2^3 индуцирует инволюцию этого фактор-орбифолда, которую также обозначим σ. Сингулярное множество орбифолда $6_2^3((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))/\langle\tau, \sigma\rangle$ приведено на рис. 2.3. Оно является обобщением пространственного θ-графа в смысле Волькотт [20]. В частности, если $i = 2q_1/p_1$, $j = 2q_2/p_2$ и $k = 2q_3/p_3$ целые, то соответствующее сингулярное множество совпадает с θ-графом Волькотт $\mathscr{W}(i, j, k)$.

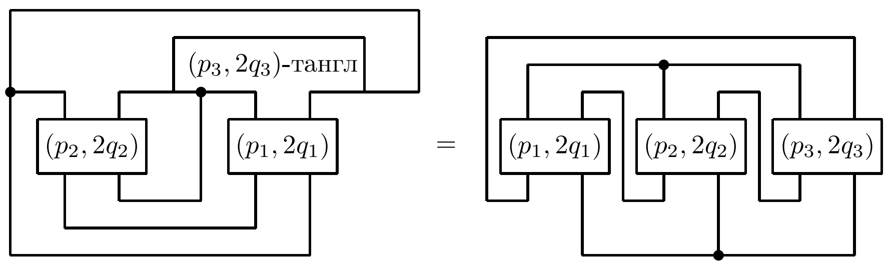

Рис. 2.3. Орбифолд $6_2^3((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))/\langle\tau, \sigma\rangle$

С этого момента мы рассматриваем $\mathbb{S}_4$-эквивариантную хирургию, т. е. полагаем $(p_1, q_1) = (p_2, q_2) = (p_3, q_3) = (p, q)$. Тогда, очевидно, сингулярное множество на рис. 2.3 обладает симметрией ρ третьего порядка, которая циклически переставляет танглы и оставляет вершины графа неподвижными. Сингулярное множество фактор-орбифолда $(6_2^3(p, q)/\langle\tau, \sigma\rangle)/\langle\rho\rangle$ изображено на рис. 2.4. При последовательности эквивалентных преобразований использованы свойства танглов, приведенные на рис. 1.2.

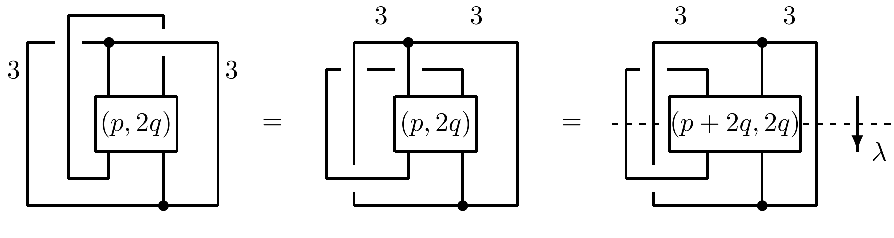

Рис. 2.4. Орбифолд $(6_2^3(p, q)/\langle\tau, \sigma\rangle)/\langle\rho\rangle$

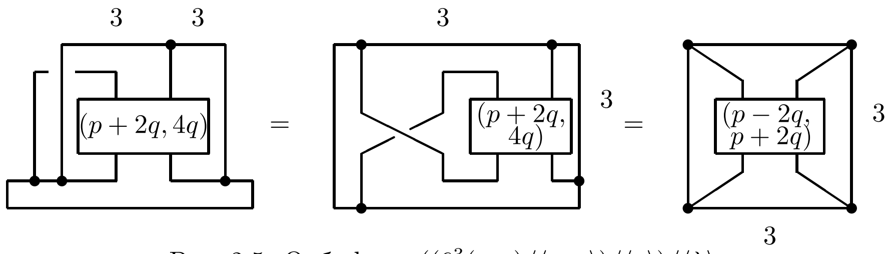

Рис. 2.5. Орбифолд $((6_2^3(p,q)/\langle\tau,\sigma\rangle)/\langle\rho\rangle)/\langle\lambda\rangle$

Очевидно, сингулярное множество, изображенное на рис. 2.4, имеет симметрию λ второго порядка. Сингулярное множество соответствующего фактор-орбифолда $((6_2^3(p,q)/\langle\tau,\sigma\rangle)/\langle\rho\rangle)/\langle\lambda\rangle$ приведено на рис. 2.5.

Как видим, этот фактор-орбифолд совпадает с орбифолдом $\mathscr{A}_1(p-2q, p+2q)$, полученным $(p-2q, p+2q)$-хирургией на каспе орбифолда Пикара $\mathscr{A}_1$. Это завершает доказательство теоремы 2.1. $\square$

Обозначим через $\mathbb{D}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ нормальную подгруппу группы $\mathbb{S}_4$, порожденную инволюциями τ и σ из доказательства теоремы 2.1. Как отмечено выше, сингулярные множества орбифолдов $6_2^3((1,i),(1,j),(1,k))/\mathbb{D}_2$ являются θ-графами Волькотт $\mathscr{W}(i,j,k)$ из [20]. Они обладают следующим свойством. Каждый граф $\mathscr{W}(i,j,k)$ непланарен (т. е. не гомеоморфен в S^3 планарному θ-графу), и все три составляющих узла, образованных парами из трех ребер θ-графа, тривиальны. В силу [21] единственное $\mathbb{D}_2$-накрытие такого θ-графа является гомологической 3-сферой. В этом случае 2-листное разветвленное накрытие S^3 вдоль любого из данных трех составляющих узлов снова будет 3-сферой, а прообраз третьего ребра — узлом в S^3, 2-листное разветвленное накрытие которого совпадает с $\mathbb{D}_2$-накрытием θ-графа. Отметим, что многообразие $6_2^3((p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ является гомологической 3-сферой тогда и только тогда, когда оно имеет вид $6_2^3((1,i),(1,j),(1,k))$.

Для целых i,j,k рассмотрим узлы $\mathscr{K}(i,j,k)$, введенные в [22] и представленные на рис. 2.6, где j и k обозначают число полуоборотов на двух струнах, и i — число полных оборотов на трех струнах.

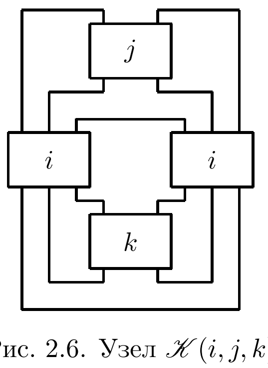

Рис. 2.6. Узел $\mathscr{K}(i,j,k)$

В общем случае три узла $\mathscr{K}(i,j,k)$, $\mathscr{K}(j,k,i)$ и $\mathscr{K}(k,i,j)$ попарно неэквивалентны (см. [22]).

Теорема 2.2. *Гомологическая* 3*-сфера* $6_2^3((1,i),(1,j),(1,k))$ *является регулярным разветвленным* $\mathbb{D}_2$*-накрытием* θ*-графа Волькотт* $\mathscr{W}(i,j,k)$ *и, более того,* *2-листным разветвленным накрытием каждого из узлов* $\mathscr{K}(i,j,k)$, $\mathscr{K}(j,k,i)$ *и* $\mathscr{K}(k,i,j)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из первой части доказательства теоремы 2.1, второе — из [22], где установлено, что при 2-листном накрытии каждого из трех составляющих узлов θ-графа $\mathscr{W}(i,j,k)$ прообраз оставшегося ребра совпадает с одним из трех узлов $\mathscr{K}(i,j,k)$, $\mathscr{K}(j,k,i)$ или $\mathscr{K}(k,i,j)$ соответственно. Доказательство завершено. □

Другая интересная ситуация возникает, когда параметры (p_i, q_i) хирургии на компонентах «борромеевых колец» равны $(1,n)$ или $(2,n)$, где n нечетно во втором случае. При этом в сингулярном множестве фактор-орбифолда $6^3_2((p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))/\mathbb{D}_2$ могут появиться дополнительные дуги с индексом 2 (см. рис. 2.2, 2.3). И снова все три фактор-пространства многообразия $6^3_2((p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ по действию инволюций из группы $\mathbb{D}_2$ являются 3-сферами, но теперь множества ветвления могут быть зацеплениями (см. также [23]).

Замечания.

a) Гиперболический объем. По теореме 2.1 орбифолд $\mathscr{A}_1(x,y)$, полученный хирургией на орбифолде Пикара, имеет 24-листное накрытие коническим многообразием $6^3_2((y+x)/2,(y-x)/4)$, полученным хирургией на «борромеевых кольцах». Применение компьютерной программы SnapPea к «борромеевым кольцам» позволяет вычислить объемы этих конических многообразий (если они гиперболические), а при делении их на 24 — и объемы соответствующих орбифолдов. Наименьшими найденными здесь объемами являются 0.040890 — объем орбифолда $\mathscr{A}_1(4,1)$, накрываемого коническим многообразием $6^3_2(5/2,-3/4)$, и 0.052654 — объем орбифолда $\mathscr{A}_1(3,2)$, накрываемого коническим многообразием $6^3_2(5/2,-1/4)$. По-видимому, эти значения являются вторым и третьим наименьшими объемами гиперболических 3-орбифолдов, следующими за объемом 0.039050 орбифолда, изображенного на рис. 0.1.

Отметим, что независимо вычисления объемов орбифолдов, полученных хирургиями на орбифолде Пикара, были недавно проведены В. Петровым [24] с помощью построения фундаментального полиэдра для орбифолда.

b) Многообразия с равными объемами. По теореме 2.1 конические многообразия $6^3_2(2p,q)$ и $6^3_2(2q,p)$ являются $\mathbb{S}_4$-накрытиями орбифолдов $\mathscr{A}_1(2p-2q,2p+2q)$ и $\mathscr{A}_1(2q-2p,2p+2q)$, которые гомеоморфны (с точностью до отражения). Следовательно, многообразия $6^3_2(2p,q)$ и $6^3_2(2q,p)$, если они гиперболические, имеют одинаковый объем.

c) Негиперболические многообразия. Многообразие $6^3_2(1,1)$, будучи гомологической 3-сферой Пуанкаре, имеет сферическую структуру, следовательно, орбифолд $6^3_2(1,1)/\mathbb{S}_4 = \mathscr{A}_1(-1,3)$ также сферический.

Двулистное разветвленное накрытие «борромеевых колец» или, эквивалентно, орбифолда $6^3_2(2,0)$ является многообразием Ханцше — Вендта M, имеющим евклидову структуру. Значит, $6^3_2(2,0)/\mathbb{S}_4 = \mathscr{A}_1(2,2) = M/(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{S}_4)$ также евклидово. Здесь через $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{S}_4$ обозначена группа сохраняющих ориентацию изометрий многообразия Ханцше — Вендта M (см. [19]).

Многообразие $6^3_2(0,1)$ является трехмерным тором, следовательно, фактор-пространство $6^3_2(0,1)/\mathbb{S}_4 = \mathscr{A}_1(-2,2)$ — евклидов орбифолд.

d) Род Хегора. Поскольку «борромеевы кольца» являются трехмостовым зацеплением, любое 3-многообразие, полученное хирургией на «борромеевых кольцах», имеет род Хегора не более трех. Для целых взаимно простых параметров хирургии при $p > 1$ многообразия $6^3_2(p,q)$ имеют род Хегора три, поскольку их первая группа гомологий изоморфна 3-порожденной группе $(\mathbb{Z}_p)^3$. С другой стороны, все многообразия, полученные хирургией на зацеплении Уайтхеда и узле «восьмерка» (которые являются двухмостовыми зацеплениями), также могут быть получены хирургией на «борромеевых кольцах» и имеют род Хегора не более двух. Напомним, что среди этих многообразий содержатся и десять гиперболических 3-многообразий наименьших известных объемов (см. [2]).

По теореме 2.2 многообразия $6^3_2((1,i),(1,j),(1,k))$ являются 2-листными разветвленными накрытиями трехмостовых узлов $\mathscr{K}(i,j,k)$ (см. рис. 2.6), поэтому род Хегора гомологических 3-сфер $6^3_2((1,i),(1,j),(1,k))$ на превосходит 2.

е) Максимально симметричные многообразия и эквивариантный род Хегора. Некоторые из многообразий $6^3_2(p,q)$ являются максимально симметричными $\mathbb{S}_4$-многообразиями [25]: они допускают сплетение Хегора рода три, инвариантное относительно действия группы $\mathbb{S}_4$, которая реализует максимальный порядок $12(g-1)$ для конечной группы, действующей на кренделе рода g.

По теореме 2.1 многообразия $6^3_2(1+2q,q)$ и $6^3_2(1-2q,q)$ накрывают орбифолды $\mathscr{A}_1(1,1+4q)$ и $\mathscr{A}_1(1-4q,1)$ соответственно. Эти орбифолды допускают разбиение вдоль вложенной 2-сферы на два шаровых орбифолда (см. [25]). Прообраз такой 2-сферы дает разбиение Хегора рода три для соответствующего 3-многообразия такое, что накрывающая группа отображает каждый крендель хегорова разбиения на себя. Таким образом, многообразия $6^3_2(1\pm 2q,q)$ являются максимально симметричными $\mathbb{S}_4$-многообразиями рода три. Заметим, что и обычный род Хегора этих многообразий равен трем, если q отлично от ∓ 1.

С помощью SnapPea мы нашли, что наименьший объем среди гиперболических 3-многообразий типа $6^3_2(p,q)$ равен 2.468232 и достигается для $6^3_2(3,1)$. Это многообразие является максимально симметричным $\mathbb{S}_4$-многообразием рода Хегора три (как эквивариантного, так и обычного) и, видимо, наименьшим среди гиперболических 3-многообразий, допускающих действие $\mathbb{S}_4$ и, возможно, среди всех многообразий хегорова рода три. Отметим, что многообразие Викса — Матвеева — Фоменко $\mathscr{M}_1 = 6^3_2((-5,1),(-5,2),(-1,1))$ является максимально симметричным $\mathbb{D}_6$-многообразием и его род Хегора (как эквивариантный, так и обычный) равен двум (см. [2], а также следующий параграф). Здесь $\mathbb{D}_6$ обозначает группу диэдра порядка 12. Помимо многообразий хегорова рода два и три единственным максимально симметричным гиперболическим 3-многообразием, для которого эквивариантный и обычный род Хегора совпадают, является построенное в [26] многообразие рода 11 с $(\mathbb{A}_5 \times \mathbb{Z}_2)$-инвариантным сплетением Хегора рода 11.

§ 3. Зацепление 6^3_1, орбифолд $\mathscr{A}_2$ и многообразия Такахаши

Рассмотрим n-компонентные альтернированные зацепления L_n, определенные согласно рис. 3.1, где изображены зацепления для $n=3$ и $n=4$; в частности, $L_3 = 6^3_1$ и $L_4 = 8^4_1$.

Напомним, что согласно [8] группа $\pi_1(S^3 \setminus 6^3_1)$ соизмерима с $PGL(2,O_7)$, а группа $\pi_1(S^3 \setminus 8^4_1)$ — с $PGL(2,O_3)$.

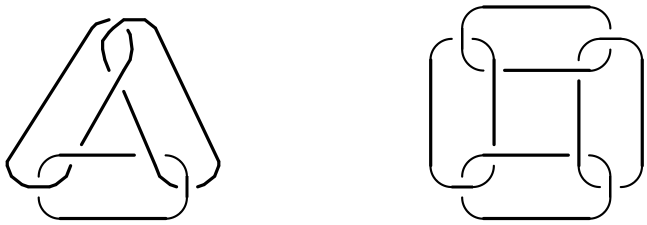

Рис. 3.1. Зацепления $L_3 = 6^3_1$ и $L_4 = 8^4_1$

Обозначим через $L_n(p,q) = L_n((p,q),\ldots,(p,q))$ коническое многообразие, полученное хирургией с параметрами (p,q) на каждой компоненте L_n, в частности, $6^3_1(p,q) = L_3(p,q)$ и $8^4_1(p,q) = L_4(p,q)$. Как показано в [5], при $n \geq 3$ многообразие $S^3 \setminus L_n$ является гиперболическим и, следовательно, почти все многообразия $L_n(p/q)$ также гиперболические.

Обозначим через $\mathscr{A}^n_2(p,q)$ трехмерный орбифолд с носителем S^3 и сингулярным множеством, совпадающим с пространственным графом, изображенным на рис. 3.2.

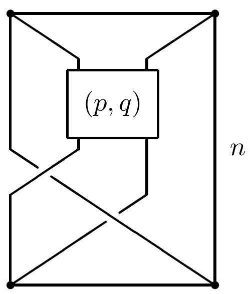

Рис. 3.2. Сингулярное множество $\mathscr{A}^n_2(p,q)$

Одно из его ребер имеет индекс сингулярности n, а все остальные — индексы сингулярности 2. При $n = 3$ имеем орбифолд $\mathscr{A}^3_2(p,q) = \mathscr{A}_2(p,q)$, получаемый хирургией на втором орбифолде Адамса.

Теорема 3.1. *Для любых рациональных p и q коническое многообразие $L_n(p,q)$, полученное (p,q)-хирургией на зацеплении L_n, является $4n$-листным накрытием орбифолда $\mathscr{A}^n_2(p,p+2q)$, полученного $(p,p+2q)$-хирургией на орбифолде $\mathscr{A}^n_2$.*

Доказательство. Согласно исчислению Кирби [9] многообразия $L_n(p/q)$ могут быть получены хирургией на $2n$-компонентных зацеплениях $\mathscr{L}_{2n}$, естественно обобщающих зацепление $\mathscr{L}_6$, изображенное на рис. 3.3. А именно, многообразие $L_n(p,q) = L_n((p,q),\ldots,(p,q))$ совпадает с многообразием $\mathscr{L}_{2n}((1,1),(p+2q,q),\ldots,(1,1),(p+2q,q))$. Многообразия, полученные хирургией на $\mathscr{L}_{2n}$, принято называть *многообразиями Такахаши*, поскольку копредставления для их фундаментальных групп были найдены Такахаши в [27].

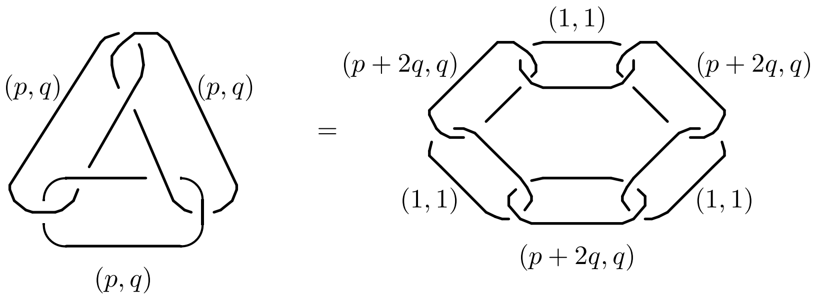

Рис. 3.3. Зацепления L_3 и $\mathscr{L}_6$

Зацепление $\mathscr{L}_{2n}$ обладает строго обратимой инволюцией τ, ось которой пересекает каждую из компонент в двух точках. Эта инволюция индуцирует инволюцию (обозначим ее также через τ) многообразия $L_n(p,q)$. Сингулярное множество фактор-орбифолда $\mathscr{O}(n,p,q) = L_n(p,q)/\langle\tau\rangle$ приведено на рис. 3.4, где для упрощения обозначений мы используем $\alpha = (p+2q,q)$ (см. [28, 29]).

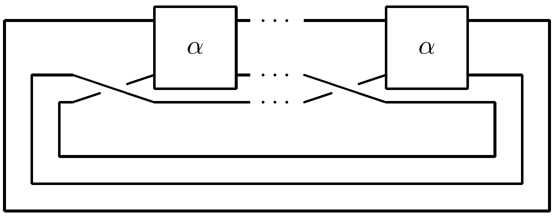

Рис. 3.4. Сингулярное множество $\mathscr{O}(n,p,q)$

В обозначениях из [28, 29] сингулярное множество орбифолда $\mathscr{O}(n,p,q)$ есть замыкание рациональной 3-струнной косы $(\sigma_1^{p/q+2}\sigma_2)^n$. Например, при $p/q = -3/2$ замыканием обобщенной косы $(\sigma_1^{1/2}\sigma_2)^3$ является узел 9_{49} (см. [30, с. 265]). Орбифолд $\mathscr{O}(n,p,q)$ (и его сингулярное множество) имеют очевидную циклическую симметрию ρ порядка n, переставляющую танглы. Сингулярное множество фактор-орбифолда $\mathscr{O}(n,p,q)/\langle\rho\rangle$ представлено на рис. 3.5.

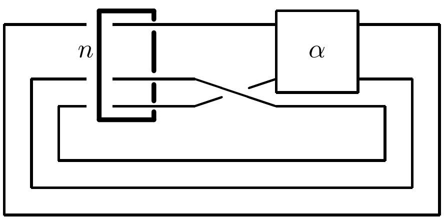

Рис. 3.5. Сингулярное множество $\mathscr{O}(n,p,q)/\langle\rho\rangle$

Очевидно, сингулярное множество, изображенное на рис. 3.5, эквивалентно множеству, представленному на рис. 3.6. Как видно из рис. 3.6, орбифолд $\mathscr{O}(n,p,q)/\langle\rho\rangle$ допускает инволюцию σ, ось которой изображена пунктирной линией. Сингулярное множество фактор-орбифолда $(\mathscr{O}(n,p,q)/\langle\rho\rangle)/\langle\sigma\rangle$ изображено на рис. 3.7. Используя операции вычисления с танглами, как на рис. 1.2, нетрудно видеть, что сингулярное множество эквивалентно сингулярному множеству орбифолда $\mathscr{A}_2^n(p,p+2q)$ (см. рис. 3.2). Это завершает доказательство теоремы 3.1. $\square$

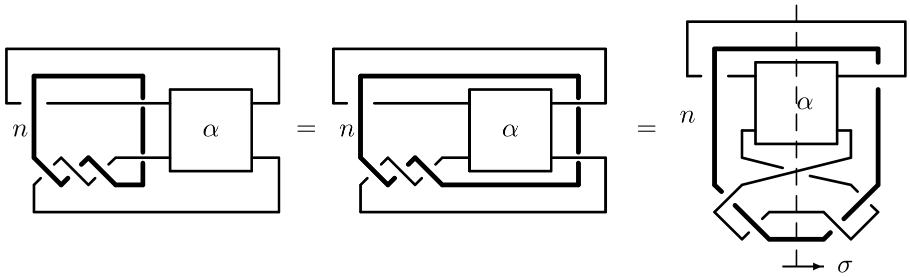

Рис. 3.6. Сингулярное множество $\mathscr{O}(n,p,q)/\langle\rho\rangle$

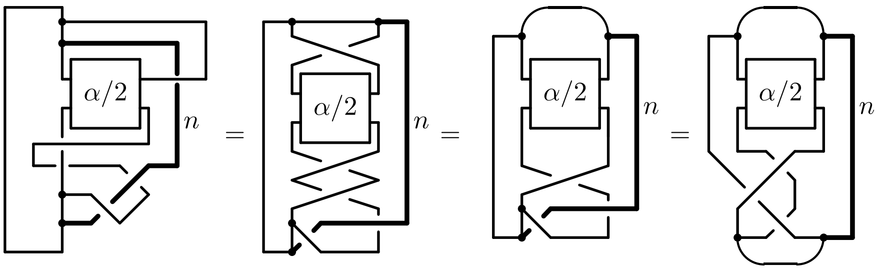

Рис. 3.7. Сингулярное множество $(\mathscr{O}(n,p,q)/\langle\rho\rangle/)\langle\sigma\rangle$

Теорема позволяет вычислять объемы орбифолдов $\mathscr{A}_2(x,y)$, используя хирургию на 6_1^3. Наименьший найденный в этом семействе объем равен 0.065965 и достигается для орбифолда $\mathscr{A}_2(3,2)$, накрываемого коническим многообразием $6_1^3(-3,1/2)$. По-видимому, он является четвертым наименьшим объемом гиперболического 3-орбифолда. Второй наименьший объем в этом семействе равен 0.078559 и достигается для орбифолда $\mathscr{A}_2(-3,1)$, накрываемого многообразием Викса — Матвеева — Фоменко $\mathscr{M}_1 = 6_1^3(-3,2)$.

Аналогично § 2 многообразия $6_1^3(p,(\pm 1-p)/2)$, где p нечетно, являются максимально симметричными $\mathbb{D}_6$-многообразиями хегорова рода два. В частности, многообразие $\mathscr{M}_1$ обладает этим свойством.

Отметим, что многообразия Фибоначчи $\mathbb{H}^3/F(2,2n)$, униформизируемые группами Фибоначчи $F(2,2n)$, могут быть представлены в виде $L_n(-3,1)$ и, следовательно, также будут накрытиями орбифолдов $\mathscr{A}_2^n(3,1)$.

§ 4. Зацепление 8_2^4 и орбифолд $\mathscr{A}_3$

Обозначим через $8_2^4(p,q)$ коническое многообразие, полученное (p,q)-хирургией на всех четырех компонентах зацепления 8_2^4 (см. рис. 4.1), а через $\mathscr{A}_3(p,q)$ — орбифолд, сингулярное множество которого представлено на рис. 4.1.

Согласно исчислению Кирби [9] коническое многообразие $8_2^4(p,q)$ может быть получено хирургией на зацеплении $\mathscr{L}_8$, принадлежащем семейству зацеплений, рассмотренном в предыдущем параграфе; в самом деле,

$8_2^4(p,q) = \mathscr{L}_8((p+2q,q),(1,1),(p+2q,q),(1,1),(p,q),(-1,1),(p,q),(1,1))$
является многообразием Такахаши.

Рис. 4.1. Зацепление 8^4_2 и орбифолд $\mathscr{A}_3(p, q)$

Используя строго обратимую инволюцию зацепления $\mathscr{L}_8$, рассмотренную в предыдущем параграфе, получим многообразие $8^4_2(p, q)$ как 2-листное разветвленное накрытие замыкания обобщенной трехструнной косы.

После трех последовательных шагов факторизации по действию инволюций приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Коническое многообразие* $8^4_2(p, q)$, *полученное* (p, q)-*хирургией на компонентах зацепления* 8^4_2, *является регулярным* 16-*листным накрытием орбифолда* $\mathscr{A}_3(p, 2q)$, *полученного* $(p, 2q)$-*хирургией на третьем орбифолде Адамса* $\mathscr{A}_3$.

Наименьший объем орбифолда типа $\mathscr{A}_3(x, y)$, который нам удалось найти с помощью SnapPea, равен 0.117838 и принадлежит орбифолду $\mathscr{A}_3(3, 2)$, накрываемому многообразием $8^4_2(3, 1)$. Отметим, что $\mathscr{A}_3(3, 2)$ является π-орбифолдом, т. е. все индексы сингулярности равны двум. Это наименьший известный нам π-орбифолд. Наименьшим известным π-орбифолдом, сингулярное множество которого — узел или зацепление, является π-орбифолд с сингулярным множеством 9_{49}, объем которого равен 0.471354. Его 2-листное разветвленное накрытие — многообразие Викса — Матвеева — Фоменко $\mathscr{M}_1$.

Заметим, что объем многообразия $\mathscr{M}_1$ ровно в восемь раз превосходит объем орбифолда $\mathscr{A}_3(3, 2)$. Однако орбифолд $\mathscr{A}_3(3, 2)$, сингулярным множеством которого является пространственный пенсне-граф, не имеет регулярного накрытия многообразием порядка не более восьми.

В заключение авторы выражают признательность Дж. Виксу за возможность использования созданной им компьютерной программы SnapPea, версии которой для различных операционных систем и подробная документация доступны в Интернете по адресу

http//www.northnet.org/weeks/index/SnapPea3Doc.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hodgson C. D., Weeks J. R.* Symmetries, isometries and length spectra of closed hyperbolic three-manifolds // Experimen. Math. 1994. V. 3, N 4. P. 261–274.
2. *Mednykh A., Vesnin A.* Covering properties of small volume hyperbolic 3-manifolds // J. Knot Theory Ramifications. 1998. V. 7, N 3. P. 381–392.
3. *Dunbar W., Meyerhoff R.* Volumes of hyperbolic 3-orbifolds // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. P. 611–637.
4. *Adams C. C.* Limit volumes of hyperbolic 3-orbifolds // J. Differential Geom. 1991. V. 34. P. 115–141.
5. *Thurston W. P.* The Geometry and Topology of 3-Manifolds. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978. (Lecture Notes).
6. *Neumann W.D., Reid A.W.* Notes on Adams' small volume orbifolds // Topology '90 (eds. B. Apanasov, W. D. Neumann, A. W. Reid, L. Siebenmann), Ohio State University Mathematical Research Institute Publications 1. Berlin: de Gruyter, 1992. P. 311–314.

7. *Brunner A., Frame M., Lee Y., Wielenberg N.* Classifying torsion-free subgroups of the Picard group // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282. P. 205–235.

8. *Hatcher A.* Hyperbolic structures of arithmetic type on some link complements // J. London Math. Soc. (2). 1983. V. 27. P. 345–355.

9. *Rolfsen D.* Knots and Links. Berkeley: Publ. or Perish Inc., 1976.

10. *Adams C., Hildebrand M., Weeks J.* Hyperbolic invariants of knots and links // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 326. P. 1–56.

11. *Frohman C., Fine B.* Some amalgam structures for Bianchi groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 102. P. 221–229.

12. *Hatcher A.* Bianchi orbifolds of small discriminant available from the author's homepage. 1990. (Preprint).

13. *Grunewald F., Hirsch U.* Link complements arising from arithmetic group actions // Internat. J. Math. 1995. V. 6. P. 337–370.

14. *Kerckhoff S. P.* Deformations of hyperbolic cone manifolds // Proc. 37th Taniguichi Sympos. on Topology and Teichmüller spaces, Finland, July 1995, ed. by S. Kojima et al. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1996. P. 101–114.

15. *Kojima S.* Hyperbolic 3-manifolds singular along knots // Chaos Solitons Fractals. 1998. V. 9, N 4–5. P. 765–777.

16. *Dunbar W.* Geometric orbifolds // Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid. 1988. V. 1, N 1. P. 67–99.

17. *Conway J. H.* An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties // Computational Problems in Abstract Algebra (ed. J. Leach). New York: Pergamon Press, 1969. P. 329–364.

18. *Boileau M., Zimmermann B.* The π-orbifold group of a link // Math. Z. 1989. Bd 200, N 2. S. 187–208.

19. *Zimmermann B.* On the Hantzsche — Wendt manifold // Monatsh. Math. 1990. V. 110. P. 321–327.

20. *Wolcott K.* The knotting of theta curves and other graphs in S^3 // Geometry and Topology (ed. McCrory and Shifrin). New York: Marcel Dekker, 1987. P. 325–346.

21. *Nakao M.* On the $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ branched coverings of spatial K_4-graphs // Knots 90 (editor A. Kawauchi). Berlin: de Gruyter, 1992. P. 103–116.

22. *Zimmermann B.* On hyperbolic knots with the same m-fold and n-fold cyclic branched coverings // Topology Appl. 1997. V. 79. P. 143–157.

23. *Веснин А., Медных А.* Трехмерных гиперболические многообразия малого объема с тремя гиперэллиптическими инволюциями // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 5. С. 1035–1051.

24. *Petrov V.* Dehn surgery on hyperbolic orbifolds. Preprint available from the author's homepage. Новосибирск, 1999.

25. *Zimmermann B.* Genus actions of finite groups on 3-manifolds // Michigan Math. J. 1996. V. 43. P. 593–610.

26. *Zimmermann B.* On a hyperbolic 3-manifold with some special properties // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1993. V. 113. P. 87–90.

27. *Takahashi M.* On the presentation of the fundamental group of 3-manifolds // Tsukuba J. Math. 1989. V. 13. P. 175–189.

28. *Веснин А., Ким А.* Дробные группы Фибоначчи и многообразия // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 765–775.

29. *Ruini B., Spaggiari F.* On the structure of Takahashi manifolds // Tsukuba J. Math. 1998. V. 22. P. 723–739.

30. *Burde G., Zieschang H.* Knots. Berlin; New York: De Gruyter, 1985. (Stud. Math.; 5).

Статья поступила 28 апреля 2000 г.

Веснин Андрей Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
vesnin@math.nsc.ru

Медных Александр Дмитриевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
mednykh@math.nsc.ru

Zimmermann Bruno
Dipartimento di Scienze Matematiche
Università degli Studi di Trieste, P.1e Europa, 1 — I–34100 Trieste (Italia)
zimmer@univ.trieste.it