Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.928.1

О ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. Лазакович, О. Л. Яблонский

Аннотация: Исследуется задача приближения решения стохастического уравнения в θ-интегралах, $0 \leq \theta \leq 1$, решением конечно-разностного уравнения с осреднением. Доказывается, что если сглаживание процесса броуновского движения задать в виде линейной комбинации сглаживаний Ито и Стратоновича, то решение стохастического уравнения может быть аппроксимировано решением конечно-разностного уравнения в $L^2(\Omega, A, P)$ по случайной и равномерно по неслучайной переменным. Найдены также оценки скорости сходимости. Библиогр. 7.

Введение

Вопросами аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений занимались многие авторы (см., например, [1–3]). Как правило, решения уравнений Ито аппроксимируются решениями конечно-разностных уравнений, а решения уравнений Стратоновича — решениями обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

В статье [5] показано, что как решения Ито, так и решения Стратоновича могут быть аппроксимированы решениями конечно-разностных уравнений с осреднением при соответствующих сглаживаниях процесса броуновского движения.

В настоящей работе исследуется аналогичная задача для стохастических уравнений в θ-интегралах, которые являются обобщением стохастических интегралов Ито и Стратоновича [6]. Доказывается, что если сглаживание процесса броуновского движения задать в виде линейной комбинации сглаживаний Ито и Стратоновича [5], то решение стохастических уравнений в θ-интегралах для $0 \leq \theta \leq 1/2$ может быть приближено в $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ по случайной и равномерно по неслучайной переменным решением конечно-разностного уравнения с осреднением. Исследован также случай $1/2 < \theta \leq 1$. Найдены оценки скорости сходимости.

Основные результаты

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ — полное вероятностное пространство, $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$, $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in T}$ — стандартный поток σ-алгебр, $\mathscr{F}_a \subset \mathscr{A}$. Всюду в дальнейшем $B(t)$ — одномерный стандартный процесс $\mathscr{F}_t$-броуновского движения [7, с. 48, 49].

Рассмотрим стохастическое уравнение в θ-интегралах

$$X(t) = x + (\theta) \int_0^t f(X(s))\, dB(s) + \int_0^t g(X(s))\, ds, \quad t \in T, \tag{1}$$

где $f \in C_B^2(\mathbb{R})$, $g \in C_B^1(\mathbb{R})$, $C_B^r(\mathbb{R})$ — множество действительных r раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, ограниченных вместе со своими производными до порядка r включительно, $(\theta)\int\limits_0^t$ — так называемый стохастический θ-интеграл, определение которого можно найти в [6, с. 192].

Существование и единственность решения уравнения (1) доказаны в [7, с. 233].

Решение данного уравнения будем аппроксимировать решением следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered} X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t))(B_{n\theta}(t+h_n) - B_{n\theta}(t)) + g_n(X_n(t))h_n, \\ X_n(t)|_{t\in[0,h_n)} = X_{n0}(t), \quad t \in T, \end{gathered} \tag{2}$$

где случайный процесс $X_{n0}(t)$, $t \in [0, h_n)$, является $\mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}$-измеримым и лежит в $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ для $t \in [0, h_n)$,

$$B_{n\theta}(t) = \big[\big((1 - \sqrt{|1-2\theta|})B_n^1(t) + \sqrt{|1-2\theta|}\big)B_n^2(t)\big)\big], \quad t \in T,\ \theta \in [0,1], \tag{3}$$

$f_n = f * \rho_n^1$, $g_n = g * \rho_n^1$, $B_n^1 = B * \rho_n^1$, $B_n^2 = B * \rho_n^2$, $\rho_n^1 = n\rho(ns)$, $\rho_n^2 = \phi(n)\rho(\phi(n)s)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая функция, $\phi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, а $\rho \in D(\mathbb{R})$, $\rho \geq 0$, $\operatorname{supp} \rho \subset [0,1]$ и $\int\limits_0^1 \rho(s)\,ds = 1$.

Теорема 1. *Пусть* $\theta \in [0, 1/2]$, $f \in C_B^2(\mathbb{R})$, $g \in C_B^1(\mathbb{R})$ *и* $\frac{1}{\phi(n)} < h_n < \frac{1}{n}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 &\leq C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X_{n0}(t) - x]^2 + \frac{C}{n^{4/5}} \\ &+ C(1-2\theta)\left[\frac{1}{\phi(n)h_n} + \frac{1}{n^{16/5}h_n}\right] + C\sqrt{1-2\theta}(1 - \sqrt{1-2\theta})\left[\frac{1}{n^{11/5}h_n^2} + nh_n\right] \\ &+ C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\left[\frac{1}{n^{1/5}} + n^2h_n^2\right], \end{aligned} \tag{4}$$

где $X_n(t)$ *и* $X(t)$ — *решения задачи Коши* (2) *и уравнения* (1) *соответственно.*

Здесь и всюду в дальнейшем C — абсолютная константа.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \to 0,$$

если $n, \phi(n) \to \infty$, $h_n \to 0$, *причем* $h_n = o(1/n)$, $1/\phi(n) = o(h_n)$, $1/n = o\big(h_n^{10/11}\big)$.

Задача приближения решений уравнения (1) решениями конечно-разностных уравнений с осреднениями в случае $1/2 < \theta \leq 1$ приводит к уравнениям с опережением

$$\begin{gathered} X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t+h_n))(B_{n\theta}(t+h_n) - B_{n\theta}(t)) + g_n(X_n(t))h_n, \\ X_n(t)|_{t\in[0,h_n)} = X_{n0}(t), \quad t \in T. \end{gathered} \tag{5}$$

Стандартными методами, используя принцип сжимающих отображений, несложно доказать существование решений задачи (5) для достаточно больших n. Единственности в общем случае не будет. Однако справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\theta \in [1/2, 1]$, $f \in C_B^2(\mathbb{R})$, $g \in C_B^1(\mathbb{R})$ *и* $\frac{1}{\phi(n)} < h_n < \frac{1}{n}$. *Тогда*

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X_{n0}(t) - x]^2 + \frac{C}{n^{4/5}}$$
$$+ C(2\theta - 1)\left[\frac{1}{\phi(n)h_n} + \frac{1}{n^{16/5}h_n}\right] + C\sqrt{2\theta - 1}(1 - \sqrt{2\theta - 1})\left[\frac{1}{n^{11/5}h_n^2} + nh_n\right]$$
$$+ C(1 - \sqrt{2\theta - 1})^2\left[\frac{1}{n^{1/5}} + n^2h_n^2\right],$$

где $X_n(t)$ *и* $X(t)$ *— решения задачи Коши* (5) *и уравнения* (1) *соответственно.*

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 2

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \to 0,$$

если $n, \phi(n) \to \infty$, $h_n \to 0$, *причем* $h_n = o(1/n)$, $1/\phi(n) = o(h_n)$, $1/n = o\big(h_n^{10/11}\big)$.

Вспомогательные утверждения

Пусть $B_{n\theta}$ из представления (3),

$$t = \tau_t' + k_t h_n = \tau_t + m_t\delta, \quad \delta_1 = \lambda h_n, \quad \lambda \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n} < \delta_1 < \frac{1}{n} + h_n, \tag{6}$$

где $\tau_t = \tau_t' + k_t' h_n$, $\tau_t \in [\delta, 2\delta)$, $\frac{1}{n} < \delta = lh_n$; $k_t', k_t, m_t, l \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. *Для достаточно больших* n, $\phi(n)$ *и* $1/\phi(n) < h < 1/n$, $\theta \in [0, 1/2]$ *справедливы следующие оценки:*

1) $E[B_{n\theta}(t + h) - B_{n\theta}(t)]^{2p} \le C((1 - 2\theta)^p h^p + (1 - \sqrt{1 - 2\theta})^{2p} n^p h^{2p})$;

2) $E[B_{n\theta}(t) - B(t)]^{2p} \le C((1 - 2\theta)^p/\phi^p(n) + (1 - \sqrt{1 - 2\theta})^{2p}/n^p)$, $p = \overline{1, 4}$.

Доказательство леммы проводится стандартными методами (см. [5]).

Здесь и всюду в дальнейшем t — произвольная, но фиксированная точка из отрезка T.

Лемма 2. *Пусть* $f \in C_B^2(\mathbb{R})$, $\theta \in [0, 1/2]$. *Тогда для любого* $t \in T$

$$E\Bigg(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}[f_n(X_n(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)) - f(X_n(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n))]$$
$$\times (B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n) - B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n))\Bigg)^2$$
$$\le C(1 - 2\theta)/(n^2h_n) + C(1 - \sqrt{1 - 2\theta})^2/n.$$

Доказательство. Используя вид f_n, неравенства Минковского, Гёльдера и лемму 1, получим

$$E\Bigg(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}[f_n(X_n(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)) - f(X_n(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n))]$$
$$\times (B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n) - B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n))\Bigg)^2$$

$$\le m_t l \sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(E[f_n(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))-f(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))]^4$$
$$\times E[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]^4)^{1/2}$$
$$\le Cm_t^2\frac{l^2}{n^2}((1-2\theta)h_n+(1-\sqrt{1-2\theta})^2nh_n^2)\le C(1-2\theta)/(n^2h_n)+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При выполнении условий предыдущей леммы для любого* $t\in T$ *и* δ_1 *из* (6) *справедливы неравенства*

$$E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1} f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))(B_{n\theta}(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+1)\delta))\right)^2$$
$$\le C(1-2\theta)/(\delta\phi(n))+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n),$$

$$E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1} f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))(B_{n\theta}(\tau_t+k\delta)-B(\tau_t+k\delta))\right)^2$$
$$\le C(1-2\theta)/(\delta\phi(n))+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Из независимости сомножителей под знаком суммы, леммы 1, ограниченности функции f и того, что случайный процесс $B_{n\theta}(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+1)\delta)$ не зависит от $\mathscr{F}_{\tau_t+(k+1)\delta}$ и является $\mathscr{F}_{\tau_t+(k+1)\delta+1/n}$-измеримым, следует, что

$$E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1} f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))(B_{n\theta}(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+1)\delta))\right)^2$$
$$=\sum_{k=0}^{m_t-1}E[f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))(B_{n\theta}(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+1)\delta))]^2$$
$$\le C((1-2\theta)/(\delta\phi(n))+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n).$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Лемма 4. *Пусть* $f\in C_B^2(\mathbb{R})$, $\theta\in[0,1/2]$, $1/\phi(n)<h_n<1/n$. *Тогда для любого* $t\in T$ *и* δ_1 *из* (6)

$$E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}[f(X_n(\tau_t+k\delta))-f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))]\right.$$
$$\left.\times(B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))\right)^2$$
$$\le C/(\delta n^2)+C(1-2\theta)/(\delta n^2h_n)+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n),$$

$$E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}f''(\theta_{n,k})[X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)-X_n(\tau_t+k\delta)]^2\right.$$

$$\times \left(B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n) - B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)\right)\Bigg)^2$$
$$\leq C(1-2\theta)\delta^4/h_n^3 + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\delta^4 n^2/h_n + C\delta^4/h_n,$$

где $\theta_{n,k}$ *лежит на отрезке, соединяющем* $X_n(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)$ *и* $X_n(\tau_t + k\delta)$.

Доказательство. Докажем первое неравенство. Используя вид X_n и то, что $f \in C_B^2(\mathbb{R})$, по неравенству Гёльдера получим

$$E\Bigg(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}[f(X_n(\tau_t + k\delta)) - f(X_n(\tau_t + k\delta - \delta_1))](B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n)$$
$$- B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n))\Bigg)^2 \leq Cm_t\sum_{k=0}^{m_t-1}(E[X_n(\tau_t + k\delta) - X_n(\tau_t + k\delta - \delta_1)]^4$$
$$\times E(B_{n\theta}(\tau_t + (k+1)\delta) - B_{n\theta}(\tau_t + k\delta))^4)^{1/2}$$
$$\leq C\delta m_t \sum_{k=0}^{m_t-1}\Bigg(E\Bigg[\sum_{j=1}^{\lambda}|B_{n\theta}(\tau_t + k\delta - \delta_1 + jh_n) - B_{n\theta}(\tau_t + k\delta - \delta_1 + (j-1)h_n)|$$
$$+ \sum_{j=1}^{\lambda} h_n\Bigg]^4\Bigg)^{1/2} \leq Cm_t\big((1-2\theta)\lambda^2 h_n + (1-\sqrt{1-2\theta})^2\lambda^2 n h_n^2 + \lambda^2 h_n^2\big)$$
$$\leq C((1-2\theta)/(\delta n^2 h_n) + (1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n) + 1/(\delta n^2)).$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Лемма 5. *Пусть* $f \in C_B^2(\mathbb{R})$, $g \in C_B^1(\mathbb{R})$, $\theta \in [0, 1/2]$ *и* $1/\phi(n) < h_n < 1/n$. *Тогда верны следующие неравенства:*

$$E\Bigg(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t + k\delta))\sum_{j=1}^{p-1}[f_n(X_n(\tau_t + k\delta + (j-1)h_n)) - f_n(X_n(\tau_t + k\delta))]$$
$$\times [B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + jh_n) - B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (j-1)h_n)][B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n)$$
$$- B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)]\Bigg)^2 \leq C(1-2\theta)\delta^4/h_n^3 + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\delta^4 n^3,$$

$$E\Bigg(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t + k\delta))(f_n - f)(X_n(\tau_t + k\delta))][B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n)$$
$$- B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)][B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n) - B_{n\theta}(\tau_t + k\delta)]\Bigg)^2$$
$$\leq C(1-2\theta)\delta/(n^2 h_n) + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\delta/n + C\delta/n,$$

$$E\Bigg(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t + k\delta))\sum_{j=1}^{p-1} g_n(X_n(\tau_t + k\delta + (j-1)h_n)h_n[B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n)$$
$$- B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)]\Bigg)^2 \leq C(1-2\theta)\delta^2/h_n + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\delta^2 n,$$

$$E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1} f'(X_n(\tau_t+k\delta))f(X_n(\tau_t+k\delta))[(B_{n\theta}(\tau_t+(k+1)\delta)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta))^2\right.$$

$$\left.-(B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^2]\right)^2 \le C(1-2\theta)/(\delta\phi(n))+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Используя вид X_n и неравенство Гёльдера, по лемме 1 получим

$$E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t+k\delta))\sum_{j=1}^{p-1}[f_n(X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))-f_n(X_n(\tau_t+k\delta))]\right.$$

$$\times[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)][B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)$$

$$\left.-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]\right)^2 \le Cm_t l\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} E\left(\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{s=1}^{j-1}[|B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+sh_n)\right.$$

$$-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(s-1)h_n)|+h_n][B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]$$

$$\left.\times[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]\right)^2$$

$$\le Cm_t l\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{s=1}^{j-1}(p-1)(j-1)((1-\sqrt{1-2\theta})^6 n^3 h_n^6+(1-2\theta)^3 h_n^3)$$

$$+Cm_t^2 l^6 h_n^2((1-\sqrt{1-2\theta})^4 n^2 h_n^4+(1-2\theta)^2 h_n^2) \le C(1-2\theta)\frac{\delta^4}{h_n^3}+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\delta^4 n^3.$$

Остальные неравенства доказываются аналогично.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любого* $t\in T$

$$E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1} f'(X_n(\tau_t+k\delta))f(X_n(\tau_t+k\delta))(B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^2\right.$$

$$\left.-\int_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds\right)^2 \le C/n^2+C(1-2\theta)/(n^2h_n)+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n$$

$$+C\delta+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2.$$

Доказательство. Пусть δ_1 из соотношения (6). Тогда очевидно следующее представление исходного выражения:

$$\sum_{k=0}^{m_t-1} f'(X_n(\tau_t+k\delta))f(X_n(\tau_t+k\delta))(B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^2$$

$$-\int_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds=\sum_{k=0}^{m_t-1}[f'(X_n(\tau_t+k\delta))f(X_n(\tau_t+k\delta))$$

$$-f'(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))](B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^2$$

$$+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f'(X(\tau_t+k\delta))f(X(\tau_t+k\delta))(B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^2\right.$$

$$\left.-\int_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds\right]+\sum_{k=0}^{m_t-1}[f'(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))$$

$$-f'(X(\tau_t+k\delta))f(X(\tau_t+k\delta))](B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^2=A_1(t)+A_2(t)+A_3(t). \tag{7}$$

Оценим $A_1(t)$ по норме $L^2(\Omega,\mathscr{A},P)$, используя методику доказательства первого неравенства леммы 4:

$$E(A_1(t))^2\le Cm_t\sum_{k=0}^{m_t-1}(E[X_n(\tau_t+k\delta)-X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1)]^4E[B(\tau_t+(k+1)\delta)$$
$$-B(\tau_t+k\delta)]^8)^{1/2}\le Cm_t^2\delta^2((1-\sqrt{1-2\theta})^2/n+(1-2\theta)/(n^2h_n)+1/n^2)$$
$$\le C/n^2+C(1-2\theta)/(n^2h_n)+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n. \tag{8}$$

Учитывая независимость множителей под знаком суммы в $A_3(t)$, имеем

$$E(A_3(t))^2\le m_t\sum_{k=0}^{m_t-1}E[f'(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))$$
$$-f'(X(\tau_t+k\delta))f(X(\tau_t+k\delta))]^2E(B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^4$$
$$\le C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}(E[X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1)-X_n(\tau_t+k\delta)]^2+E[X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta)]^2)$$
$$\le C/n^2+C(1-2\theta)/(n^2h_n)+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n$$
$$+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E[X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta)]^2. \tag{9}$$

Для $A_2(t)$, используя определение интеграла от случайного процесса, несложно получить

$$E(A_2(t))^2\le C\delta. \tag{10}$$

Из соотношений (7)–(10) вытекает утверждение леммы 6.

Лемма 7. *Пусть $f\in C_B^2(\mathbb{R})$, $\theta\in[0,1/2]$. Тогда для любого $t\in T$ вида (6) выполняется неравенство*

$$E\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(ff')(X_n(\tau_t+k\delta))(B(\tau_t+k\delta+ph_n)-B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))^2\right.$$
$$\left.-\int_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds\right]^2\le C/n^2+C(1-2\theta)/(n^2h_n)$$
$$+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n+C\delta+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2.$$

Доказательство. Пусть δ_1 из представления (6). Тогда запишем оцениваемое выражение следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t+k\delta))f(X_n(\tau_t+k\delta))(B(\tau_t+k\delta+ph_n) - B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))^2 - \int\limits_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds$$

$$= \sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}[(f'f)(X_n(\tau_t+k\delta)) - (f'f)(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))][B(\tau_t+k\delta+ph_n) - B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]^2 + \sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}[(f'f)(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1)) - (f'f)(X(\tau_t+k\delta))][B(\tau_t+k\delta+ph_n) - B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]^2 + \sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(f'f)(X(\tau_t+k\delta))[B(\tau_t+k\delta+ph_n) - B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]^2 - \int\limits_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds = I_1(t)+I_2(t)+I_3(t). \quad (11)$$

Оценим $I_1(t)$ по схеме оценивания $A_1(t)$ в лемме 6:

$$E(I_1(t))^2 \le Cm_t^2 l^2 h_n^2(1/n^2+(1-2\theta)/(n^2h_n)+(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n) \le C/n^2 + C(1-2\theta)/(n^2h_n) + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n. \quad (12)$$

Оценка $I_2(t)$ аналогична оценке $A_3(t)$ в лемме 6:

$$E(I_2(t))^2 \le C/n^2 + C(1-2\theta)/(n^2h_n) + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(n) + C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (13)$$

Рассмотрим $I_3(t)$, используя тождество

$$\sum_{p=1}^{l}(B(\tau_t+k\delta+ph_n)-B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))^2 = (B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^2$$
$$-2\sum_{p=1}^{l}(B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)-B(\tau_t+k\delta))(B(\tau_t+k\delta+ph_n)-B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)).$$

Применяя его, получим

$$E(I_3(t))^2 \le CE\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'f)(X(\tau_t+k\delta))(B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^2 - \int\limits_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds\right]^2 + CE\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'f)(X(\tau_t+k\delta))\right.$$

$$\times \sum_{p=1}^{l}(B(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n) - B(\tau_t + k\delta))(B(\tau_t + k\delta + ph_n)$$

$$- B(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n))\Bigg]^2 = CE(I_{31}(t))^2 + CE(I_{32}(t))^2. \quad (14)$$

Как и для $A_2(t)$ в лемме 6, для $I_{31}(t)$ верно неравенство

$$E(I_{31}(t))^2 \le C\delta. \quad (15)$$

Учитывая независимость множителей под знаком суммы в $I_{32}(t)$, имеем

$$E(I_{32}(t))^2 \le C \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{p=1}^{l} E[B(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n) - B(\tau_t + k\delta)]^2$$

$$\times E[B(\tau_t + k\delta + ph_n) - B(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)]^2 \le C\delta. \quad (16)$$

Из соотношений (11)–(16) вытекает результат леммы.

Лемма 8. *Пусть выполняются условия предыдущей леммы. Тогда*

$$E\Bigg(\sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t + k\delta))f(X_n(\tau_t + k\delta))[B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n)$$

$$- B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)]^2 - (1-2\theta) \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{p=1}^{l}(ff')(X_n(\tau_t + k\delta))$$

$$\times [B(\tau_t + k\delta + ph_n) - B(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)]^2\Bigg)^2 \le C(1-2\theta)/(\phi(n)h_n)$$

$$+ C\sqrt{1-2\theta}(1-\sqrt{1-2\theta})nh_n + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2 n^2 h_n^2,$$

$$E\Bigg(\sum_{k=0}^{m_t-1} f(X_n(\tau_t + k\delta - \delta_1))[B(\tau_t + (k+1)\delta) - B(\tau_t + k\delta]$$

$$- (I)\int_{\tau_t}^{t} f(X(s))\,dB(s)\Bigg)^2 \le C\delta + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n + C(1-2\theta)/(n^2 h_n)$$

$$+ C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t + k\delta) - X(\tau_t + k\delta))^2.$$

Доказательство. Учитывая, что $B_{n\theta}$ из представления (3), получим

$$\sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{p=1}^{l}(ff')(X_n(\tau_t + k\delta))[B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n) - B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)]^2$$

$$- (1-2\theta) \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{p=1}^{l}(ff')(X_n(\tau_t + k\delta))[B(\tau_t + k\delta + ph_n) - B(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)]^2$$

$$= (1-2\theta) \sum_{k=0}^{m_t-1} \sum_{p=1}^{l}(f'f)(X_n(\tau_t+k\delta))\big(\big[B_n^2(\tau_t+k\delta+ph_n) - B_n^2(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)\big]^2$$

$$
\begin{aligned}
&- [B(\tau_t + k\delta + ph_n) - B(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)]^2) + 2\sqrt{1-2\theta}(1-\sqrt{1-2\theta}) \\
&\times \sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(f'f)(X_n(\tau_t + k\delta))\big[B_n^2(\tau_t + k\delta + ph_n) - B_n^2(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)\big] \\
&\quad \times [B_n^1(\tau_t + k\delta + ph_n) - B_n^1(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)] + (1-\sqrt{1-2\theta})^2 \\
&\times \sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(f'f)(X_n(\tau_t + k\delta))\big[B_n^1(\tau_t + k\delta + ph_n) - B_n^1(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)\big]^2 \\
&\quad = (1-2\theta)J_1(t) + 2\sqrt{1-2\theta}(1-\sqrt{1-2\theta})J_2(t) + (1-\sqrt{1-2\theta})^2 J_3(t). \quad (17)
\end{aligned}
$$

Так как $f \in C_B^2(\mathbb{R})$ и справедливо второе неравенство леммы 1, имеем

$$E(J_1(t))^2 \le Cm_t^2 l^2 h_n/\phi(n) = C/(\phi(n)h_n). \tag{18}$$

Для $J_2(t)$, используя неравенство Гёльдера, по лемме 1 можно получить неравенство

$$E(J_2(t))^2 \le Cm_t^2 l^2 n h_n^3 = Cnh_n. \tag{19}$$

Выражение $J_3(t)$ оценим по лемме 1 следующим образом:

$$E(J_3(t))^2 \le Cm_t^2 l^2 n^2 h_n^4 = Cn^2 h_n^2. \tag{20}$$

Из соотношений (17)–(20) вытекает доказательство леммы.

Второе неравенство данной леммы доказывается аналогично. При этом используется методика оценивания выражения $A_3(t)$ из леммы 6.

Доказательство теоремы 1

Пусть $t \in T$ из представления (6). Решая задачу (2), получим

$$
\begin{aligned}
X_n(t) = X_{n0}(\tau_t') + \sum_{k=1}^{k_t} f_n(X_n(\tau_t' + (k-1)h_n))[B_{n\theta}(\tau_t' + kh_n) - B_{n\theta}(\tau_t' + (k-1)h_n)] \\
+ \sum_{k=1}^{k_t} g_n(X_n(\tau_t' + (k-1)h_n))h_n.
\end{aligned}
$$

Если $X(t)$ — решение уравнения (1), то

$$
\begin{aligned}
X_n(t) - X(t) = \Bigg[X_{n0}(\tau_t') - x + \sum_{k=1}^{k_t'} f_n(X_n(\tau_t' + (k-1)h_n))[B_{n\theta}(\tau_t' + kh_n) \\
- B_{n\theta}(\tau_t' + (k-1)h_n)] - (\theta)\int_0^{\tau_t} f(X(s))\,dB(s) + \sum_{k=1}^{k_t'} g_n(X_n(\tau_t' + (k-1)h_n))h_n \\
- \int_0^{\tau_t} g(X(s))\,ds \Bigg] + \Bigg[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f_n(X_n(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n))[B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + ph_n) \\
- B_{n\theta}(\tau_t + k\delta + (p-1)h_n)] - (\theta)\int_{\tau_t}^{t} f(X(s))\,dB(s)]
\end{aligned}
$$

$$+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} g_n(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))h_n-\int\limits_{\tau_t}^{t} g(X(s))\,ds\right]=H_0(t)+H_1(t)+H_3(t). \tag{21}$$

Рассмотрим $H_1(t)$. Представим это выражение следующим образом, используя связь между стохастическим θ-интегралом и интегралом Ито (см., например, [6, с. 215]):

$$H_1(t)=\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(f_n(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))-f(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)))$$

$$\times[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(f(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))\right.$$

$$-f(X_n(\tau_t+k\delta)))[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]$$

$$\left.-\theta\int\limits_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds\right]+\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(f(X_n(\tau_t+k\delta))-f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1)))$$

$$\times[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]$$

$$+\sum_{k=0}^{m_t-1} f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))[B_{n\theta}(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+1)\delta)]$$

$$-\sum_{k=0}^{m_t-1} f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta)-B(\tau_t+k\delta)]$$

$$+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f(X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))[B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta]-(I)\int\limits_{\tau_t}^{t} f(X(s))\,dB(s)\right]$$

$$=I_0(t)+I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)-I_4(t)+I_5(t), \tag{22}$$

где δ_1 взято из выражения (6).

По лемме 2 имеем

$$E(I_0(t))^2\le C(1-2\theta)/(n^2h_n)+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n. \tag{23}$$

Из леммы 3 вытекает

$$E(I_3(t))^2\le C(1-2\theta)/(\delta\phi(n))+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n), \tag{24}$$

$$E(I_4(t))^2\le C(1-2\theta)/(\delta\phi(n))+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n). \tag{25}$$

Применяя первое неравенство леммы 4, получаем

$$E(I_2(t))^2\le C(1-2\theta)/(\delta n^2h_n)+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n)+C/(\delta n^2). \tag{26}$$

Используя формулу Тейлора, представим $I_1(t)$ следующим образом:

$$I_1(t)=\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t+k\delta))[X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)-X_n(\tau_t+k\delta)]\right.$$

$$\left.\times[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]-\theta\int\limits_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f''(\theta_n(k))[X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)-X_{n\theta}(\tau_t+k\delta)]^2$$
$$\times[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]=I_{11}(t)+1/2I_{12}(t), \quad (27)$$

где $\theta_n(k)$ лежит на отрезке, соединяющем $X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)$ и $X_n(\tau_t+k\delta)$.

Для $I_{12}(t)$ по второму неравенству леммы 4 верна оценка

$$E(I_{12}(t))^2 \le C\delta^4/h_n + C(1-2\theta)\delta^4/h_n^3 + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\delta^4 n^2/h_n. \quad (28)$$

Рассмотрим $I_{11}(t)$. Представим это выражение в виде

$$I_{11}(t)=\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t+k\delta))\sum_{j=1}^{p-1}[f_n(X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))-f_n(X_n(\tau_t+k\delta)]$$
$$\times[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)][B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)$$
$$-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]+\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t+k\delta))(f_n-f)(X_n(\tau_t+k\delta))$$
$$\times[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta)][B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]$$
$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} f'(X_n(\tau_t+k\delta))\sum_{j=1}^{p-1} g_n(X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))h_n[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)$$
$$-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]+\Bigg[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(ff')(X_n(\tau_t+k\delta))[B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)$$
$$-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta)][B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)]$$
$$-\theta\int_{\tau_t}^{t} f(X(s))f'(X(s))\,ds\Bigg]=I_{11}^1(t)+I_{11}^2(t)+I_{11}^3(t)+I_{11}^4(t). \quad (29)$$

Исследуем $I_{11}^1(t)$. По лемме 5 получаем

$$E(I_{11}^1(t))^2 \le C(1-2\theta)\delta^4/h_n^3 + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\delta^4 n^3. \quad (30)$$

Из леммы 5 вытекают также следующие оценки для $I_{11}^2(t)$ и $I_{11}^3(t)$:

$$E(I_{11}^2(t))^2 \le C(1-2\theta)\delta/(n^2h_n) + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\delta/n, \quad (31)$$
$$E(I_{11}^3(t))^2 \le C(1-2\theta)\delta^2/h_n + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\delta^2 n. \quad (32)$$

Рассматривая $I_{11}^4(t)$, будем пользоваться следующим тождеством:

$$\sum_{p=1}^{l}(B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))^2=(B_{n\theta}(\tau_t+(k+1)\delta)$$
$$-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta))^2-2\sum_{p=1}^{l}(B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta))$$
$$\times(B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)). \quad (33)$$

Учитывая выражение (33), $I_{11}^4(t)$ запишем так:

$$I_{11}^4(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1} f'(X_n(\tau_t+k\delta))f(X_n(\tau_t+k\delta))(B_{n\theta}(\tau_t+(k+1)\delta)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta))^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(ff')(X_n(\tau_t+k\delta))(B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1} f'(X_n(\tau_t+k\delta))f(X_n(\tau_t+k\delta))[(B_{n\theta}(\tau_t+(k+1)\delta)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta))^2$$

$$-(B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta))^2]-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(ff')(X_n(\tau_t+k\delta))$$

$$\times[(B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_{n\theta}(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))^2-(1-2\theta)(B(\tau_t+k\delta+ph_n)$$

$$-B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))^2]+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}(ff')(X_n(\tau_t+k\delta))(B(\tau_t+(k+1)\delta)\right.$$

$$\left.-B(\tau_t+k\delta))^2-\int\limits_{\tau_t'}^{t} f'(X(s))f(X(s))\,ds\right]-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}(ff')(X_n(\tau_t+k\delta))\right.$$

$$\left.\times(B(\tau_t+k\delta+ph_n)-B(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))^2-\int\limits_{\tau_t'}^{t} f'(X(s))f(X(s))ds\right]$$

$$=1/2A_1(t)-1/2A_2(t)+1/2A_3(t)-(1/2-\theta)A_4(t). \quad (34)$$

По четвертому неравенству леммы 5 получаем

$$E(A_1(t))^2\le C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/(\delta n)+C(1-2\theta)/(\delta\phi(n)). \quad (35)$$

Для $A_3(t)$ из леммы 6 вытекает

$$E(A_3(t))^2\le C/n^2+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n+C(1-2\theta)/(n^2h_n)+C\delta$$
$$+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (36)$$

Оценим $A_4(t)$ с помощью леммы 7:

$$E(A_4(t))^2\le C/n^2+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n+C(1-2\theta)/(n^2h_n)+C\delta$$
$$+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (37)$$

Для $A_2(t)$ из первого неравенства леммы 8 имеем

$$E(A_2(t))^2\le C(1-\sqrt{1-2\theta})^2n^2h_n^2+C(1-2\theta)(1-\sqrt{1-2\theta})nh_n+C(1-2\theta)/(\phi(n)h_n). \quad (38)$$

Из неравенств (34)–(38) выводим оценку

$$E(I_{11}^4(t))^2\le C/n^2+C\delta+C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\big(1/(n\delta)+n^2h_n^2\big)$$
$$+C(1-2\theta)(1-\sqrt{1-2\theta})nh_n+C(1-2\theta)/(\phi(n)h_n)$$
$$+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (39)$$

Таким образом, для $I_{11}(t)$ из соотношений (29)–(32) и (39) получаем

$$E(I_{11}(t))^2 \le C/n^2 + C\delta + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\big(1/(n\delta) + \delta^4 n^3 + n^2 h_n^2\big)$$
$$+ C(1-2\theta)(1-\sqrt{1-2\theta})\big(nh_n + \delta^4 n/h_n^2\big) + C(1-2\theta)\big(1/(\phi(n)h_n) + \delta^4/h_n^3\big)$$
$$+ C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t+k\delta) - X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (40)$$

Из соотношений (27), (28) и (40) следует, что

$$E(I_1(t))^2 \le C/n^2 + C\delta + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\big(1/(n\delta) + \delta^4 n^3 + n^2 h_n^2\big)$$
$$+ C(1-2\theta)(1-\sqrt{1-2\theta})\big(nh_n + \delta^4 n/h_n^2\big) + C(1-2\theta)\big(1/(\phi(n)h_n) + \delta^4/h_n^3\big)$$
$$+ C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t+k\delta) - X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (41)$$

Воспользовавшись вторым неравенством леммы 8, имеем

$$E(I_5(t))^2 \le C\delta + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2/n + C(1-2\theta)/(n^2 h_n)$$
$$+ C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t+k\delta) - X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (42)$$

Из неравенств (22)–(26), (41) и (42) вытекает, что

$$E(H_1(t))^2 \le C/(\delta n^2) + C\delta + C(1-\sqrt{1-2\theta})^2\big(1/(n\delta) + \delta^4 n^3 + n^2 h_n^2\big)$$
$$+C(1-2\theta)(1-\sqrt{1-2\theta})\big(nh_n+\delta^4 n/h_n^2\big)+C(1-2\theta)\big(1/(\phi(n)h_n)+1/(n^2\delta h_n)+\delta^4/h_n^3\big)$$
$$+ C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t+k\delta) - X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (43)$$

Рассмотрим $H_2(t)$. Несложно видеть, что

$$H_2(t) = \sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(g(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)) - g(X_n(\tau_t+k\delta)))h_n$$
$$+ \sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(g_n(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)) - g(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)))h_n$$
$$+ \left(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} g(X_n(\tau_t+k\delta))\delta - \int_{\tau_t}^{t} g(X(s))\,ds\right) = J_0(t) + J_1(t) + J_2(t). \quad (44)$$

Как и при доказательстве леммы 2, для $J_1(t)$ получаем

$$E(J_1(t))^2 \le Cm_t^2 l^2 h_n^2/n^2 \le C/n^2. \quad (45)$$

Рассмотрим $J_0(t)$. Пользуясь представлением $X_n(t)$ и леммой 1, имеем

$$E(J_0(t))^2 \le Cm_t l h_n^2 \sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} E(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n) - X_n(\tau_t+k\delta))^2$$
$$\le Cl^2((1-\sqrt{1-2\theta})^2 n h_n^2 + (1-2\theta)h_n) + C\delta^2$$

$$\leq C(1-\sqrt{1-2\theta})^2 n\delta^2 + C(1-2\theta)\delta^2/h_n + C\delta^2. \quad (46)$$

Оценим $J_2(t)$. Для этого сначала распишем это выражение:

$$J_2(t) = \sum_{k=0}^{m_t-1} (g(X_n(\tau_t+k\delta)) - g(X(\tau_t+k\delta)))\delta$$
$$+ \left(\sum_{k=0}^{m_t-1} g(X(\tau_t+k\delta))\delta - \int_{\tau_t}^{t} g(X(s))\,ds \right) = J_{21}(t) + J_{22}(t). \quad (47)$$

Для $J_{21}(t)$ имеем следующую оценку, учитывая, что $g \in C_B^1(\mathbb{R})$:

$$E(J_{21}(t))^2 \leq C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t+k\delta) - X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (48)$$

Из определения интеграла от случайного процесса вытекает

$$E(J_{22}(t))^2 \leq C\delta. \quad (49)$$

Из неравенств (47)–(49) следует, что

$$E(J_2(t))^2 \leq C\delta + C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t+k\delta) - X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (50)$$

Таким образом, для $H_2(t)$ из (44)–(46), (50) получаем

$$E(H_2(t))^2 \leq C(1-\sqrt{1-2\theta})^2 n\delta^2 + C(1-2\theta)\delta^2/h_n$$
$$+ C\delta + C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t+k\delta) - X(\tau_t+k\delta))^2. \quad (51)$$

Рассмотрим $H_0(t)$. Несложно видеть, что

$$H_0(t) = [X_{n0}(\tau_t') - x] + \sum_{k=1}^{k_t'} f_n(X_n(\tau_t' + (k-1)h_n))(B_{n\theta}(\tau_t' + kh_n)$$
$$- B_{n\theta}(\tau_t' + (k-1)h_n)) - (\theta)\int_0^{\tau_t} f(X(s))\,dB(s)$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{k_t'-1} g_n(X_n(\tau_t' + (k-1)h_n))h_n - \int_0^{\tau_t} g(X(s))\,ds \right)$$
$$= [X_{n0}(\tau_t') - x] + K_1(t) + K_2(t) + K_3(t). \quad (52)$$

Исследуем $K_1(t)$. По лемме 1 получаем

$$E(K_1(t))^2 \leq C(1-\sqrt{1-2\theta})^2 n\delta^2 + C(1-2\theta)\delta^2/h_n. \quad (53)$$

Оценим $K_2(t)$, используя связь между θ-интегралом и интегралом Ито и неравенство Гёльдера:

$$E(K_2(t))^2 \leq CE\left((I)\int_0^{\tau_t} f(X(s))\,dB(s) \right)^2 + CE\left(\int_0^{\tau_t} (ff')(X(s))\,ds \right)^2$$

$$\leq C \int\limits_0^{\tau_t} E(f(X(s)))^2\,ds + C\tau_t \int\limits_0^{\tau_t} E(f(X(s))f'(X(s)))^2\,ds \leq C\delta. \quad (54)$$

Рассмотрим $K_3(t)$. Так как g и g_n ограничены, получим

$$E(K_3(t))^2 = E\left(\int\limits_0^{\tau_t} (\overline{g}_n(s) - g(X(s)))\,ds\right)^2 \leq C\delta^2, \quad (55)$$

где $\overline{g}_n(s) = g_n(X_n(\tau + kh_n))$ при $s \in [\tau_t + kh_n,\, \tau_t + (k+1)h_n)$, $k = \overline{0, k'_t - 1}$.

Из соотношений (52)–(55) следует, что

$$E(H_0(t))^2 \leq [X_{n0}(\tau'_t) - x]^2 + C\delta + C(1 - \sqrt{1-2\theta})^2 n\delta^2 + C(1-2\theta)\delta^2/h_n. \quad (56)$$

Из неравенств (21), (43), (51), (56) по неравенству Гронуолла получаем

$$\begin{aligned} E(X_n(t) - X(t))^2 \leq (1 + C\delta)^m \big([X_{n0}(\tau'_t) - x]^2 + C\delta + C/(\delta n^2) \\ + C(1 - \sqrt{1-2\theta})^2\big(1/(n\delta) + \delta^4 n^3 + n^2 h_n^2\big) \\ + C(1-2\theta)\big(1/(\phi(n)h_n) + 1/(n^2\delta h_n) + \delta^4/h_n^3\big)\big) \\ + C(1-2\theta)(1-\sqrt{1-2\theta})\big(nh_n + \delta^4 n/h_n^2\big). \quad (57) \end{aligned}$$

При $\delta = 1/n^q$, $q = 4/5$ приходим к выражению (4). Теорема 1 доказана. Теорема 2 доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wong E., Zakai M.* On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals // Ann. Math. Statist. 1965. V. 36, N 5. P. 1560–1564.
2. *Sussman H. J.* On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations // Ann. Probab. 1978. V. 6, N 1. P. 19–41.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1975. Т. 3.
4. *Мацкявичюс В.* Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений при равномерных возмущениях управляющих семимартингалов // Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1989. С. 143–147.
5. *Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Стемковская Т. В.* Ассоциированные решения уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, № 2. С. 272–293.
6. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990.
7. *Ватанабе С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 31 мая 1999 г.

г. Минск
Белорусский гос. университет, просп. Ф. Скорины, 4, 220050 Минск, Беларусь
`lnv@mmf.bsu.unibel.by`; `jablonski@mmf.bsu.unibel.by`