Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 512.54

О p–РАЗЛОЖИМЫХ ГРУППАХ

М. Х. Ирансо, Ф. Перес-Монасор, Х. Медина

Аннотация: Доказано существование p-разложимых инъекторов в каждой конечной группе. Дана характеристика p-разложимых инъекторов во всех конечных p-разложимых связанных группах. Кроме того, установлен критерий сопряженности для некоторых максимальных p-разложимых подгрупп p-разрешимой группы, аналогичный результату Форстера для некоторых максимальных квазинильпотентных подгрупп. Проанализировано, когда произведение двух p-разложимых подгрупп будет p-разложимо. Библиогр. 8.

Пусть p — простое число. Через $\mathfrak{F}$ будем обозначать класс всех p-разложимых групп, т. е. таких групп G, что $G = \mathbf{O}_p(G) \times \mathbf{O}_{p'}(G)$. Этот класс представляет собой насыщенную фиттингову формацию. Группа G называется $\mathfrak{F}$-*связанной группой*, когда $\mathbf{C}_G(G_{\mathfrak{F}}) \leq G_{\mathfrak{F}}$, где $G_{\mathfrak{F}} = O_p(G) \times O_{p'}(G)$. Класс $\mathfrak{F}$-связанных групп является фиттинговым классом, содержащим p-разрешимые группы [1]. Напомним, что подгруппа I группы G является $\mathfrak{F}$-инъектором G, если $I \cap N$ — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в N для каждой субнормальной подгруппы N в G. p'-Инъектор — инъектор относительно класса всех конечных p'-групп.

Предложение 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*
i) *G — $\mathfrak{F}$-связанная группа;*
ii) *$\mathbf{E}(G)$ является p'-группой, где $\mathbf{E}(G)$ — полупростой радикал G.*

Доказательство вытекает из [2, предложение 2].

Лемма 2. *Пусть $C_G(N) \leq N \lhd\lhd G$, и предположим, что для некоторого простого p выполняются соотношения $N = O_p(N) \times O_{p'}(N)$, $P = O_p(P) \leq C_G(O_{p'}(N))$, $Q = O_{p'}(Q) \leq C_G(O_p(N))$. Тогда $[P, Q] = 1$.*

Доказательство. Это утверждение содержится в п. 1.1 леммы из [3]. □

Теорема 3. *Пусть G — $\mathfrak{F}$-связанная группа. Множество подгрупп*

$$\mathscr{S}(G) = \{P \times I \mid P \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G))), I \text{ — } p'\text{-инъектор в } \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G))\}$$

группы G является множеством $\mathfrak{F}$-инъекторов G.

Доказательство проведем индукцией по $|G|$. Сначала покажем, что каждый элемент в $\mathscr{S}(G)$ представляет собой $\mathfrak{F}$-инъектор G.

Пусть $P \times I \in \mathscr{S}(G)$. Если $P \times I \leq L = L_p \times L_{p'} \leq G$, то из соотношения $\mathbf{O}_{p'}(G) \leq I \leq L_{p'}$ вытекает, что $L_p \leq \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G))$, и, поскольку $P \leq L_p$, имеем $P = L_p$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что $I = L_{p'}$, так что $P \times I$ — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G.

Работа выполнена при финансовой поддержке DGICYT, MEC of Spain (proyecto PB–97–0674–C02–02).

Пусть M — максимальная нормальная подгруппа G. Докажем, что $(P \times I) \cap M \in \mathscr{S}(M)$.

Если $G_{\mathfrak{F}} \leq M$, то $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(G))$=$\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(M))$ и $P \cap M \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(M)))$. С другой стороны, $I \cap M$ является p'-инъектором $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G))$ и $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G)) = \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(M))$. Так как $(P \cap M) \times (I \cap M)$ — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в M и $(P \cap M) \times (I \cap M) \leq (P \times I) \cap M$, заключаем, что $(P \cap M) \times (I \cap M) = (P \times I) \cap M$.

Если $G_{\mathfrak{F}} \not\leq M$, имеем два случая:

(a) $G = M\mathbf{O}_{p'}(G)$ с $\mathbf{O}_p(G) \leq M$;

(b) $G = M\mathbf{O}_p(G)$ с $\mathbf{O}_{p'}(G) \leq M$.

В случае (a)

$$P = P \cap M \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(G))), \quad \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(G)) \leq \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(M))$$

и $I \cap M$ — p'-инъектор $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G)) = \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(M))$.

Пусть $\widetilde{P} \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(M)))$ с $P \leq \widetilde{P}$. Тогда

$$[\mathbf{O}_{p'}(G), \widetilde{P}] \leq [\mathbf{O}_{p'}(G), \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(M))] \leq \mathbf{C}_{\mathbf{O}_{p'}(M)}(\mathbf{O}_{p'}(M)) = \mathbf{Z}(\mathbf{O}_{p'}(M)),$$

так что $[\mathbf{O}_{p'}(G), \widetilde{P}] = [\mathbf{O}_{p'}(G), \widetilde{P}, \widetilde{P}] = 1$ и тем самым $P \leq \widetilde{P} \leq \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(G))$, откуда $P = \widetilde{P} \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(M)))$.

В случае (b)

$$P \cap M \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(G))), \quad \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(G)) = \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_{p'}(M))$$

и $I = I \cap M$ — p'-инъектор $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G))$. Докажем, что I — p'-инъектор $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(M))$.

Пусть J — p'-подгруппа в $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(M))$. Тогда

$$[J, \mathbf{O}_p(G)] \leq [\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(M)), \mathbf{O}_p(G)] \leq \mathbf{C}_{\mathbf{O}_p(M)}(\mathbf{O}_p(M)) = \mathbf{Z}(\mathbf{O}_p(M)),$$

откуда $[\mathbf{O}_p(G), J] = [\mathbf{O}_p(G), J, J] = 1$ и $J \leq \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G))$. Поэтому I — p'-максимальная подгруппа в $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(M))$.

Пусть N — субнормальная подгруппа в $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(M))$. Тогда $N \cap \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G))$ — субнормальная подгруппа в $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G))$, и поскольку I — p'-инъектор $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G))$, то

$$I \cap N \cap \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G)) = I \cap N$$

— p'-максимальная подгруппа в $N \cap \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G))$. Допустим, что $I \cap N \leq K \leq N$, где K — p'-подгруппа. Согласно предыдущему замечанию имеем $K \leq \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G))$, так что $I \cap N \leq K \leq N \cap \mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(G))$ и $I \cap N = K$. Таким образом, $I = I \cap M$ — p'-инъектор $\mathbf{C}_M(\mathbf{O}_p(M))$.

В обоих случаях мы получили, что $(P \times I) \cap M \in \mathscr{S}(M)$.

По индуктивному предположению заключаем, что $(P \times I) \cap M$ — $\mathfrak{F}$-инъектор M. Поэтому $(P \times I)$ — $\mathfrak{F}$-инъектор G.

Обратно, пусть $J = J_p \times J_{p'}$ — $\mathfrak{F}$-инъектор G. Очевидно, что

$$J_p \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G))),$$

значит, достаточно показать, что $J_{p'}$ — p'-инъектор $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G))$. Пусть N — субнормальная подгруппа в $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G))$. Допустим, что $J_{p'} \cap N \leq L \leq N$, где L — p'-подгруппа. Из леммы 2 следует, что $[L, J_p \cap N] = 1$, тем самым

$$J \cap N = (J_p \cap N) \times (J_{p'} \cap N) \leq (J_p \cap N) \times L \leq N$$

и ввиду максимальности $J \cap N$ заключаем, что $J_{p'} \cap N = L$. $\square$

Следствие 4. *В каждой конечной группе есть $\mathfrak{F}$-инъекторы.*

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему и теорему из [4]. □

Теорема 5. *Пусть G — группа, обладающая единственным классом сопряженности $\mathfrak{F}$-инъекторов. Тогда G — $\mathfrak{F}$-связанная группа.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(\mathbf{E}(G))$ и $P \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{E}(G))$. Если X — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в $\mathbf{E}(G)$, содержащая P, то X — $\mathfrak{F}$-инъектор $\mathbf{E}(G)$. Кроме того, если J — $\mathfrak{F}$-инъектор $\mathbf{N}_G(X)$, по теореме из [5] вытекает, что J — $\mathfrak{F}$-инъектор G, откуда $P \leq X \leq J$.

Пусть $q \in \pi(\mathbf{E}(G))$, $q \neq p$ и Q — q-силовская подгруппа в $\mathbf{E}(G)$. Те же рассуждения показывают, что существует $\mathfrak{F}$-инъектор $\tilde{J}$ в G такой, что $Q \leq \tilde{J}$. Тогда по предположению существует $g \in G$ такой, что $\tilde{J} = J^g$. Таким образом, $\mathbf{E}(G)$ содержится в каждом $\mathfrak{F}$-инъекторе G, откуда вытекает, что $\mathbf{E}(G)$ p-разложимая. Поэтому $\mathbf{E}(G)$ — p'-группа и тем самым G — $\mathfrak{F}$-связанная группа. □

Следующий пример показывает, что обратное к утверждению предыдущей теоремы неверно.

Пример. Пусть $G = [\mathbf{C}_5 \times \mathbf{C}_5]\mathbf{SL}(2,5)$. Тогда $\mathbf{E}(G) = 1$. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс 2-разложимых групп. Тогда G — $\mathfrak{F}$-связанная группа. Однако существуют два несопряженных $\mathfrak{F}$-инъектора G.

Из теоремы 3 вытекает описание множества $\mathfrak{F}$-инъекторов G:

$$\{P \times I \mid P \in \mathbf{Syl}_2(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{2'}(G))),\ I \text{ — } 2'\text{-инъектор } \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_2(G))\}.$$

Однако $\mathbf{O}_{2'}(G) = \mathbf{C}_5 \times \mathbf{C}_5$ и $\mathbf{O}_2(G) = 1$, так что это множество совпадает с $\mathbf{Inj}_{\{3,5\}}(G)$, представляющим собой объединение $\mathbf{Syl}_5(G)$ и $\{(\mathbf{C}_5 \times \mathbf{C}_5)S_3 | S_3 \in \mathbf{Syl}_3(\mathbf{SL}(2,5))\}$, которое, очевидно, не является классом сопряженности.

Предложение 6. *Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-инъектора G сопряжены. Кроме того, $\mathfrak{F}$-инъекторы G совпадают с $\mathfrak{F}$-максимальными подгруппами G, содержащими $G_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Заметим, что G — $\mathfrak{F}$-связанная группа.

Известно, что $\mathfrak{F}$-инъекторы G суть $\{P \times Q \mid P \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G))),\ Q$ — p'-инъектор $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G))\}$. Поскольку G — p-разрешимая группа, p'-инъекторы $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G))$ являются ее p'-холловскими подгруппами, сопряженными в $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G))$.

Мы утверждаем, что $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G)) \leq \mathbf{N}_G(Q)$ и $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G)) \leq \mathbf{N}_G(P)$.

Так как

$$[\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G)), Q] \leq [\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G)), \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G))] \leq \mathbf{C}_G(G_{\mathfrak{F}}) \leq G_{\mathfrak{F}},$$

имеем

$$[\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G)), QG_{\mathfrak{F}}] = [\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G)), Q][\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G)), G_{\mathfrak{F}}] \leq G_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}}Q,$$

поэтому $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G)) \leq \mathbf{N}_G(G_{\mathfrak{F}}Q)$. Поскольку $G_{\mathfrak{F}}Q = \mathbf{O}_p(G) \times Q$, то Q — характеристическая подгруппа $G_{\mathfrak{F}}Q$ и $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G)) \leq \mathbf{N}_G(Q)$.

Аналогично получаем, что $\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G)) \leq \mathbf{N}_G(P)$.

Допустим, что $P \times Q, \widetilde{P} \times \widetilde{Q} \in \mathbf{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$. Тогда существуют $a \in \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G))$ и $b \in \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G))$ такие, что $P^a = \widetilde{P}$ и $Q^b = \widetilde{Q}$. Поэтому $(P \times Q)^{ab} = P^{ab} \times Q^{ab} = \widetilde{P}^b \times Q^b = \widetilde{P} \times \widetilde{Q}$.

Продолжим доказательство последнего утверждения. Пусть $T = T_p \times T_{p'}$ — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G, содержащая $G_{\mathfrak{F}}$. Тогда $T_p \le \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G))$ и $T_{p'} \le \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G))$. Значит, существуют

$$P \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G))), \quad Q \in \mathbf{Hall}_{p'}(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G)))$$

такие, что $T \le P \times Q$, тем самым из $\mathfrak{F}$-максимальности T вытекает, что $T = P \times Q$. $\square$

Получим другую характеристику $\mathfrak{F}$-инъекторов разрешимых групп. Нам понадобится следующая основная

Лемма 7. *Предположим, что A действует взаимно просто на G и $[H, A] = 1$, где H — самоцентрализуемая субнормальная подгруппа в G. Тогда $[G, A] = 1$.*

Доказательство проведем индукцией по $|G : H|$. Так как H — самоцентрализуемая нормальная подгруппа $\mathbf{N}_G(H)$, то $[N_G(H), A] = 1$. Можно считать, что $N_G(H) \neq G$. Пусть $\widetilde{H}$ — субнормальная подгруппа G такая, что $H \lhd \widetilde{H}$, $H \neq \widetilde{H}$. Тогда $[\widetilde{H}, A] \le [N_G(H), A] = 1$ и по индуктивному предположению $[G, A] = 1$. $\square$

Предложение 8. *Пусть G — разрешимая группа и X — подгруппа G. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(i) *X — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G, содержащая $\mathbf{F}(G)$;*

(ii) *X — $\mathfrak{F}$-инъектор G;*

(iii) *X — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G, содержащая элемент из $\mathscr{A}(2, G)$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Докажем сначала, что

$$\mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(\mathbf{F}(G)))) = \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G))).$$

Если $P \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(\mathbf{F}(G))))$, то

$$[\mathbf{O}_{p'}(G), P] = [\mathbf{O}_{p'}(G), P, P] \le [\mathbf{O}_{p'}(\mathbf{F}(G)), P] = 1,$$

так что $P \le \mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G))$ и $P \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(G)))$. Поэтому, используя теорему 3, получим [5]

$$\mathbf{Inj}_{\mathfrak{F}}(G) = \{P \times Q \mid P \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_{p'}(\mathbf{F}(G)))), Q \in \mathbf{Hall}_{p'}(\mathbf{C}_G(\mathbf{O}_p(G)))\}.$$

Пусть X — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G, содержащая $\mathbf{F}(G)$. Тогда существует $P \times Q \in \mathbf{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ такое, что $X \le P \times Q$, и из максимальности X вытекает, что $X = P \times Q$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $A \in \mathscr{A}(2, G)$. По теореме B из [6] мы знаем, что $A\mathbf{F}(G)$ нильпотентна. Пусть Y — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G, содержащая $A\mathbf{F}(G)$. ввиду (i) $\Rightarrow$ (ii) Y является $\mathfrak{F}$-инъектором G, так что по предложению 6 существует $g \in G$ такой, что $X = Y^g$. Отсюда $A^g \le Y^g = X$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть X — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G, содержащая A, $A \in \mathscr{A}(2, G)$. Поскольку $A\mathbf{F}(G)$ — нильпотентная подгруппа G, то $[A_{p'}, \mathbf{O}_p(G)] = 1$. Кроме того, $C_G(A) \le A$, так что $C_B(A_p) \le A_p$, где $B = A_p\mathbf{O}_p(G)$. Рассмотрим действие $X_{p'}$ на B. Так как $[X_{p'}, A_p] = 1$, из леммы 7 вытекает, что $[X_{p'}, B] = 1$. Отсюда $X\mathbf{O}_p(G)$ — $\mathfrak{F}$-подгруппа G. Ввиду максимальности X имеем $\mathbf{O}_p(G) \le X$.

Рассмотрим X_p, действующее на $D = A_{p'}\mathbf{O}_{p'}(\mathbf{F}(G))$. Аналогично предыдущему можно показать, что $[X_p, D] = 1$. Тогда $X\mathbf{O}_{p'}(\mathbf{F}(G))$ — $\mathfrak{F}$-подгруппа G, тем самым $\mathbf{O}_{p'}(\mathbf{F}(G)) \le X$. $\square$

Заметим, что если G — разрешимая группа, то каждый нильпотентный инъектор G совпадает с пересечением некоторого семейства p-разложимых инъекторов G, где p пробегает множество простых делителей $|G|$.

Проанализируем свойства $\mathfrak{F}$-максимальных подгрупп, похожие на аналогичные свойства максимальных нильпотентных подгрупп.

Предложение 9. *Пусть* $\mathbf{C}_G(B) \leq B \lhd\lhd G$. *Тогда*

(i) *если* X — $\mathfrak{F}$*-максимальная подгруппа* G *такая, что* $B \leq X$, *то* $G_{\mathfrak{F}} \leq X$;

(ii) *если, кроме того,* G — p*-разрешимая группа и* $B \leq X \cap Y$, *где* X, Y *суть* $\mathfrak{F}$*-максимальные подгруппы* G, *то* X, Y *сопряжены.*

Доказательство. Утверждение (i) вытекает из [3, предложение 1.2].

Докажем (ii). Ввиду (i) имеем $G_{\mathfrak{F}} \leq X \cap Y$, откуда по предложению 6 X и Y сопряжены в G. □

Уточним утверждение (ii) предложения 9. Предварительно установим следующий результат.

Лемма 10. *Пусть* G — *группа,* $\mathbf{C}_G(B) \leq B \lhd\lhd X = X_p \times X_{p'} \leq G$. *Пусть* L — p*-группа такая, что* $X_p \leq L$ *и* $[L, B_{p'}] = 1$. *Тогда* $[L, X_{p'}] = 1$.

Доказательство. Предположим сначала, что $L \leq \mathbf{N}_G(X_p)$.

Так как $B_{p'} \lhd\lhd X_{p'}$, существует последовательность $B_{p'} = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_r = X_{p'}$. Поскольку $\mathbf{C}_G(B) \leq B \leq X_p \times H_0$, имеем

$$[L, H_1] \leq [\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X_p \times H_0)}(H_0), \mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X_p \times H_0)}(X_p)] \leq \mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X_p \times H_0)}(X_p \times H_0) \leq X_p \times H_0.$$

Таким образом,

$$[L, H_1(X_p \times H_0)] = [L, H_1][L, X_p \times H_0] \leq X_p \times H_0 \leq H_1(X_p \times H_0),$$

и так как $H_1(X_p \times H_0) = X_p \times H_1$ и H_1 — характеристическая подгруппа $(X_p \times H_1)$, то $L \leq \mathbf{N}_G(H_1)$. Кроме того, $[L, H_1] \leq H_1 \cap (H_0 \times X_p)$, откуда $[L, H_1] \leq H_0$ и тем самым $[H_1, L, L] = [H_1, L] = 1$, ибо L действует взаимно просто на H_1.

Аналогично можно доказать, что если $[L, H_{k-1}] = 1$ для $k \in \{1, \ldots, r\}$, то $[L, H_k] = 1$.

Итак, $[L, X_{p'}] = 1$.

Обсудив предварительный шаг, мы можем перейти к общему случаю. Поскольку $X_p \lhd\lhd L$, существует последовательность $X_p = L_0 \lhd L_1 \lhd \ldots \lhd L_n = L$.

Так как B — субнормальная подгруппа $L_0 \times X_{p'}$ с $\mathbf{C}_G(B) \leq B$, $X_p \leq L_1 \leq \mathbf{N}_G(X_p)$ и $[L_1, B_{p'}] = 1$, мы можем применить предыдущее утверждение для получения равенства $[L_1, X_{p'}] = 1$.

Аналогично можно показать, что если $[L_{k-1}, X_{p'}] = 1$ для $k \in \{1, \ldots, n\}$, то $[L_k X_{p'}] = 1$. □

Используя предыдущую лемму, можно получить простое доказательство предложения 2 из [7] о максимальных нильпотентных подгруппах.

Следствие 11. *Пусть* $\mathbf{C}_G(B) \leq B \lhd\lhd X_p \times X_{p'} = X \leq G$, *где* X — $\mathfrak{F}$*-максимальная подгруппа* G. *Тогда* $X_p \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(B_{p'}))$.

Доказательство. Очевидно, $X_p \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(X_{p'}))$. Если

$$X_p \leq L \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(B_{p'})),$$

то по предыдущей лемме имеем $L \leq \mathbf{C}_G(X_{p'})$, так что $X_p = L$. □

Теорема 12. *Пусть X и Y — $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы p-разрешимой группы G такие, что при некотором B имеем $\mathbf{C}_G(B) \leq B \lhd\lhd Z$ для $Z = X$ и $Z = Y$. Тогда X и Y сопряжены в G.*

Доказательство. По следствию 11 имеем $X_p, Y_p \in \mathbf{Syl}_p(\mathbf{C}_G(B_{p'}))$, поэтому существует $g \in \mathbf{C}_G(B_{p'})$ такой, что $X_p^g = Y_p$. Таким образом, $X^g = (X_p \times X_{p'})^g = Y_p \times X_{p'}{}^g$. Поскольку X^g и Y суть $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы G, то $X_{p'}^g$ и $Y_{p'}$ будут p'-холловскими подгруппами $\mathbf{C}_G(Y_p)$. Поэтому существует $h \in \mathbf{C}_G(Y_p)$ такой, что $(X_{p'}^g)^h = Y_{p'}$. Итак, $X^{gh} = (X^g)^h = (Y_p \times X_{p'}^g)^h = Y_p^h \times (X_{p'}^g)^h = Y_p \times Y_{p'} = Y$. $\square$

При изучении p-разложимых групп интересно также узнать, когда произведение двух p-разложимых групп будет p-разложимой группой.

Предложение 13. *Пусть N и X — p-разложимые подгруппы G, $N \lhd G$. Если $\mathbf{C}_N(N \cap X) \leq N \cap X \lhd\lhd N$, то NX — p-разложимая группа.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $[N_p, X_{p'}] = 1$ и $[N_{p'}, X_p] = 1$.

Заметим, что $X_{p'}$действует взаимно просто на N_p и централизует $N_p \cap X_p \lhd \lhd N_p$. Кроме того,

$$\mathbf{C}_{N_p}(N_p \cap X_p) \leq \mathbf{C}_N(N \cap X) \leq N \cap X,$$

значит, $\mathbf{C}_{N_p}(N_p \cap X_p) \leq N_p \cap X_p$. Тогда из леммы 7 вытекает, что $[N_p, X_{p'}] = 1$.

Аналогично можно доказать, что $[N_{p'}, X_p] = 1$. $\square$

Следствие 14. *Пусть $H \leq \mathbf{F}(G)$ и I — p-разложимая подгруппа $\mathbf{N}_G(H)$, содержащая $\mathbf{F}(\mathbf{N}_G(H))$. Тогда $I\mathbf{F}(G)$ p-разложима.*

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{N}_G(H) \cap \mathbf{F}(G) \leq \mathbf{F}(\mathbf{N}_G(H)) \leq I \leq \mathbf{N}_G(H),$$

то $\mathbf{N}_G(H) \cap \mathbf{F}(G) = I \cap \mathbf{F}(G)$. Тогда

$$\mathbf{C}_{\mathbf{F}(G)}(I \cap \mathbf{F}(G)) = \mathbf{C}_{\mathbf{F}(G)}(\mathbf{N}_G(H) \cap \mathbf{F}(G)) \leq \mathbf{C}_{\mathbf{F}(G)}(H) \leq \mathbf{N}_{\mathbf{F}(G)}(H) \leq I.$$

Применяя предыдущее предложение, можно заключить, что $I\mathbf{F}(G)$ p-разложима. $\square$

Следствие 15. *Пусть G — разрешимая группа и I — $\mathfrak{F}$-инъектор $\mathbf{N}_G(H)$, где $H \leq \mathbf{F}(G)$. Тогда существует $K \in \mathbf{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ такой, что $K \cap \mathbf{N}_G(H) = I$.*

Доказательство. Согласно следствию 14 $I\mathbf{F}(G)$ p-разложима. Пусть J — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G, содержащая $I\mathbf{F}(G)$. Из предложения 8 вытекает, что J — $\mathfrak{F}$-инъектор G. Тогда $I \leq J \cap \mathbf{N}_G(H)$ и ввиду $\mathfrak{F}$-максимальности I в $\mathbf{N}_G(H)$ заключаем, что $I = J \cap \mathbf{N}_G(H)$. $\square$

Лемма 16. *Предположим, что $N \lhd G$ p-разложима и $N\mathbf{C}_G(N) \leq H \leq G$. Если $H_{\mathfrak{F}} \leq I \leq H$ и I p-разложима, то $IG_{\mathfrak{F}}$ p-разложима.*

Доказательство проведем индукцией по $|G|$. Пусть $R = IG_{\mathfrak{F}}$. Если $R < G$ при $R \cap H = IG_{\mathfrak{F}} \cap H = I(G_{\mathfrak{F}} \cap H) = I$ и $N\mathbf{C}_R(N) \leq R \cap H$, то из индуктивного предположения вытекает, что $IR_{\mathfrak{F}}$ p-разложима. Поскольку $G_{\mathfrak{F}} \leq R_{\mathfrak{F}}$, заключаем, что $IG_{\mathfrak{F}}$ p-разложима. Тем самым мы можем считать, что $G = IG_{\mathfrak{F}}$, и тогда $I = H$ и $N\mathbf{C}_G(N) \leq I$. Пусть J — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G такая, что $I \leq J$. Так как J содержит самоцентрализуемую нормальную подгруппу G, из предложения 9 вытекает, что $G_{\mathfrak{F}} \leq J$, так что $IG_{\mathfrak{F}} \leq J$ и $IG_{\mathfrak{F}}$ p-разложима. $\square$

Следствие 17. *Пусть N — p-разложимая нормальная подгруппа p-разрешимой группы G. Пусть $\theta \in \mathbf{Irr}(N)$ и $T = \mathbf{I}_G(\theta)$ — стабилизатор θ в G. Если I — $\mathfrak{F}$-инъектор T, то существует $\mathfrak{F}$-инъектор H в G такой, что $H \cap T = I$.*

Доказательство. Заметим, что $N\mathbf{C}_G(N) \leq T$. Тогда утверждение следует из леммы 16 и предложения 6. $\square$

Следствие 18 [8, теорема 2.1]. *Пусть N — нильпотентная нормальная подгруппа разрешимой группы G. Пусть $\theta \in \mathbf{Irr}(N)$ и $T = \mathbf{I}_G(\theta)$ — стабилизатор θ в G. Если I — нильпотентный инъектор T, то существует нильпотентный инъектор H в G такой, что $H \cap T = I$.*

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 17 и замечания после предложения 8.

Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pérez Monasor F.* Grupos finitos separados respecto de una formación de Fitting // Rev. Acad. Ci. Zaragoza (2). 1973. V. 28. P. 253–301. (Ph. D. Thesis, 1972).
2. *Iranzo M. J., Pérez Monasor F.* $\mathfrak{F}$-constraint with respect to a Fitting class // Arch. Math. 1986. V. 46. P. 205–210.
3. *Förster P.* Maximal quasinilpotent subgroups and injectors for Fitting classes in finite groups // Southeast Asian Bull. Math. 1987. V. 11. P. 1–11.
4. *Iranzo M. J., Pérez Monasor F.* Fitting classes $\mathfrak{F}$ such that all finite groups have $\mathfrak{F}$-injectors // Israel J. Math. 1986. V. 56. P. 97–101.
5. *Lockett P.* On the theory of fitting classes of finite solvable groups: Ph. D. Thesis. Univ. of Warwick, United Kingdom, 1971.
6. *Glauberman G.* On Burnside's other $p^a q^b$-theorem // Pacific J. Math. 1975. V. 56. P. 469–476.
7. *Lausch H.* Conjugacy classes of maximal nilpotent subgroups // Israel J. Math. 1984. V. 47. P. 29–31.
8. *Navarro G., Sanus L.* A partition of characters associated to nilpotent subgroups // Israel J. Math. 1999. V. 114. P. 359–380.

Статья поступила 9 августа 1999 г.

46100 Burjassot. València, Spain
Departament d'Àlgebra. Facultat de Matemàtiques Universitat de València.
30203 Cartagena. Murcia, Spain
Departamento de Matemática Aplicada y Estad́stica. Universidad Politécnica de Cartagena
F.Perez.Monasor@uv.es