Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 512.544.43

О ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ ЦИКЛИЧЕСКИ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

В. М. Тарарин

Аннотация: Рассматриваются группы G автоморфизмов (названные cl-группами автоморфизмов) циклически упорядоченных множеств $\langle X, C\rangle$, обладающие свойством: стабилизатор $\mathrm{St}_G(a)$ в группе G любого элемента a пополнения $\overline{X}$ множества X является решеточно упорядоченной группой автоморфизмов линейно упорядоченного множества $\langle X, \leq_a\rangle$, где $x \leq_a y$, $x, y \in X$, если и только если $x = a$ или $x = y$, или $C(a, x, y)$. Получена классификация транзитивных c-примитивных cl-групп автоморфизмов циклически упорядоченных множеств. Библиогр. 8.

Введение

Непустое множество X называется *циклически упорядоченным множеством (ц. у. множеством)* [1, 2], если на X определено тернарное отношение C, обладающее следующими свойствами:

C1) если $C(x, y, z)$, то $x \neq y \neq z \neq x$,

C2) если $x \neq y \neq z \neq x$, то имеет место ровно одно из отношений $C(x, y, z)$ и $C(x, z, y)$,

C3) если $C(x, y, z)$, то $C(y, z, x)$,

C4) если $C(x, y, z)$ и $C(x, z, t)$, то $C(x, y, t)$.

Важным примером ц. у. множества является ц. у. множество $\mathbb{T}$ комплексных чисел на единичной окружности, если $C(x, y, z)$ означает, что числа x, y, z следуют друг за другом при обходе против часовой стрелки.

Если $\langle X, C\rangle$ — ц. у. множество и f — подстановка множества X, то f называется *автоморфизмом* ц. у. множества $\langle X, C\rangle$, если

C5) из $C(x, y, z)$ следует $C(f(x), f(y), f(z))$ для любых элементов $x, y, z \in X$.

Группой автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$ называется любая подгруппа G группы $A(\langle X, C\rangle)$ всех автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$, рассматриваемая как группа, действующая на X. Группа G автоморфизмов *транзитивна*, если для любых элементов $x, y \in X$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $g(x) = y$. Обозначаем через e единицу группы, через E — единичную группу. *Стабилизатором* (*или стационарной группой*) элемента $x \in X$ в группе G подстановок множества X называется подгруппа $\mathrm{St}_G(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}$. Если G — группа автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$ и $a \in X$, то из условий C1–C5 следует, что отношение $\leq_a$ на множестве X обладает свойствами:

C6) $x \leq_a y$, если и только если $x = a$ или $x = y$, или $C(a, x, y)$ является отношением линейного порядка,

C7) $x \leq_a y$ влечет $g(x) \leq_a g(y)$ для всех $g \in \mathrm{St}_G(a)$, $x, y \in X$.

Таким образом, стабилизатор $\mathrm{St}_G(a)$ в группе G автоморфизмов ц. у. множества X, $a \in X$, является группой автоморфизмов линейно упорядоченного (л. у.)

множества $\langle X, \leq_a \rangle$, что, в частности, указывает на связь групп автоморфизмов циклически и линейно упорядоченных множеств.

В данной работе рассмотрены группы G автоморфизмов (названные *cl-группами автоморфизмов*) ц. у. множеств $\langle X, C \rangle$, обладающие свойством: стабилизатор $\mathrm{St}_G(a)$ в группе G любого элемента a пополнения $\overline{X}$ ц. у. множества X является решеточно упорядоченной группой автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq_a \rangle$. В § 3 на множестве $A(\langle X, C \rangle)$ всех автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C \rangle$ определены бинарные операции $\vee$ и $\wedge$, в терминах которых характеризуются cl-группы автоморфизмов (теорема 2). Основной результат работы — теорема 6, дающая классификацию транзитивных c-примитивных cl-групп автоморфизмов ц. у. множеств.

Необходимые сведения по теории групп автоморфизмов л. у. множеств содержатся в [3].

§ 1. Пополнение циклически упорядоченного множества

Пусть $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \geq 3$, означает, что $C(a_i, a_j, a_k)$ имеет место для всех $i < j < k$. Тогда справедливо

Предложение 1 [2]. *В ц. у. множестве если $C(a, b_i, b_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$, то $C(a, b_1, b_2, \ldots, b_n)$. В частности, элементы a, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ различны.*

Пусть X — ц. у. множество, $a, b \in X$. Полагаем $(\!(a, b)\!) = \{x \in X \mid C(a, x, b)\}$, $[\![a, b]\!] = (\!(a, b)\!) \cup \{a, b\}$, и если $a \neq b$, то $(\!(a, b]\!] = (\!(a, b)\!) \cup \{b\}$, $[\![a, b)\!) = (\!(a, b)\!) \cup \{a\}$. Для любого автоморфизма $f \in A(X)$ согласно свойству C5 имеем $f((\!(a, b)\!)) = (\!(f(a), f(b))\!)$ и т. д. Подмножество Y ц. у. множества X называется *выпуклым*, если $Y = X$, либо

C8) найдется элемент $a \in X \backslash Y$ такой, что $C(a, y_1, x, y_2)$ влечет $x \in Y$ для любых $y_1, y_2 \in Y$, $x \in X$.

Очевидно, что C8 эквивалентно условию:

C8$'$) найдется элемент $a \in X \backslash Y$ такой, что если $a \notin [\![y_1, y_2]\!]$, $y_1, y_2 \in Y$, то $[\![y_1, y_2]\!] \subseteq Y$.

Несложно заметить, что определение выпуклого подмножества Y в условиях C8, C8$'$ не зависит от выбора элемента $a \in X \backslash Y$. Очевидно, что множества $(\!(a, b)\!), [\![a, b]\!]$ и т. д. выпуклы в ц. у. множестве X, и если Y выпукло в X, то $X \backslash Y$ и $f(Y)$ также выпукло в X, где $f \in A(X)$. Непосредственно из C6 и C8 следует, что если Y — выпуклое подмножество ц. у. множества X, $Y \neq X$, то Y является выпуклым подмножеством л. у. множества $\langle X, \leq_a \rangle$ для любого элемента $a \in X \backslash Y$, т. е. $x \leq_a y \leq_a z$, $x, z \in Y$, $y \in X$, влечет $y \in Y$. Очевидно, верно и обратное утверждение. Порядок $\leq_a$ на X определяет порядок $\leq$, называемый *индуцированным*, на выпуклом множестве $Y \neq X$, не зависящий от выбора элемента $a \in X \backslash Y$, причем, как несложно заметить,

C7$'$) если G — группа автоморфизмов ц. у. множества X и $G(Y) = Y$, то ограничение G' группы G на множество Y является группой автоморфизмов л. у. множества $\langle Y, \leq \rangle$.

Непустое выпуклое подмножество Y ц. у. множества X называется *ограниченным*, если $Y \subseteq [\![a, b]\!]$ для некоторых элементов $a, b \in X$ таких, что $(\!(b, a)\!) \neq \varnothing$. Элемент b — *точная правая грань* множества Y в X, если $Y \not\subseteq [\![a, c]\!]$ для любого элемента $c \in [\![a, b)\!)$. Аналогично определяется *точная левая грань* множества Y в X.

Пусть X — ц. у. множество и $a \in X$. Пара (a, L), где L — непустое выпуклое подмножество X, удовлетворяющее условиям:

C9) если $x \in L$, то $[\![a, x]\!] \subseteq L$,

C10) если L обладает точной правой гранью $u \in X$, то $u \in L$,

называется *a-идеалом* ц. у. множества X. На множестве X^* всех a-идеалов ц. у. множества X (элемент a пробегает все множество X) определим отношение $\eta : (a, L) \equiv (b, L')(\operatorname{mod} \eta)$ тогда и только тогда, когда либо $a = b$ и $L = L'$, либо $a \neq b$ и $L = [\![a, b)\!) \cup L'$, $[\![a, b)\!) \cap L' = \varnothing$, либо $a \neq b$ и $L' = [\![b, a)\!) \cup L$, $[\![b, a)\!) \cap L = \varnothing$. Тривиальная проверка показывает, что η является отношением эквивалентности на X^*. Классы эквивалентности отношения η называются *идеалами* ц. у. множества X. Фактор-множество X^*/η обозначим через $\overline{X}$. Заметим, что для любых идеала $\bar{x} = (x, L)\eta \in \overline{X}$ и элемента $a \in X$ существует, и причем единственный a-идеал $(a, L_a(\bar{x}))$ такой, что $(a, L_a(\bar{x})) \in (x, L)\eta$. На множестве $\overline{X}$ определен циклический порядок $\overline{C} : \overline{C}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\bar{x} \neq \bar{y} \neq \bar{z} \neq \bar{x}$, если и только если для некоторого элемента $a \in X$ либо $L_a(\bar{x}) \subseteq L_a(\bar{y}) \subseteq L_a(\bar{z})$, либо $L_a(\bar{y}) \subseteq L_a(\bar{z}) \subseteq L_a(\bar{x})$, либо $L_a(\bar{z}) \subseteq L_a(\bar{x}) \subseteq L_a(\bar{y})$. Отображение $\varepsilon : X \to \overline{X}$, $\varepsilon(x) = (x, \{x\})\eta$, очевидно, является изоморфизмом ц. у. множества X в ц. у. множество $\overline{X}$, т. е. $x \neq y$ влечет $\varepsilon(x) \neq \varepsilon(y)$, и $C(x, y, z,)$, если и только если $\overline{C}(\varepsilon(x), \varepsilon(y), \varepsilon(z))$, $x, y, z \in X$. Циклически упорядоченное множество $\overline{X}$ после отождествления $\varepsilon(X)$ с X называется (дедекиндовым) *пополнением* ц. у. множества X.

Интервалы (открытые, замкнутые и т. д.) ц. у. множества $\overline{X}$ будем сопровождать верхней чертой, например, $\overline{(\!(\bar{x}, \bar{y})\!)} = \{\bar{z} \in \overline{X} \mid \overline{C}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y})\}$. Полагаем $(\!(\bar{x}, \bar{y})\!) = \overline{(\!(\bar{x}, \bar{y})\!)} \cap X$ и т. д. для $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}$. Очевидно, что множества $(\!(\bar{x}, \bar{y})\!)$, $[\![\bar{x}, \bar{y}]\!]$ и т. д., где $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}$, являются выпуклыми в X. Несложные рассуждения показывают, что ц. у. множество X *плотно* в пополнении $\overline{X}$ (т. е. для любых элементов $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}$, $\bar{x} \neq \bar{y}$, имеет место $[\![\bar{x}, \bar{y}]\!] \neq \varnothing$) и $\overline{(\overline{X})} = \overline{X}$.

Элементы $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{X}$ называются соответственно *точной левой* и *точной правой гранями* выпуклого ограниченного множества $Y \subseteq X$ в пополнении $\overline{X}$, если $Y \subseteq [\![\bar{a}, \bar{b}]\!]$ и $Y \not\subseteq [\![c, \bar{b}]\!]$, $Y \not\subseteq [\![\bar{a}, c]\!]$ для любого элемента $c \in (\!(\bar{a}, \bar{b})\!)$. Очевидно, что всякое непустое ограниченное выпуклое подмножество Y ц. у. множества X имеет в $\overline{X}$ точную левую и точную правую грани.

Если $\overline{X}$ — пополнение ц. у. множества X и $z \in \overline{X}$, то условие C6 определяет линейный порядок $\leq_z$ на множестве $\overline{X}$, индуцирующий линейный порядок на $X \subseteq \overline{X}$, обозначаемый также через $\leq_z$, причем

C6$'$) $x \leq_z y$, $x, y \in X$, если и только если $x = z$ или $x = y$, или $C(z, x, y)$ в ц. у. множестве $\overline{X}$.

Так же, как для групп автоморфизмов л. у. множеств [4], доказывается, что любой автоморфизм f ц. у. множества X продолжается до автоморфизма $\bar{f}$ ц. у. множества $\overline{X}$, причем имеет место

Предложение 2. *Для любого ц. у. множества X и любой группы автоморфизмов $G \subseteq A(X)$ существует единственный изоморфизм (π, ε) группы (G, X) в группу $(A(\overline{X}), \overline{X})$ такой, что $(\pi(g))(x) = g(x)$ и $\varepsilon(x) = x$ для любых элементов $x \in X$, $g \in G$.*

Ввиду предложения 2 отождествляем группу G автоморфизмов ц. у. множества X с подгруппой $\pi(G)$ группы автоморфизмов $A(\overline{X})$ пополнения $\overline{X}$. Отношение $\overline{C}$ циклического порядка на $\overline{X}$ будем обозначать через C.

Если $f \in A(\overline{X})$, то полагаем $\overline{X_f} = \{x \in \overline{X} \mid f(x) = x\}$, т. е. $\overline{X_f}$ — множество *неподвижных точек автоморфизма* f на $\overline{X}$.

Предложение 3. *Если* $f \in A(\overline{X})$, $a, x \in \overline{X}$ *и* $f(a) = a$, *то* $C(a, x, f(x))$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket} \cap \overline{X_f} = \varnothing$.

Доказательство. Пусть выполнено условие предложения и $C(a, x, f(x))$. Предположим, что существует элемент $t \in \overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket}$, $f(t) = t$. Так как $f(x) \neq x$, то $t \neq x$, $t \neq f(x)$. Следовательно, имеем $C(x, t, f(x))$, откуда ввиду $C(a, x, f(x))$ по C3 и предложению 1 получаем $C(a, x, t, f(x))$, в частности, $C(a, x, t)$ и $C(a, t, f(x))$. Согласно C5 и условию предложения $C(a, x, t)$ влечет $C(a, f(x), t)$, что противоречит $C(a, t, f(x))$. Значит, $\overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket} \cap \overline{X_f} = \varnothing$.

Обратно, пусть $\overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket} \cap \overline{XXf} = \varnothing$. Тогда $f(x) \neq x$ и по условию предложения $a \notin \overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket}$, откуда по C2 $a \in \overline{\llbracket f(x), x\rrbracket}$, и ввиду неравенств $f(x) \neq x \neq a \neq f(x)$ получаем $C(f(x), a, x)$ и $C(a, x, f(x))$.

Предложение 4. *Если* $f \in A(\overline{X})$, $x \in \overline{X}$ *и* $f(x) \neq x$, *то соотношение* $\overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket} \cap \overline{X_f} \neq \varnothing$ *влечет соотношение* $\overline{\llbracket f(x), x\rrbracket} \cap \overline{X_f} = \varnothing$.

Доказательство. Пусть выполнено условие предложения и $\overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket} \cap \overline{X_f} \neq \varnothing$. Предположим, что существует элемент $a \in \overline{X}$ такой, что $a \in \overline{\llbracket f(x), x\rrbracket}$, $f(a) = a$. Тогда в силу условия предложения имеем $a \neq x \neq f(x) \neq a$, откуда получаем $C(f(x), a, x)$ и $C(a, x, f(x))$. Из последнего отношения по предложению 3 вытекает $\overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket} \cap \overline{X_f} = \varnothing$, что противоречит условию предложения. Следовательно, имеем $\overline{\llbracket f(x), x\rrbracket} \cap \overline{X_f} = \varnothing$.

Предложение 5. *Если* $f \in A(\overline{X})$, $x, y \in \overline{X}$ *и*

$$\overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket} \cap \overline{X_f} = \varnothing, \quad \overline{\llbracket y, f(y)\rrbracket} \cap \overline{X_f} \neq \varnothing,$$

то $C(x, f(x), y)$, *причем если* $f(y) \neq y$, *то* $C(x, f(x), f(y), y)$.

Доказательство. Пусть выполнено условие предложения. Если $f(y) = y$, то по предложению 3 из $\overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket} \cap \overline{X_f} = \varnothing$ следует $C(y, x, f(x))$ и $C(x, f(x), y)$. Пусть $f(y) \neq y$ и $a \in \overline{\llbracket y, f(y)\rrbracket}$, $f(a) = a$. Тогда ввиду $y \neq a \neq f(y) \neq y$ имеем $C(y, a, f(y))$, откуда получаем $C(a, f(y), y)$. Так как по условию $a \notin \overline{\llbracket x, f(x)\rrbracket}$, имеем $C(a, x, f(x))$ и $C(x, f(x), a)$. Далее, $a \neq x \neq y \neq a$. Если $C(a, x, y)$, то по C5 будет $C(a, f(x), f(y))$, откуда ввиду отношений $C(a, f(y), y)$, $C(a, x, f(x))$ по предложению 1 получаем $C(a, x, f(x), f(y), y)$, в частности, $C(x, f(x), f(y), y)$ и $C(x, f(x), y)$. Если $C(a, y, x)$, то в силу $C(a, f(y), y)$ по предложению 1 получаем $C(a, f(y), y, x)$ и $C(f(y), y, x, a)$, откуда ввиду отношения $C(x, f(x), a)$ имеем $C(f(y), y, x, f(x), a)$, в частности, $C(x, f(x), f(y), y)$ и $C(x, f(x), y)$. Предложение доказано.

Предложение 6. *Если* $f \in A(\overline{X})$, $a, b \in \overline{X}$ *и* $C(a, f(a), f(b), b)$, *то*

$$\overline{\llbracket a, f(a)\rrbracket} \cap \overline{X_f} = \varnothing, \quad \overline{\llbracket a, b\rrbracket} \cap \overline{X_f} \neq \varnothing, \quad \overline{\llbracket b, a\rrbracket} \cap \overline{X_f} \neq \varnothing, \quad \overline{\llbracket b, f(b)\rrbracket} \cap \overline{X_f} \neq \varnothing.$$

Доказательство. Пусть выполнено условие предложения. Покажем, что для любого целого числа $n \geq 1$ имеет место

(1) $C(f^{-n}(a), \ldots, f^{-1}(a), a, f(a), \ldots, f^{n}(a), f(b), b, f^{-1}(b))$.

Для $n = 1$ отношение (1) справедливо. Действительно, по свойству C5 из $C(a, f(a), f(b), b)$ следует $C(f^{-1}(a), a, b, f^{-1}(b))$, откуда, используя предложение 1, получаем $C(f^{-1}(a), a, f(a), f(b), b, f^{-1}(b))$. Предположим, что для числа $n - 1$ имеет место отношение

(2) $C(f^{-(n-1)}(a), \dots, f^{-1}(a), a, f(a), \dots, f^{n-1}(a), f(b), b, f^{-1}(b))$.

Тогда из $C(f^{-(n-1)}(a), f^{-(n-2)}(a), b)$ по С5 следует

$$C(f^{-n}(a), f^{-(n-1)}(a), f^{-1}(b)),$$

и из $C(f^{n-2}(a), f^{n-1}(a), b)$ выводим $C(f^{n-1}(a), f^{n}(a), f(b))$, откуда ввиду (2) по предложению 1 получаем отношение (1). Таким образом, (1) имеет место для любого целого числа $n \geq 1$.

Пусть $H = \bigcup\limits_{k\in Z} \overline{[\![f^k(a), f^{k+1}(a)]\!]}$. В силу (1) H — выпуклое ограниченное подмножество $\overline{X}$. Пусть α и β — точные левая и правая грани соответственно множества H. Так как, очевидно, $f(H) = H$, то $f(\alpha) = \alpha$ и $f(\beta) = \beta$. Из (1) следует, что $\alpha \in \overline{[\![b, a]\!]} \subseteq \overline{[\![b, f(b)]\!]}$ и $\beta \in \overline{[\![a, b]\!]}$, откуда находим $\overline{[\![a, b]\!]} \cap \overline{X_f} \neq \varnothing$, $\overline{[\![b, a]\!]} \cap \overline{X_f} \neq \varnothing$ и $\overline{[\![b, f(b)]\!]} \cap \overline{X_f} \neq \varnothing$. Поскольку из (1) следует $C(a, f(a), \beta)$, то ввиду $f(\beta) = \beta$ по предложению 3 получаем $\overline{[\![a, f(a)]\!]} \cap \overline{X_f} = \varnothing$. Предложение доказано.

Если G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, то точка (элемент) $\alpha \in \overline{X}$ называется *неподвижной точкой группы* G, если $\mathrm{St}_G(\alpha) = G$, т. е. $G(\alpha) = \{g(\alpha) \mid g \in G\} = \{\alpha\}$.

Предложение 7. *Если α — неподвижная точка транзитивной группы $G \neq E$ автоморфизмов ц. у. множества X, то α является единственной неподвижной точкой группы G, причем $\alpha \in \overline{X} \backslash X$.*

Доказательство утверждения очевидно.

§ 2. *c*-Примитивные группы автоморфизмов

Аналогично определениям выпуклой G-конгруэнции и o-примитивной группы автоморфизмов л. у. множества [3] дадим определения выпуклой G-конгруэнции и c-примитивной группы автоморфизмов ц. у. множества. Пусть G — группа автоморфизмов ц. у. множества X и θ — отношение эквивалентности на X. Отношение θ разбивает X на непересекающиеся классы эквивалентности $x\theta = \{y \in X \mid y \equiv x (\operatorname{mod} \theta)\}$, $x \in X$, называемые *θ-блоками.* Отношение эквивалентности θ на множестве X называется *выпуклой G-конгруэнцией*, если выполняются следующие условия:

С11) для любого элемента $x \in X$ θ-блок $x\theta$ является выпуклым подмножеством X,

С12) $x \equiv y (\operatorname{mod} \theta)$ влечет $g(x) \equiv g(y) (\operatorname{mod} \theta)$ для любых элементов $x, y \in X$, $g \in G$.

Выпуклая G-конгруэнция θ на ц. у. множестве X называется *собственной*, если на X существует θ-блок, состоящий более чем из одного элемента и не совпадающий с X. Группа G автоморфизмов ц. у. множества называется *с-примитивной*, если она не имеет собственных выпуклых G-конгруэнций.

Предложение 8. *Пусть G — транзитивная группа автоморфизмов ц. у. множества X. Непустое выпуклое подмножество K ц. у. множества X является θ-блоком некоторой выпуклой G-конгруэнции θ на X тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$ будет $g(K) = K$ либо $g(K) \cap K = \varnothing$.*

Доказательство утверждения предложения аналогично доказательству соответствующего утверждения для групп автоморфизмов л. у. множеств [4].

Теорема 1. *Если G — транзитивная группа автоморфизмов ц. у. множества X, то следующее утверждение эквивалентны:*

(1) *группа G c-примитивна на X,*

(2) *для любой точки $\alpha \in \overline{X}$, не являющейся неподвижной точкой группы G, множество $G(\alpha) = \{g(\alpha) \mid g \in G\}$ плотно в множестве $\overline{X}$.*

Доказательство. Покажем, что из (1) следует (2). Пусть G — транзитивная c-примитивная группа автоморфизмов ц. у. множества X, $\alpha \in \overline{X}$ и $G(\alpha) \neq \{\alpha\}$. Если $\alpha \in X$, то из транзитивности действия группы G на X следует $G(\alpha) = X$ и, значит, множество $G(\alpha)$ плотно в $\overline{X}$. Пусть $\alpha \in \overline{X}\backslash X$. Предположим, что $G(\alpha)$ не является плотным в $\overline{X}$, и, следовательно, найдутся элементы $x, y \in \overline{X}$, $x \neq y$, такие, что $g(\alpha) \notin \overline{[\![x, y]\!]}$ для любого элемента $g \in G$. Тогда найдутся элементы $b, d \in X$, $b \neq d$ такие, что $\overline{[\![d, b]\!]} \subseteq \overline{[\![x, y]\!]}$, и поэтому $g(\alpha) \notin \overline{[\![d, b]\!]}$ для любого $g \in G$.

Определим отношение θ на множестве X так: $x \equiv y(\operatorname{mod}\theta)$, если и только если $g(\alpha) \notin \overline{[\![x, y]\!]}$ для любого $g \in G$ либо $g(\alpha) \notin \overline{[\![y, x]\!]}$ для любого $g \in G$. Тривиальная проверка показывает, что θ — отношение эквивалентности, причем $x \equiv y(\operatorname{mod}\theta)$ влечет $g(x) \equiv g(y)(\operatorname{mod}\theta)$ для любого элемента $g \in G$ и, следовательно, θ удовлетворяет условию C12. Так как $b \equiv d(\operatorname{mod}\theta)$, то θ-блок $b\theta = \{x \in X \mid x \equiv b(\operatorname{mod}\theta)\}$ не одноэлементен. Покажем, что множество $b\theta$ выпукло в X и $b\theta \neq X$. По способу выбора элементов b, d имеем $G(\alpha) \subseteq \overline{[\![b, d]\!]}$. Пусть H — множество, являющееся объединением всех интервалов $\overline{[\![g(\alpha), s(\alpha)]\!]}$, $g, s \in G$, содержащихся в интервале $\overline{[\![b, d]\!]}$. Тогда, очевидно, H выпукло в $\overline{X}$ и $H \subseteq \overline{[\![b, d]\!]}$. Поскольку по условию $G(\alpha) \neq \{\alpha\}$, то $H \neq \{\alpha\}$, откуда следует, что $N = H \cap X$ является непустым выпуклым подмножеством ц. у. множества X и $N \subseteq [\![b, d]\!]$. Если $x \in N$, то $x \not\equiv b\ (\operatorname{mod}\theta)$. Действительно, $x \in \overline{[\![g(\alpha), s(\alpha)]\!]}$ для некоторых элементов $g, s \in G$ таких, что $\overline{[\![g(\alpha_), s(\alpha)]\!]} \subseteq \overline{[\![b, d]\!]}$, отсюда $s(\alpha) \in \overline{[\![x, b]\!]}$ и $g(\alpha) \in \overline{[\![b, x]\!]}$, и, следовательно, $x \not\equiv b(\operatorname{mod}\theta)$. Таким образом, $b\theta \neq X$. Так как множество N выпукло в X, то $K = X\backslash N$ выпукло в X, причем $b \in K$. Покажем, что $K = b\theta$. Так как $N \subseteq [\![b, d]\!]$, то $[\![d, b]\!] \subseteq K$. Если $x \in [\![d, b]\!]$, то, очевидно, $x \equiv b(\operatorname{mod}\theta)$. Пусть $x \in K$ и $x \notin [\![d, b]\!]$. Тогда имеет место $C(b, x, d)$. Предположим, что $x \not\equiv b(\operatorname{mod}\theta)$. Тогда $x \not\equiv d(\operatorname{mod}\theta)$ и, следовательно, найдутся элементы $g, s \in G$ такие, что $s(\alpha) \in \overline{[\![b, x]\!]}$ и $g(\alpha) \in \overline{[\![x, d]\!]}$. Так как $\alpha \in \overline{X}\backslash X$, то $s(\alpha) \neq b \neq x \neq s(\alpha)$ и $g(\alpha) \neq x \neq d \neq g(\alpha)$, откуда имеем $C(b, s(\alpha), x)$ и $C(x, g(\alpha), d)$. Ввиду $C(b, x, d)$ по предложению 1 из последних отношений получаем $C(b, s(\alpha), x, g(\alpha), d)$. Следовательно, $x \in \overline{[\![s(\alpha), g(\alpha)]\!]} \subseteq \overline{[\![b, d]\!]}$, откуда $x \in N$ и $x \notin K = X\backslash N$, что противоречит предположению. Таким образом $x \equiv b(\operatorname{mod}\theta)$, и, следовательно, $K \subseteq b\theta$, откуда по изложенному выше $K = b\theta$ и θ-блок $b\theta$ — выпуклое подмножество X. Поэтому ввиду транзитивности группы G для любого $x \in X$ θ-блок $x\theta$ — выпуклое множество, откуда по изложенному выше следует, что θ — собственная выпуклая G-конгруэнция на X, что противоречит c-примитивности группы G. Значит, множество $G(\alpha)$ плотно в $\overline{X}$.

Покажем, что из (2) следует (1). Пусть G — транзитивная группа автоморфизмов ц. у. множества X и для любой точки $\alpha \in \overline{X}$, $G(\alpha) \neq \{\alpha\}$, множество $G(\alpha)$ плотно в $\overline{X}$. Предположим, что группа G не является c-примитивной группой, и пусть θ — собственная выпуклая G-конгруэнция на X, $a \in X$ и $a\theta \neq \{a\}$, $a\theta \neq X$. Тогда найдется элемент $b \in X$ такой, что $a\theta \cap b\theta = \varnothing$. Так как группа G транзитивна на X, то по C7$'$ и предложению 8 θ-блоки $a\theta$, $b\theta$ содержат бесконечное число элементов, откуда, в частности, следует, что $a\theta$ — выпуклое ограниченное подмножество X. Пусть α и β — точные левая и правая грани, соответственно множества $a\theta$. По предложению 7 α или β не является неподвижной точкой группы G. Пусть для определенности $G(\alpha) \neq \{\alpha\}$. В силу того, что множество $a\theta$ бесконечно, найдутся элементы $x, y \in a\theta$, $x \neq y$ такие, что $x \neq \alpha$, $y \neq \beta$ и $[\![x, y]\!] \subseteq a\theta \subseteq [\![\alpha, \beta]\!]$. Так как для любого $g \in G$ элементы $g(\alpha)$, $g(\beta)$ являются точными левой и правой гранями соответственно θ-блока $g(a\theta) = g(a)\theta$ и по предложению 8 $g(a)\theta = a\theta$ либо $g(a)\theta \cap a\theta = \varnothing$, то $g(\alpha) \notin \overline{[\![x, y]\!]}$ для любого $g \in G$, что противоречит предположению. Следовательно, группа G c-примитивна. Теорема доказана.

§ 3. cl-Группы автоморфизмов

На множестве $A(\langle X, \leq\rangle)$ всех автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq\rangle$ определен частичный порядок $\leq$: $g \leq h$ тогда и только тогда, когда $g(x) \leq h(x)$ для любого элемента $x \in X$, относительно которого $A(\langle X, \leq\rangle)$ является частично упорядоченной группой [3]. Частично упорядоченное множество $A(\langle X, \leq\rangle)$ является решеткой, где точные верхняя $g \bigvee h$ и нижняя $g \bigwedge h$ грани элементов g, h определяются равенствами

C13) $(g \bigvee h)(x) = \max\{g(x), h(x)\}$, $(g \bigwedge h)(x) = \min\{g(x), h(x)\}$ для любого $x \in X$.

Подгруппа G группы $A(\langle X, \leq\rangle)$, содержащая $g \bigvee h$, $g \bigwedge h$ для любых элементов $g, h \in G$ (т. е. множество G является подрешеткой решетки $A(\langle X, \leq\rangle)$), называется *решеточно упорядоченной группой* (*l-группой*) *автоморфизмов* л. у. множества $\langle X, \leq\rangle$ [3].

Группу G автоморфизмов ц. у. множества X будем называть *cl-группой автоморфизмов*, если стабилизатор $\mathrm{St}_G(a)$ в G любого элемента $a \in \overline{X}$ является l-группой автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq_a\rangle$. Пусть g, h — произвольные автоморфизмы пополнения $\overline{X}$ ц. у. множества X. Определим отображения $g \vee h$, $g \wedge h$ множества $\overline{X}$ в $\overline{X}$, полагая для любого элемента $x \in \overline{X}$

$$\text{C14)}\ (g \vee h)(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если } \overline{[\![h(x), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} \neq \varnothing, \\ g(x), & \text{если } g(x) = h(x) \\ & \text{либо } \overline{[\![h(x), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} = \varnothing; \end{cases}$$

$$(g \wedge h)(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если } h(x) = g(x) \\ & \text{либо } \overline{[\![h(x), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} = \varnothing, \\ g(x), & \text{если } \overline{[\![h(x), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} \neq \varnothing, \end{cases}$$

где $\overline{X}_{gh^{-1}} = \{y \in \overline{X} \mid gh^{-1}(y) = y\}$.

Предложение 9. *Для любых автоморфизмов g, h ц. у. множества $\overline{X}$ отображения $g \vee h$, $g \wedge h : \overline{X} \to \overline{X}$ являются автоморфизмами ц. у. множества $\overline{X}$.*

Доказательство. Пусть $g, h \in A(\overline{X})$. Непосредственная проверка показывает, что $g \vee h = (gh^{-1} \vee e)h$, $g \wedge h = (gh^{-1} \wedge e)h$. Поэтому для доказательства предложения достаточно показать, что $f^+ = f \vee e$, $f^- = f \wedge e \in A(\overline{X})$ для любого $f \in A(\overline{X})$. Существование и единственность решения в $\overline{X}$ уравнений $f^+(x) = a$ и $f^-(x) = a$, $a \in \overline{X}$, следуют из C14 и того, что соотношение $\overline{[\![f^{-1}(a), a]\!]} \cap \overline{X}_f \neq \varnothing$ $(= \varnothing)$ эквивалентно соотношению $\overline{[\![a, f(a)]\!]} \cap \overline{X}_f \neq \varnothing$ $(= \varnothing)$. Поэтому f^+ и f^- — подстановки множества $\overline{X}$. Покажем, что f^+ — автоморфизм ц. у. множества $\overline{X}$. Пусть $x_1, x_2, x_3 \in \overline{X}$ и $C(x_1, x_2, x_3)$. Если $\overline{[\![x_i, f(x_i)]\!]} \cap \overline{X}_f \neq \varnothing$ $(= \varnothing)$ для любого $i = 1, 2, 3$, то $f^+(x_i) = x_i$ ($f^+(x_i) = f(x_i)$) и, следовательно, $C(x_1, x_2, x_3)$ влечет $C(f^+(x_1), f^+(x_2), f^+(x_3))$. В противном случае, не теряя общности, можно считать, что $\overline{[\![x_1, f(x_1)]\!]} \cap \overline{X}_f \neq \varnothing$ и $\overline{[\![x_3, f(x_3)]\!]} \cap \overline{X}_f = \varnothing$. Тогда $f^+(x_1) = x_1$, $f^+(x_3) = f(x_3)$ и по предложению 5 имеем $C(x_1, x_3, f(x_3))$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $\overline{[\![x_2, f(x_2)]\!]} \cap \overline{X}_f \neq \varnothing$, то $f^+(x_2) = x_2$. Тогда по C4 из $C(x_1, x_3, f(x_3))$ и $C(x_1, x_2, x_3)$ следует $C(x_1, x_2, f(x_3))$, откуда имеем $C(f^+(x_1), f^+(x_2), f^+(x_3))$. Если $\overline{[\![x_2, f(x_2)]\!]} \cap \overline{X}_f = \varnothing$, то $f^+(x_2) = f(x_2)$. Из $C(x_1, x_2, x_3)$ вытекает $C(f(x_1), f(x_2), f(x_3))$, откуда в случае $f(x_1) = x_1$ получим $C(f^+(x_1), f^+(x_2), f^+(x_3))$. Пусть $f(x_1) \neq x_1$. Тогда по предложению 5 справедливо $C(x_2, f(x_2), f(x_1), x_1)$, из чего выводим $C(f(x_1), x_1, x_2, f(x_2))$. По предложению 1 из последнего отношения и отношения $C(f(x_1), f(x_2), f(x_3))$ следует $C(f(x_1), x_1, x_2, f(x_2), f(x_3))$, в частности, $C(x_1, f(x_2), f(x_3))$, из которого имеем $C(f^+(x_1), f^+(x_2), f^+(x_3))$. Таким образом, f^+ — автоморфизм ц. у. множества $\overline{X}$. Аналогично показывается, что $f^- \in A(\overline{X})$. Предложение доказано.

Если g, h — произвольные автоморфизмы ц. у. множества X, то g и h единственным образом продолжаются до автоморфизмов $\bar{g}$ и $\bar{h}$ пополнения $\overline{X}$. Из способа определения $\bar{g} \vee \bar{h}$, $\bar{g} \wedge \bar{h}$ и предложения 9 следует, что ограничения автоморфизмов $\bar{g} \vee \bar{h}$, $\bar{g} \wedge \bar{h}$ на множество X являются автоморфизмами ц. у. множества X, обозначаемыми $g \vee h$ и $g \wedge h$. Заметим, что равенства C14, определяемые для элементов $x \in X$, задают автоморфизмы $g \vee h$, $g \wedge h$ ц. у. множества X и, следовательно, $\vee$, $\wedge$ являются бинарными операциями на множестве $A(X)$ всех автоморфизмов ц. у. множества X.

Теорема 2. *Группа G автоморфизмов ц. у. множества X является cl-группой тогда и только тогда, когда $g \vee h$, $g \wedge h \in G$ для любых элементов $g, h \in G$.*

Доказательство. Пусть G — cl-группа автоморфизмов ц. у. множества X и $g, h \in G$. Если $\overline{[\![h(x), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} = \varnothing$ для любого $x \in X$, то $g \vee h = g \in G$. Предположим, что $\overline{[\![h(b), g(b)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} \neq \varnothing$ для некоторого $b \in X$. Пусть $a \in \overline{[\![h(b), g(b)]\!]}$, $gh^{-1}(a) = a$. По условию стабилизатор $\mathrm{St}_G(a)$ является l-группой автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq_a \rangle$ и, следовательно, $g \bigvee h \in \mathrm{St}_G(a)$, где $g \bigvee h$ — автоморфизм л. у. множества $\langle X, \leq_a \rangle$, определяемый равенством C13. Покажем, что $g \vee h = g \bigvee h$. Пусть $x \in X$. Если $g(x) = h(x)$, то, очевидно, $(g \vee h)(x) = (g \bigvee h)(x)$. Пусть $g(x) \neq h(x)$. Если $(g \bigvee h)(x) = h(x)$, то ввиду $gh^{-1}(a) = a$ имеем $a <_a g(x) <_a h(x)$, откуда $a \in \overline{[\![h(x), g(x)]\!]}$, и, следовательно, $\overline{[\![h(x), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} \neq \varnothing$. Поэтому $(g \vee h)(x) = h(x)$ и $(g \vee h)(x) = (g \bigvee h)(x)$. Если $(g \bigvee h)(x) = g(x)$, то $a <_a h(x) <_a g(x)$, откуда $a \in \overline{[\![g(x), h(x)]\!]} = \overline{[\![g(x), hg^{-1}(g(x))]\!]}$ и ввиду $hg^{-1}(a) = (a)$ получаем $\overline{[\![g(x), hg^{-1}(g(x))]\!]} \cap \overline{X}_{hg^{-1}} \neq \varnothing$. Поэтому по предложению 4 $\overline{[\![hg^{-1}(g(x)), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{hg^{-1}} = \varnothing$, откуда вследствие равенства $\overline{X}_{gh^{-1}} = \overline{X}_{hg^{-1}}$ получаем $\overline{[\![h(x), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} = \varnothing$ и $(g \vee h)(x) = g(x) = (g \bigvee h)(x)$. Таким образом, $g \vee h \in G$. Аналогично показывается, что $g \wedge h \in G$.

Обратно, пусть G — группа автоморфизмов ц. у. множества X и $g \vee h$, $g \wedge h \in G$ для любых элементов $g, h \in G$. Пусть $a \in \overline{X}$, $g, h \in \mathrm{St}_G(a)$ и $g \bigvee h$, $g \bigwedge h$ — автоморфизмы л. у. множества $\langle X, \leq_a \rangle$, определяемые равенствами C13. Покажем, что $g \bigvee h = g \vee h$. Пусть $x \in X$. Если $g(x) = h(x)$, то, очевидно, $(g \bigvee h)(x) = (g \vee h)(x)$. Предположим, что $g(x) \neq h(x)$. Если $(g \vee h)(x) = h(x)$, то по C14 имеем $\overline{[\![h(x), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} \neq \varnothing$ и по предложению 4 получаем $\overline{[\![g(x), h(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} = \varnothing$, откуда ввиду $a \in \overline{X}_{gh^{-1}}$ имеем $a \notin \overline{[\![g(x), h(x)]\!]}$. Поэтому имеем $C(a, g(x), h(x))$ и по C6$'$ получаем $g(x) \leq_a h(x)$ и $(g \bigvee h)(x) = h(x) = (g \vee h)(x)$. Если $(g \vee h)(x) = g(x)$, то $\overline{[\![h(x), g(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} = \varnothing$, отсюда $a \notin \overline{[\![h(x), g(x)]\!]}$ и, следовательно, имеет место $C(a, h(x), g(x))$ и $h(x) \leq_a g(x)$. Поэтому $(g \bigvee h)(x) = g(x) = (g \vee h)(x)$. Таким образом, $g \bigvee h = g \vee h$, и ввиду $g \vee h \in \mathrm{St}_G(a)$ имеем $g \bigvee h \in \mathrm{St}_G(a)$. Аналогично показывается, что $g \bigwedge h = g \wedge h \in \mathrm{St}_G(a)$. Значит, $\mathrm{St}_G(a)$ для любого $a \in \overline{X}$ является l-группой автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq_a \rangle$, откуда следует, что G — cl-группа. Теорема доказана.

Следствие. *Группа $A(X)$ всех автоморфизмов ц. у. множества X является cl-группой автоморфизмов.*

В дальнейшем, не оговаривая особо, будем использовать эквивалентное определение cl-группы автоморфизмов, сформулированное в теореме 2.

Если X — ц. у. множество и $f, g, h, s \in A(X)$, то несложно заметить, что для любого $x \in X$ соотношение $\overline{[\![hs(x), gs(x)]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} \neq \varnothing (= \varnothing)$ эквивалентно соотношению $\overline{[\![fhs(x), fgs(x)]\!]} \cap \overline{X}_{(fgs)(fhs)^{-1}} \neq \varnothing (= \varnothing)$, откуда по C14 вытекает, что

C15) $f(g \vee h)s = fgs \vee fhs$, $f(g \wedge h)s = fgs \wedge fhs$ для любых элементов $f, g, h, s \in A(X)$.

Также для любых $x \in X$, $g, h \in G$ соотношение $\overline{[\![g^{-1}(x), h^{-1}(x)]\!]} \cap \overline{X}_{h^{-1}g} \neq \varnothing$ $(= \varnothing)$ эквивалентно соотношению $\overline{[\![hg^{-1}(x), x]\!]} \cap \overline{X}_{gh^{-1}} \neq \varnothing$ $(= \varnothing)$, откуда следует равенство $(g \vee h)(h^{-1} \wedge g^{-1}) = e$, и тем самым

C16) $(g \vee h)^{-1} = h^{-1} \wedge g^{-1}$, $(g \wedge h)^{-1} = h^{-1} \vee g^{-1}$ для любых $g, h \in A(X)$.

Заметим, что в отличие от решеточных операций операции $\vee$, $\wedge$ в общем случае некоммутативны и неассоциативны.

Из теоремы 2 и ее следствия, а также равенств C15, C16 вытекает

Предложение 10. *Если G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, то множество G^* автоморфизмов, порожденных автоморфизмами из G при помощи операций $\vee$, $\wedge$, является наименьшей cl-группой автоморфизмов ц. у. множества X, содержащей группу G.*

§ 4. Транзитивные c-примитивные cl-группы, обладающие неподвижной точкой

Пусть G — группа автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq \rangle$. Определим на X тернарное отношение C [2]:

C17) $C(x, y, z)$ тогда и только тогда, когда либо $x < y < z$, либо $y < z < x$, либо $z < x < y$.

Оно удовлетворяет условиям C1–C4 циклического порядка, причем для любого элемента $g \in G$ выполнено условие C5 и, следовательно, G является группой автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C \rangle$. В этом случае будем говорить, что группа G автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C \rangle$ *индуцирована* группой G автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq \rangle$.

Группа G подстановок множества X называется *регулярной*, если G — транзитивная группа и $\mathrm{St}_G(a) = E$ для любого (некоторого) элемента $a \in X$. Если G — л. у. группа, то представление λ группы G автоморфизмами л. у. множества $G : \lambda(g)(x) = g \cdot x$ для любых $g, x \in G$ называется *левым регулярным представлением* л. у. группы G.

Группа $G \neq E$ автоморфизмов л. у. множества X называется *o-2-транзитивной* [3], если для любых элементов $x < y$ и $u < v$ множества X найдется $g \in G$ такой, что $g(x) = u$ и $g(y) = v$.

Группа G автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$ (л. у. множества $\langle X, \leq\rangle$) называется *c-периодической* (*o-периодической* (ср. [3])) *группой автоморфизмов*, если существует автоморфизм p пополнения $\langle \overline{X}, C\rangle$ ц. у. множества $\langle X, C\rangle$ (автоморфизм p дедекиндова пополнения $\langle \widetilde{X}, \leq\rangle$ л. у. множества $\langle X, \leq\rangle$), удовлетворяющий следующим условиям:

(1) если $g \in G$ и $x \in X$, то $g(p(x)) = p(g(x))$,

(2) для любых элементов $a, x \in X$ найдется целое число n такое, что $x \in [\![p^n(a), p^{n+1}(a)]\!]$ ($p^n(a) \leq x \leq p^{n+1}(a)$),

(3) для любого элемента $a \in X$ интервал $(\!(a, p(a))\!)$ ц. у. множества $\langle X, C\rangle$ (интервал $(a, p(a))$ л. у. множества $\langle X, \leq\rangle$) совпадает с орбитой $X(a, x) = \mathrm{St}_G(a)(x)$ стабилизатора $\mathrm{St}_G(a)$ для некоторого элемента $x \in X$.

В этом случае p называется *периодом* группы G.

Теорема 3. *Транзитивная c-примитивная cl-группа G автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$, обладающая неподвижной точкой, является группой одного из следующих видов:*

(1) *G индуцирована левым регулярным представлением архимедовой л. у. группы G;*

(2) *G индуцирована o-2-транзитивной l-группой G автоморфизмов л. у. множества;*

(3) *G — c-периодическая группа автоморфизмов с периодом p бесконечного порядка, индуцированная o-периодической l-группой G автоморфизмов л. у. множества.*

Доказательство. Пусть G — транзитивная c-примитивная cl-группа автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$ и α — неподвижная точка группы G. Непосредственная проверка показывает, что отношения C и $\leq_\alpha$ связаны условием C17 и, следовательно, G индуцирована транзитивной группой G автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq_\alpha\rangle$. Так как G — cl-группа и $\mathrm{St}_G(\alpha) = G$, то G является l-группой автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq_\alpha\rangle$. Поскольку всякая выпуклая G-конгруэнция на л. у. множестве $\langle X, \leq_\alpha\rangle$ [3], очевидно, является выпуклой G-конгруэнцией на ц. у. множестве $\langle X, C\rangle$ и G — c-примитивная группа, то G является o-примитивной l-группой автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq_\alpha\rangle$, откуда по теореме С. Макклири [5, 6] группа G является либо архимедовой л. у. группой, заданной своим левым регулярным представлением, либо o-2-транзитивной группой, либо o-периодической группой автоморфизмов. В последнем случае G является c-периодической группой автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$. Действительно, так как $G \neq E$, то по предложению 7 $\alpha \in \overline{X} \backslash X$, откуда следует, что любому элементу z дедекиндова пополнения $\widetilde{X}$ л. у. множества $\langle X, \leq_\alpha\rangle$ соответствует идеал $L_z = \{x \in X \mid x \leq_\alpha z\}$ л. у. множества $\langle X, \leq_\alpha\rangle$. Очевидно, что L_z — выпуклое ограниченное подмножество ц. у. множества $\langle X, C\rangle$, его точную правую грань обозначим через $\varphi(z)$, $\varphi(z) \in \overline{X}$. Несложные рассуждения показывают, что φ — взаимно однозначное соответствие между множествами $\widetilde{X}$ и $\overline{X} \backslash \{\alpha\}$, причем отображение $p : \overline{X} \to \overline{X}$, $p(\alpha) = \alpha$ и $p(z) = \varphi t \varphi^{-1}(z)$, $z \in \overline{X} \backslash \{\alpha\}$, где t — период группы G автоморфизмов л. у. множества $\langle X, \leq_\alpha\rangle$, является периодом группы G автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$. Так как, очевидно, период t (как элемент группы $A(\widetilde{X})$) имеет бесконечный порядок, период p (как элемент группы $A(\overline{X})$) также имеет бесконечный порядок. Теорема доказана.

§ 5. Регулярные c-примитивные cl-группы автоморфизмов

Циклически упорядоченной группой (*ц. у. группой*) [1, 2] называется группа G, на множестве элементов которой задано отношение C циклического порядка, удовлетворяющее условию:

C18) $C(x, y, z)$ влечет $C(ax, ay, az)$ и $C(xa, ya, za)$ для любых элементов $x, y, z, a \in G$.

Если G — ц. у. группа и H — подгруппа G, то циклический порядок на G индуцирует циклический порядок на H, относительно которого H — ц. у. группа. Важный пример ц. у. группы — мультипликативная ц. у. группа $\mathbb{T}$ комплексных чисел на единичной окружности. Ц. у. группа $\mathbb{T}$ изоморфна ц. у. группе $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, являющейся фактор-группой аддитивности группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел по подгруппе $\mathbb{Z}$ целых чисел, с циклическим порядком $C : C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, если и только если для единственных представителей $r(\bar{x})$, $r(\bar{y})$, $r(\bar{z})$ смежных классов $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, удовлетворяющих условию $0 \leq r(\bar{x}), r(\bar{y}), r(\bar{z}) < 1$, имеет место либо $r(\bar{x}) < r(\bar{y}) < r(\bar{z})$, либо $r(\bar{y}) < r(\bar{z}) < r(\bar{x})$, либо $r(\bar{z}) < r(\bar{x}) < r(\bar{y})$.

Если G — ц. у. группа, то представление λ группы G автоморфизмами ц. у. множества $G : \lambda(g)(x) = g \cdot x$ для любых $g, x \in G$, называется *левым регулярным представлением* ц. у. группы G.

Лемма. *Регулярная cl-группа G автоморфизмов ц. у. множества изоморфна левому регулярному представлению ц. у. группы.*

Доказательство. Пусть G — регулярная cl-группа автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$. Тогда $g(x) \neq h(x)$ для любых элементов $x \in X$, $g, h \in G$, $g \neq h$, откуда следует, что отображение $\lambda : X \to G$, $\lambda(x) = g_x$, $g_x(0) = x$, где 0 — фиксированный элемент X, является взаимно однозначным. Положив $x + y = g_x g_y(0)$, $x, y \in X$, получим группу $\langle X, +\rangle$, изоморфную G, причем ввиду равенства $\lambda(a)(x) = g_a(x) = a + x$, $a, x \in X$, группа G подстановок множества X изоморфна левому регулярному представлению группы $\langle X, +\rangle$ [7]. Покажем, что группа $\langle X, +\rangle$ относительно определенного на X циклического порядка C является ц. у. группой. Так как G — группа автоморфизмов ц. у. множества X и $a + t = g_a(t)$, $a, t \in X$, $g_a \in G$, то $C(x, y, z)$ влечет $C(a + x, a + y, a + z)$ для любых $x, y, z, a \in X$. Покажем, что $C(x, y, z)$ влечет также $C(x + a, y + a, z + a)$. Сначала покажем, что если имеет место отношение $C(0, h(0), g(0))$, $g, h \in G$, то $C(x, h(x), g(x))$ для любого $x \in X$. Предположим противное, и тогда найдется элемент $a \in X$ такой, что $C(a, g(a), h(a))$. Если $[\![0, g(0)]\!] \subseteq [\![a, h(a)]\!]$, то ввиду соотношений $a \neq 0$, $g(0) \neq h(0)$, $C(0, h(0), g(0))$ получим $C(a, 0, h(0), h(a))$ и $C(0, h(0), h(a), a)$, откуда по предложению 6 имеем $\overline{[\![0, h(0)]\!]} \cap \overline{X_h} = \varnothing$ и $\overline{[\![a, h(a)]\!]} \cap \overline{X_h} \neq \varnothing$. Из первого соотношения следует $(h \vee e)(0) = h(0) \neq 0$ и, значит, $h \vee e \neq e$. Из второго соотношения вытекает $(h \vee e)(a) = a$ и, следовательно, $h \vee e = e$, что приводит к противоречию. Аналогично приходим к противоречию в случаях $[\![a, h(a)]\!] \subseteq [\![0, g(0)]\!]$; $[\![0, g(0)]\!] \cap [\![a, h(a)]\!] = \varnothing$; $[\![0, g(0)]\!] \cap [\![a, h(a)]\!] = [\![a, g(0)]\!]$; $[\![0, g(0)]\!] \cap [\![a, h(a)]\!] = [\![0, h(a)]\!]$; $[\![0, g(0)]\!] \cap [\![a, h(a)]\!] = [\![a, g(0)]\!] \cap [\![0, h(a)]\!]$.

Таким образом, если $C(0, h(0), g(0))$, $h, g \in G$, то $C(x, h(x), g(x))$ для любого элемента $x \in X$. Пусть $C(x, y, z)$, $x, y, z, a \in X$. Тогда $C(g_x(0), g_y(0), g_z(0))$, откуда имеем $C(0, g_x^{-1} g_y(0), g_x^{-1} g_z(0))$, и по доказанному выше последовательно получаем $C(a, g_x^{-1}g_y(a), g_x^{-1}g_z(a))$, $C(g_x(a), g_y(a), g_z(a))$ и $C(x+a, y+a, z+a)$. Следовательно, группа $\langle X, +\rangle$ относительно циклического порядка C является ц. у. группой. Из изложенного выше находим, что группа G автоморфизмов ц. у. множества $\langle X, C\rangle$ изоморфна левому регулярному представлению λ ц. у. группы $\langle X, +\rangle$.

Теорема 4. *Регулярная c-примитивная cl-группа G автоморфизмов ц. у. множества X является группой одного из следующих видов:*

(1) *G индуцирована левым регулярным представлением архимедовой л. у. группы G;*

(2) *G изоморфна левому регулярному представлению подгруппы ц. у. группы $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть G — регулярная c-примитивная cl-группа автоморфизмов ц. у. множества X. Если группа G имеет неподвижную точку, то по теореме 3 G индуцирована левым регулярным представлением архимедовой л. у. группы G. Предположим, что $G(z) \neq \{z\}$ для любого $z \in \overline{X}$. В силу леммы можно считать, что группа G автоморфизмов ц. у. множества X является левым регулярным представлением ц. у. группы G. По теореме Л. Ригера [1] существуют л. у. группа Γ и элемент $z > e$ центра группы Γ такие, что выпуклая подгруппа группы Γ, порожденная циклической группой $\langle z\rangle$, совпадает с Γ, $\Gamma/\langle z\rangle = G$ и $C(a, b, c)$ в группе G тогда и только тогда, когда для единственных представителей $r(a)$, $r(b)$, $r(c)$ смежных классов a, b, c группы Γ по подгруппе $\langle z\rangle$, удовлетворяющих условию $e \leq r(a), r(b), r(c) < z$, имеет место либо $r(a) < r(b) < r(c)$, либо $r(b) < r(c) < r(a)$, либо $r(c) < r(a) < r(b)$. Пусть φ — естественный гомоморфизм группы Γ на группу $\Gamma/\langle z\rangle = G$ и H — наибольшая выпуклая подгруппа л. у. группы Γ, $H \neq \Gamma$. Тогда $H \cap \langle z\rangle = E$ и $\varphi(H)$ — подгруппа G, изоморфная H. Из определения линейного порядка в группе Γ следует, что $\varphi(H)$ — выпуклое подмножество ц. у. множества G. Так как $\varphi(H)$ — подгруппа G, то по предложению 8 $\varphi(H)$ является θ-блоком некоторой выпуклой G-конгруэнции θ на G, откуда ввиду c-примитивности группы G имеем $\varphi(H) = G$ либо $\varphi(H) = E$. Если $\varphi(H) = G$ и α — точная правая грань множества $\varphi(\{h \in H \mid h \geq e\})$ в пополнении $\overline{G}$, то, очевидно, $G(\alpha) = \alpha$, что противоречит предположению. Следовательно, $\varphi(H) = E$ и $H = E$. Таким образом, л. у. группа Γ не имеет собственных выпуклых подгрупп и, следовательно, является архимедовой группой [3], откуда по теореме О. Гёльдера [8] Γ изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел с естественным порядком. Поэтому группа $G = \Gamma/\langle z\rangle$ изоморфна подгруппе ц. у. группы $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

§ 6. Транзитивные c-примитивные cl-группы автоморфизмов

Группа $G \neq E$ автоморфизмов ц. у. множества X называется 2-*транзитивной*, если для любых элементов $x \neq y$ и $u \neq v$ множества X найдется элемент $g \in G$ такой, что $g(x) = u$ и $g(y) = v$. Если группа G 2-транзитивна, то для любого элемента $a \in X$ стабилизатор $\mathrm{St}_G(a)$ действует транзитивно на множестве $X \backslash \{a\}$. Несложно заметить, что 2-транзитивная группа автоморфизмов ц. у. множества c-примитивна и не имеет неподвижных точек.

Предложение 11. *Если G — транзитивная cl-группа автоморфизмов ц. у. множества X, то для любых элементов $a \in \overline{X}$, $x \in X$ множество $X(a, x) =$*

$\mathrm{St}_G(a)(x)$ *выпукло в* X. *Для любых элементов* $x, y \in X$ *множества* $X(a,x)$, $X(a,y)$ *либо не пересекаются, либо совпадают. Для любого элемента* $g \in G$ *выполнено* $g(X(a,x)) = X(g(a), g(x))$.

Доказательство. Пусть G — транзитивная cl-группа автоморфизмов ц. у. множества X и $a \in \overline{X}$, $x \in X$. Если $X(a,x) = \{x\}$ либо $X(a,x) = X$, то множество $X(a,x)$ выпукло в X. Пусть $X(a,x) \neq \{x\}$ и $X(a,x) \neq X$. Тогда $a \notin X(a,x)$. Покажем, что для любых элементов $x_1, x_2 \in X(a,x)$, $y \in X$ из отношения $C(a, x_1, y, x_2)$ следует включение $y \in X(a,x)$, откуда будет вытекать выпуклость множества $X(a,x)$. Так как группа G транзитивна на X и группа $\mathrm{St}_G(a)$ транзитивна на $X(a,x)$, то найдутся элементы $g \in G$, $f \in \mathrm{St}_G(a)$ такие, что $y = g(x_1)$ и $x_2 = f(x_1)$. Рассмотрим два возможных случая: (a) $g(a) \in \overline{[\![a,y]\!]}$; (b) $g(a) \notin \overline{[\![a,y]\!]}$.

(a) Пусть $g(a) \in \overline{[\![a,y]\!]}$. Если $g(a) = a$, то $g \in \mathrm{St}_G(a)$, откуда $y = g(x_1) \in X(a,x_1) = X(a,x)$. Если $g(a) \neq a$, то ввиду соотношений $g(a) \neq g(x_1) = y$ имеем $C(a, g(a), y)$, откуда ввиду $C(a, x_1, y, x_2)$ по предложению 1 получаем $C(a, g(a), y, x_2)$ и $C(a, g(a), g(x_1), f(x_1))$. Из последнего отношения имеем $C(a, gf^{-1}(a),\ gf^{-1}(f(x_1)), f(x_1))$, откуда по предложению 6 получаем

$$\overline{[\![a, gf^{-1}(a)]\!]} \cap \overline{X}_{gf^{-1}} = \varnothing, \quad \overline{[\![f(x_1), gf^{-1}(f(x_1))]\!]} \cap \overline{X}_{gf^{-1}} \neq \varnothing.$$

Следовательно, $gf^{-1} \wedge e \in \mathrm{St}_G(a)$ и

$$y = g(x_1) = gf^{-1}(f(x_1)) = (gf^{-1} \wedge e)(f(x_1)) = (gf^{-1} \wedge e)(x_2) \in X(a, x_2) = X(a,x).$$

(b) Пусть $g(a) \notin \overline{[\![a,y]\!]}$. Тогда имеем $C(a, y, g(a))$, откуда ввиду $C(a, x_1, y)$ и $y = g(x_1)$ по предложению 1 получаем $C(a, x_1, g(x_1), g(a))$ и $C(x_1, g(x_1), g(a), a)$. Из последнего отношения по предложению 6 вытекает $\overline{[\![x_1, g(x_1)]\!]} \cap \overline{X_g} = \varnothing$ и $\overline{[\![a, g(a)]\!]} \cap \overline{X_g} \neq \varnothing$, откуда $g \vee e \in \mathrm{St}_G(a)$ и $y = g(x_1) = (g \vee e)(x_1) \in X(a, x_1) = X(a,x)$.

Таким образом, множества $X(a,x)$, $a \in \overline{X}$, $x \in X$, выпуклы в X. Так как $X(a,x)$, $X(a,y)$ — орбиты группы $\mathrm{St}_G(a)$, они либо не пересекаются, либо совпадают. Поскольку $\mathrm{St}_G(g(a)) = g\,\mathrm{St}_G(a) g^{-1}$, $g \in G$, то

$$\begin{aligned} g(X(a,x)) = g(\mathrm{St}_G(a)(x)) &= (g\,\mathrm{St}_G(a) g^{-1})(g(x)) \\ &= \mathrm{St}_G(g(a))(g(x)) = X(g(a), g(x)). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Лемма 1. *Если* G *— транзитивная нерегулярная c-примитивная группа автоморфизмов ц. у. множества* X, *то* $(\!(x,y)\!) \neq \varnothing$ *для любых элементов* $x, y \in \overline{X}$, $x \neq y$.

Доказательство леммы очевидно.

Лемма 2. *Пусть* G *— транзитивная нерегулярная c-примитивная* cl*-группа автоморфизмов ц. у. множества* X, *не являющаяся 2-транзитивной группой и не имеющая неподвижных точек на* $\overline{X}$. *Тогда для любого элемента* $a \in X$ *существует элемент* $b \in X$, $b \neq a$, *такой, что* a *является точной левой гранью выпуклого ограниченного подмножества* $X_1(a) = X(a,b)$ *ц. у. множества* X.

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы и $a \in X$. Так как G — группа с неединичными стабилизаторами точек, найдется элемент $x \in X$, $x \neq a$, такой, что $X(a,x) = \mathrm{St}_G(a)(x) \neq \{x\}$. Поскольку G не является 2-транзитивной группой, то $X(a,x) \subseteq X \backslash \{a\}$ и $X(a,x) \neq X \backslash \{a\}$, откуда по предложению 11 и лемме 1 $X(a,x)$ — выпуклое ограниченное подмножество ц. у. множества X. Пусть α — точная левая грань и β — точная правая грань множества $X(a,x)$ в $\overline{X}$. Тогда имеет место $C(\alpha,x,\beta)$. Так как группа G транзитивна, найдется элемент $g \in G$ такой, что $g(x)=a$. Тогда $g(\alpha)$ — точная левая грань и $g(\beta)$ — точная правая грань выпуклого множества $g(X(a,x))$ и $C(g(\alpha),a,g(\beta))$. Рассмотрим множество $\mathrm{St}_G(a)(\beta_1)$, где $\beta_1 = g(\beta)$. Покажем, что если $C(a,y,\beta_1)$, $y \in X$, то найдется элемент $s \in \mathrm{St}_G(a)$ такой, что $s(\beta_1) \in \overline{(\!(a,y]\!]}$. По теореме 1 ввиду c-примитивности группы G найдется элемент $h \in G$ такой, что $h(\beta) \in \overline{[\![a,y]\!]}$. Если $h(\beta)=a$, то $\beta \in X$ и, следовательно, найдется элемент $h_1 \in G$ такой, что $h_1(\beta)=y$. Поэтому можно считать, что элемент $h \in G$ удовлетворяет условию $h(\beta) \in \overline{(\!(a,y]\!]}$. Так как $h(\beta) \neq a$ и $h(x) \neq h(\beta)$, возможны три случая: (a) $h(x)=a$; (b) $C(a,h(x),h(\beta))$; (c) $C(h(x),a,h(\beta))$.

Рассмотрим случай (a). Пусть $h(x)=a$. Так как $g(x)=a$, то $x=g^{-1}(a)=h^{-1}(a)$, откуда $s=hg^{-1} \in \mathrm{St}_G(a)$ и

$$s(\beta_1) = hg^{-1}(\beta_1) = hg^{-1}(g(\beta)) = h(\beta) \in \overline{(\!(a,y]\!]}.$$

Рассмотрим случай (b). Пусть $C(a,h(x),h(\beta))$. Тогда ввиду соотношений $h(\beta) \in \overline{(\!(a,y]\!]}$ и $C(a,y,\beta_1)$ получаем $C(a,h(x),h(\beta),\beta_1)$. Из последнего отношения следует $C(a,hg^{-1}(a),hg^{-1}(\beta_1),\beta_1)$, откуда по предложению 6 получаем $\overline{[\![a,hg^{-1}(a)]\!]} \cap \overline{X}_{hg^{-1}} = \varnothing$ и $\overline{[\![\beta_1,hg^{-1}(\beta_1)]\!]} \cap \overline{X}_{hg^{-1}} \neq \varnothing$. Следовательно, $s = hg^{-1} \wedge e \in \mathrm{St}_G(a)$ и $s(\beta_1) = hg^{-1}(\beta_1) = h(\beta) \in \overline{(\!(a,y]\!]}$.

Рассмотрим случай (c). Пусть $C(h(x),a,h(\beta))$. Тогда согласно C5 имеем $C(x,h^{-1}(a),\beta)$. По лемме 1 найдется элемент $x_1 \in X$ такой, что $C(x,h^{-1}(a),x_1,\beta)$. Так как группа $\mathrm{St}_G(a)$ действует транзитивно на множестве $X(a,x)=(\alpha,\beta)$, найдется элемент $r \in \mathrm{St}_G(a)$ такой, что $r(x)=x_1$. Заметим, что $r(\beta)=\beta$. Из отношения $C(h^{-1}(a),r(x),\beta)$ по C5 следует $C(a,hr(x),h(\beta))$, откуда ввиду соотношений $h(\beta) \in \overline{(\!(a,y]\!]}$ и $C(a,y,\beta_1)$ получаем $C(a,hr(x),h(\beta),\beta_1)$. Следовательно, ввиду равенств

$$hr(x) = hrg^{-1}(a), \quad h(\beta) = hr(\beta) = hrg^{-1}(g(\beta)) = hrg^{-1}(\beta_1)$$

имеем $C(a,hrg^{-1}(a),\, hrg^{-1}(\beta_1),\beta_1)$, откуда по предложению 6 выводим

$$\overline{[\![a,hrg^{-1}(a)]\!]} \cap \overline{X}_{hrg^{-1}} = \varnothing, \quad \overline{[\![\beta_1,hrg^{-1}(\beta_1)]\!]} \cap \overline{X}_{hrg^{-1}} \neq \varnothing.$$

Поэтому $s = hrg^{-1} \wedge e \in \mathrm{St}_G(a)$ и

$$s(\beta_1) = hrg^{-1}(\beta_1) = hrg^{-1}(g(\beta)) = h(\beta) \in \overline{(\!(a,y]\!]}.$$

Следовательно, для любого элемента $y \in X$ такого, что $C(a,y,\beta_1)$, имеем $s(\beta_1) \in \overline{(\!(a,y]\!]}$ для некоторого элемента $s \in \mathrm{St}_G(a)$. По лемме 1 найдется элемент $b \in X$ такой, что $C(a,b,\beta_1)$. Используя доказанное выше свойство, несложно показать, что элемент a является точной левой гранью выпуклого ограниченного множества $X(a,b)$. Лемма доказана.

Если G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, удовлетворяющая условию леммы 2, и $x \in X$, то пусть x^* — точная правая грань множества $X_1(x)$. По лемме 2 и предложению 11 получаем

C19) для любого элемента $x \in X$ будет $x^* \neq x$ и $X_1(x) = (\!(x,x^*)\!) = \mathrm{St}_G(x)(y)$ для некоторого элемента $y \in X$;

C20) $(g(x))^* = g(x^*)$ для любых элементов $x \in X$, $g \in G$.

Лемма 3. *Если G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, удовлетворяющая условию леммы 2, то $\mathrm{St}_G(a^*) = \mathrm{St}_G(a)$ для любого элемента $a \in X$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы и $a \in X$, $X_1(a) = \mathrm{St}_G(a)(b)$, $b \in X$. Так как $\mathrm{St}_G(a)(X_1(a)) = X_1(a)$ и a^* — точная правая грань $X_1(a)$, то $\mathrm{St}_G(a)(a^*) = a^*$, откуда $\mathrm{St}_G(a) \subseteq \mathrm{St}_G(a^*)$. Рассмотрим множество $T = \mathrm{St}_G(a^*)(b)$. Очевидно, что $X_1(a) \subseteq T$. По предложению 11 множество T выпукло в X. Если $T = X_1(a)$, то имеем $\mathrm{St}_G(a^*)(a) = a$, поэтому $\mathrm{St}_G(a^*) \subseteq \mathrm{St}_G(a)$ и, следовательно, $\mathrm{St}_G(a^*) = \mathrm{St}_G(a)$. Предположим, что $T \neq X_1(a)$. Тогда $\mathrm{St}_G(a^*) \neq \mathrm{St}_G(a)$ и, очевидно, $a \in T$, $T = \mathrm{St}_G(a^*)(a)$. Если $g \in G$ и $g(a) \in T$, то $g(a) = s(a)$ для некоторого элемента $s \in \mathrm{St}_G(a^*)$. Тем самым $s^{-1}g(a) = a$ и $h = s^{-1}g \in \mathrm{St}_G(a) \subseteq \mathrm{St}_G(a^*)$. Так как $h, s \in \mathrm{St}_G(a^*)$, то $g \in \mathrm{St}_G(a^*)$. Следовательно, $g(T) = T$. Аналогично доказывается, что если $g \in G$ и $g(a) \notin T$, то $g(T) \cap T = \varnothing$. Таким образом, для любого элемента $g \in G$ либо $g(T) = T$, либо $g(T) \cap T = \varnothing$, откуда по предложению 8 множество T является θ-блоком некоторой выпуклой G-конгруэнции θ на ц. у. множестве X. Поскольку $X_1(a)$ — не одноэлементное множество, то T также не одноэлементное множество. Имеем $T \neq X$. Действительно, если $T = X$, то для любого элемента $g \in G$ будет $g(a) \in T$, откуда аналогично вышеизложенному получаем $g \in \mathrm{St}_G(a^*)$. Следовательно, $G = \mathrm{St}_G(a^*)$, что противоречит условию леммы. Таким образом, θ — собственная выпуклая G-конгруэнция на X, что противоречит c-примитивности группы G. Значит, $T = X_1(a)$ и $\mathrm{St}_G(a^*) = \mathrm{St}_G(a)$.

Лемма 4. *Если G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, удовлетворяющая условию леммы 2, то для любых элементов $a, b, c \in X$ справедливы утверждения*

(1) *если $a \neq b$, то $a^* \neq b^*$;*
(2) *если $C(a, a^*, b)$, то $C(b, b^*, a^*)$,*
(3) *если $C(a, b, a^*)$, то $C(b, a^*, b^*)$,*
(4) *если $C(a, b, c)$, то $C(a^*, b^*, c^*)$.*

Доказательство. (1). Пусть выполнено условие леммы и $a, b \in X$, $a \neq b$. Предположим, что $a^* = b^*$. Тогда по лемме 2 $X_1(a) \neq X_1(b)$, $X_1(b) \subseteq X_1(a)$ либо $X_1(a) \subseteq X_1(b)$. Пусть для определенности $X_1(b) \subseteq X_1(a)$. Тогда $b \in X_1(a)$ и, следовательно, $X_1(a) = \mathrm{St}_G(a)(b)$. По лемме 3 из равенства $a^* = b^*$ следует равенство $\mathrm{St}_G(a) = \mathrm{St}_G(b)$, откуда $X_1(a) = \mathrm{St}_G(a)(b) = \mathrm{St}_G(b)(b) = \{b\}$, что противоречит лемме 2. Следовательно, $a^* \neq b^*$.

(2) Пусть выполнено условие леммы и $C(a, a^*, b)$ $a, b \in X$. По п. (1) имеем $a^* \neq b^*$, тем самым $b \neq b^* \neq a^* \neq b$. Предположим, что имеет место $C(b, a^*, b^*)$. Тогда ввиду $C(a, a^*, b)$ по предложению 1 получаем $C(b, a, a^*, b^*)$, откуда ввиду транзитивности группы G и по C20 имеем $C(g(a), a, a^*, g(a^*))$ для некоторого элемента $g \in G$. Следовательно, по предложению 6

$$\overline{[\![a^*, g(a^*)]\!]} \cap \overline{X}_g = \varnothing, \quad \overline{[\![a, g(a)]\!]} \cap \overline{X}_g \neq \varnothing.$$

Таким образом, $(g \wedge e)(a^*) = a^*$ и $(g \wedge e)(a) = g(a) = b$. Поэтому по C20

$$b^* = ((g \wedge e)(a))^* = (g \wedge e)(a^*) = a^*,$$

что противоречит полученному выше неравенству $a^* \neq b^*$. Следовательно, имеет место $C(b, b^*, a^*)$.

(3) Доказательство утверждения (3) аналогично доказательству утверждения (2).

(4). Пусть выполнено условие леммы и $C(a,b,c)$, $a,b,c\in X$. Тогда по п. (1) имеем $a^*\neq b^*\neq c^*\neq a^*$. Если $a^*=b$, то по п. (2) из $C(a,a^*,c)$ последовательно получаем $C(c,c^*,a^*)$, $C(c,c^*,b)$, $C(b,b^*,c^*)$ и $C(a^*,b^*,c^*)$. Аналогично имеем $C(a^*,b^*,c^*)$ при $a^*=c$. Ввиду цикличности отношения C из доказанного выше следует справедливость отношения $C(a^*,b^*,c^*)$ для случаев $b^*=c$, $b^*=a$, $c^*=a$, $c^*=b$. Если $C(a,b,c,a^*)$, то последовательно получаем $C(b,c,a^*)$, $C(a,b,a^*)$, $C(b,a^*,b^*)$, $C(c,a^*,b^*)$, $C(b,c,b^*)$, $C(c,b^*,c^*)$ и $C(a^*,b^*,c^*)$. Так же имеем $C(a^*,b^*,c^*)$ в случаях $C(a,b,a^*,c,b^*)$; $C(a,b,a^*,b^*,c)$; $C(a,b^*,b,a^*,c)$; $C(a,a^*,b,c,b^*)$; $C(a,a^*,b,b^*,c)$; $C(a,b^*,a^*,b,c)$. Нетрудно заметить, что отношения $C(a,b,b^*,a^*,c)$, $C(a,a^*,b^*,b,c)$ не имеют места. Ввиду цикличности отношения C из рассмотренных выше случаев вытекает справедливость утверждения (4).

Лемма 5. *Если G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, удовлетворяющая условию леммы 2, то для любого элемента $z\in\overline{X}$ найдутся элементы $a,b\in X$ такие, что $z\in\overline{\llparenthesis a,a^*\rrparenthesis}$ и $z\notin\overline{\llbracket b,b^*\rrbracket}$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы и $z\in\overline{X}$. Пусть $c\in X$. Так как по C19 $c\neq c^*$, согласно условию леммы, теореме 1 и лемме 1 найдется элемент $g\in G$ такой, что $g(z)\in\overline{\llparenthesis c,c^*\rrparenthesis}$, откуда по C20 получаем

$$z\in g^{-1}(\overline{\llparenthesis c,c^*\rrparenthesis})=\overline{\llparenthesis g^{-1}(c),g^{-1}(c^*)\rrparenthesis}=\overline{\llparenthesis g^{-1}(c),(g^{-1}(c))^*\rrparenthesis}=\overline{\llparenthesis a,a^*\rrparenthesis},$$

где $a=g^{-1}(c)\in X$.

Предположим, что для любого элемента $y\in X$ будет $z\in\overline{\llbracket y,y^*\rrbracket}$. Тогда по C20 для любых элементов $g\in G$, $y\in X$ имеем $g(z)\in g(\overline{\llbracket y,y^*\rrbracket})=\overline{\llbracket g(y),(g(y))^*\rrbracket}$, откуда ввиду транзитивности группы G для фиксированного элемента $c\in X$ имеет место включение $g(z)\in\overline{\llbracket c,c^*\rrbracket}$ для любого $g\in G$. Следовательно, $g(z)\notin\overline{\llparenthesis c^*,c\rrparenthesis}$ для любого $g\in G$, что по лемме 1 и теореме 1 противоречит условию леммы. Следовательно, найдется элемент $b\in X$ такой, что $z\notin\overline{\llbracket b,b^*\rrbracket}$.

Лемма 6. *Если G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, удовлетворяющая условию леммы 2, то для любого элемента $z\in\overline{X}$ множество $K(z)=\{b\in X\mid z\notin\overline{\llbracket b,b^*\rrbracket}\}$ является непустым выпуклым ограниченным подмножеством ц. у. множества X и z — точная левая грань $K(z)$, $z\notin K(z)$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы и $z\in\overline{X}$. По лемме 5 $K(z)\neq\varnothing$. По определению $K(z)$ имеем $z\notin K(z)$. Покажем, что если $x\in K(z)$, то $\llparenthesis z,x\rrbracket\subseteq K(z)$, откуда будет следовать выпуклость множества $K(z)$ в X. Пусть $y\in\llparenthesis z,x\rrbracket$, $x\in K(z)$, $y\neq x$. Тогда имеем $C(x,z,y)$. Так как $x\in K(z)$, то $z\notin\overline{\llbracket x,x^*\rrbracket}$, тем самым имеем $C(x,x^*,z)$. По предложению 1, из полученных отношений вытекает $C(x,x^*,z,y)$, в частности, $C(x,x^*,y)$ и $C(y,x^*,z)$. Из $C(x,x^*,y)$ по лемме 4 следует $C(y,y^*,x^*)$, откуда ввиду $C(y,x^*,z)$ получаем $C(y,y^*,z)$, и, следовательно, $z\notin\overline{\llbracket y,y^*\rrbracket}$ и $y\in K(z)$. Таким образом, множество $K(z)$ выпукло в X. По лемме 5 найдется элемент $a\in X$, $a\neq z$ такой, что $a\notin K(z)$. Итак, по лемме 1 $K(z)$ — выпуклое ограниченное подмножество X и z — его точная левая грань.

Лемма 7. *Пусть G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, удовлетворяющая условию леммы 2, и $H_x(z)=\bigcup\llbracket y,y^*\rrbracket$, где y пробегает интервал $\llbracket x,z\rrbracket$, $x\in X$, $z\in\overline{X}$. Тогда найдется элемент $a\in X$ такой, что $H_a(z)$ является выпуклым ограниченным подмножеством X, причем если $p(z)$ — точная правая грань множества $H_a(z)$, то $p(z)\neq z$ и для любого элемента $x\in\llparenthesis p(z),z\rrbracket$ $H_x(z)$ —*

выпуклое ограниченное подмножество X и элементы x, $p(z)$ — точные левая и правая грани соответственно множества $H_x(z)$.

Доказательство. Пусть выполнено условие леммы и $z \in \overline{X}$, $x \in X$. Очевидно, что $H_x(z) = \bigcup \llbracket x, y^* \rrbracket$, где y пробегает интервал $\llbracket x, z \rrbracket$, откуда, в частности, следует, что $H_x(z)$ — выпуклое множество для любого элемента $x \in X$. По лемме 5 найдется элемент $b \in X$ такой, что $z \notin \overline{\llbracket b, b^* \rrbracket}$, т. е. $C(b, b^*, z)$. По лемме 1 найдется элемент $a \in X$ такой, что $C(b, b^*, a, z)$. Для любого $y \in \llbracket a, z \rrbracket$ имеем $C(b, b^*, y)$, откуда по лемме 4 получаем $C(y, y^*, b)$ и, следовательно, $\llbracket y, y^* \rrbracket \subseteq \llbracket a, b^* \rrbracket$. Поэтому $H_a(z) \subseteq \llbracket a, b^* \rrbracket$ и, значит, $H_a(z)$ — выпуклое ограниченное подмножество X. Пусть $p(z)$ — точная правая грань множества $H_a(z)$. Так как, очевидно, a — точная левая грань множества $H_a(z)$, то $H_a(z) \subseteq \llbracket a, p(z) \rrbracket$. Предположим, что $p(z) = z$. Тогда $H_a(z) \subseteq \llbracket a, z \rrbracket$ и ввиду С19 $a \neq z$. По лемме 5 найдется элемент $b \in X$ такой, что $z \in \overline{(\!(b, b^*)\!)}$. Если $b \in \llbracket a, z \rrbracket$, то $\llbracket b, b^* \rrbracket \subseteq H_a(z) \subseteq \llbracket a, z \rrbracket$, что противоречит выбору элемента b. Если $b \notin \llbracket a, z \rrbracket$, то имеем $C(b, a, z)$, откуда ввиду $z \in \overline{(\!(b, b^*)\!)}$, т. е. $C(b, z, b^*)$, получаем $C(b, a, z, b^*)$. Следовательно, в силу $\llbracket a, a^* \rrbracket \subseteq H_a(z) \subseteq \llbracket a, z \rrbracket$ имеем $C(b, a, a^*, b^*)$, в частности, $C(a, a^*, b^*)$ и $C(b, a, b^*)$. По лемме 4 из второго отношения следует $C(a, b^*, a^*)$, что противоречит первому отношению. Таким образом, $p(z) \neq z$.

Несложные рассуждения с использованием леммы 4 показывают, что для любого элемента $x \in (\!(p(z), z \rrbracket$ множество $H_x(z)$ — выпуклое ограниченное подмножество X с точными левой x и правой $p(z)$ гранями. Лемма доказана.

Пусть G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, удовлетворяющая условию леммы 2. Тогда по лемме 7 любому элементу $z \in \overline{X}$ соответствует элемент $p(z) \in \overline{X}$, где $p(z)$ — точная правая грань выпуклого ограниченного множества $H_x(z)$ для любого $x \in (\!(p(z), z \rrbracket$. Очевидно, что $H_y(z) = X$ для любого $y \in (\!(z, p(z) \rrbracket$. Следовательно, справедливо

С21) соответствие $z \to p(z)$, где $p(z)$ — точная правая грань выпуклого ограниченного множества $H_a(z)$ для некоторого элемента $a \in X$, является отображением множества $\overline{X}$ в $\overline{X}$.

Заметим, что если $x \in X$, то $H_x(x) = \llbracket x, x^* \rrbracket$, откуда

С22) $p(x) = x^*$ для любого элемента $x \in X$.

Теорема 5. *Если G — транзитивная нерегулярная c-примитивная cl-группа автоморфизмов ц. у. множества X, не являющаяся 2-транзитивной группой и не имеющая неподвижных точек на $\overline{X}$, то G является c-периодической группой автоморфизмов с периодом конечного порядка.*

Доказательство. Пусть G — группа автоморфизмов ц. у. множества X, удовлетворяющая условию теоремы. Покажем, что отображение $p : \overline{X} \to \overline{X}$, определенное условием С21, является периодом группы G.

Установим, что $p(u) \neq p(z)$ для любых элементов u, $z \in \overline{X}$, $u \neq z$. Предположим противное, и пусть $p(u) = p(z)$ для некоторых $u, z \in \overline{X}$, $u \neq z$. По лемме 7 имеем $u \neq z \neq p(z) = p(u) \neq u$. Пусть для определенности $C(u, z, p(z))$. По леммам 1 и 7 найдутся элементы $a, b \in X$ такие, что $H_a(u), H_b(z)$ — выпуклые ограниченные подмножества X и $a \in (\!(p(u), u \rrbracket$, $b \in (\!(u, z \rrbracket$. По лемме 1 найдется элемент $c \in X$ такой, что $c \in (\!(u, b)\!)$. Тогда для любого $y \in \llbracket a, u \rrbracket$ имеем $C(y, c, b)$, тем самым по лемме 4 получаем $C(y^*, c^*, b^*)$. Так как $a \in (\!(p(z), z)\!)$, $y, c, b \in \llbracket a, z \rrbracket$ и $C(y^*, c^*, b^*)$, то по лемме 7 имеем $\llbracket a, y^* \rrbracket \subseteq \llbracket a, c^* \rrbracket \subseteq \llbracket a, b^* \rrbracket \subseteq \llbracket a, p(z) \rrbracket$, откуда $H_a(u) \subseteq \llbracket a, c^* \rrbracket \subseteq \llbracket a, b^* \rrbracket \subseteq \llbracket a, p(z) \rrbracket$. Поэтому ввиду $c^* \neq b^*$ имеем $p(u) \neq p(z)$.

Получили противоречие. Следовательно, $p(u) \neq p(z)$ для любых элементов $u, z \in \overline{X}$, $u \neq z$.

Покажем, что для любого элемента $z \in \overline{X}$ найдется элемент $u \in \overline{X}$ такой, что $p(u) = z$. По лемме 6 $K(z)$ — непустое выпуклое ограниченное подмножество X, и если u — его точная правая грань, то $u \neq z$ и $K(z) \subseteq (\!(z, u]\!]$. По леммам 1 и 7 найдется элемент $a \in X$ такой, что $C(a, u, z)$ и $H_a(u)$ — выпуклое ограниченное подмножество X. Тогда по C21 $p(u)$ — точная правая грань $H_a(u)$. По лемме 7 и способу построения множеств $K(z), H(u)$ имеем $p(u) \in \overline{(\!(u, z]\!]}$. Предположим, что $p(u) \neq z$. Тогда имеем $C(u, p(u), z)$ и ввиду $C(a, u, z)$ получаем $C(a, u, p(u), z)$. По условию теоремы, лемме 1 и теореме 1 найдется элемент $g \in G$ такой, что $C(p(u), g(a^*), z)$. Тогда получаем $C(a, u, p(u), g(a^*), z)$. Если $g(a) \in (\!(g(a^*), u]\!]$, то имеем $g(a) \in (\!(p(u), u]\!]$, откуда по C20 и лемме 7

$$[\![g(a), g(a^*)]\!] = [\![g(a), (g(a))^*]\!] \subseteq H_{g(a)}(u) \subseteq [\![g(a), p(u)]\!],$$

что противоречит полученному выше отношению. Если $g(a) \in (\!(u, g(a^*)]\!]$, то имеем $z \notin \overline{[\![g(a), g(a^*)]\!]} = \overline{[\![g(a), (g(a))^*]\!]}$, откуда $g(a) \in K(z) \subseteq (\!(z, u]\!]$, что противоречит предположению. Следовательно, $p(u) = z$. Из изложенного выше вытекает, что p — подстановка множества $\overline{X}$.

Покажем, что p — автоморфизм ц. у. множества $\overline{X}$. Пусть $x, y, z \in \overline{X}$ и $C(x, y, z)$. По леммам 1 и 7 найдутся элементы $a, b, c \in X$ такие, что $a \in (\!(z, x]\!]$, $b \in (\!(x, y]\!]$, $c \in (\!(y, z]\!]$ и $H_a(x)$, $H_b(y)$, $H_c(z)$ — выпуклые ограниченные подмножества X. Если $t \in [\![a, x]\!]$, $t \neq a$, то $C(a, t, b)$ и по лемме 4 справедливо $C(a^*, t^*, b^*)$, т. е. $[\![a^*, t^*]\!] \subseteq [\![a^*, b^*]\!]$. Отсюда ввиду равенства $H_a(x) = \bigcup\limits_{t \in [\![a, x]\!]} [\![a^*, t^*]\!] \cup [\![a, a^*]\!]$ получаем, что $p(x) \in \overline{[\![a^*, b^*]\!]}$. Аналогично приходим к включениям

$$p(y) \in \overline{[\![b^*, c^*]\!]}, \quad p(z) \in \overline{[\![c^*, a^*]\!]},$$

откуда ввиду $p(x) \neq p(y) \neq p(z) \neq p(x)$ имеем $C(p(x), p(y), p(z))$. Следовательно, p — автоморфизм ц. у. множества $\overline{X}$.

Так как множество $N = \bigcup\limits_{n \in Z} [\![p^n(a), p^{n+1}(a)]\!]$ выпукло в X, $p(N) = N$, и по лемме 7 $p(z) \neq z$ для любого $z \in \overline{X}$, то $N = X$. Таким образом, ввиду выполнения условий C22, C20, C19 p — период группы G. Покажем, что автоморфизм $p \in A(\overline{X})$ имеет конечный порядок. Несложные рассуждения показывают, что $p^k(a) \notin \overline{(\!(p^n(a), p^{n+1}(a))\!)}$ для любых целых чисел k, n. Поэтому если $p^n(a) \neq p^m(a)$ для любых целых чисел $n \neq m$, то имеет место $C(p^{-m}(a), \ldots, p^{-1}(a), a, p(a), \ldots, p^n(a))$ для любых целых чисел $m, n \geq 1$. Тем самым найдется элемент $\alpha \in \overline{X}$, для которого $p(\alpha) = \alpha$, что по лемме 7 противоречит условию теоремы. Значит, $p^s(a) = a$ для некоторого целого числа $s > 1$. В силу C20 и C21 для любого элемента $g \in G$ имеем $p^s(g(a)) = g(p^s(a)) = g(a)$, откуда ввиду транзитивности группы G получаем $p^s(x) = x$ для любого элемента $x \in X$ и, следовательно, $p^s(z) = z$ для любого элемента $z \in \overline{X}$. Таким образом, автоморфизм p ц. у. множества $\overline{X}$ имеет конечный порядок. Теорема доказана.

Из теорем 3–5 вытекает

Теорема 6. *Транзитивная c-примитивная cl-группа G автоморфизмов циклически упорядоченного множества $\langle X, C\rangle$ является группой одного из следующих видов:*

(1) *G индуцирована левым регулярным представлением архимедовой линейно упорядоченной группы G;*

(2) *G индуцирована o-2-транзитивной решеточно упорядоченной группой G автоморфизмов линейно упорядоченного множества;*

(3) *G — c-периодическая группа автоморфизмов с периодом бесконечного порядка, индуцированная решеточно упорядоченной o-периодической группой G автоморфизмов линейно упорядоченного множества;*

(4) *G изоморфна левому регулярному представлению подгруппы циклически упорядоченной группы $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$;*

(5) *G — 2-транзитивная группа автоморфизмов;*

(6) *G — c-периодическая группа автоморфизмов с периодом конечного порядка.*

Отметим, что так же, как для o-периодических l-групп автоморфизмов л. у. множеств [3], доказывается, что для группы G видов (3), (5), (6) теоремы 6 справедливо утверждение: стабилизатор $\mathrm{St}_G(a)$ в G любой точки $a \in X$ действует точно на каждой своей орбите $X(a, x) \neq \{x\}$ и является o-2-транзитивной непатологической решеточно упорядоченной группой автоморфизмов линейно упорядоченного множества $\langle X(a, x), \leq_a \rangle$.

Если G — транзитивная группа автоморфизмов ц. у. множества $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, то ввиду равенства $\overline{\overline{\mathbb{T}}} = \mathbb{T}$ по теореме 1 G является c-примитивной группой, откуда получаем

Следствие. *Транзитивная cl-группа G автоморфизмов ц. у. множества $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ c-примитивна и является группой одного из следующих видов:*

(1) *G изоморфна левому регулярному представлению циклически упорядоченной группы $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$;*

(2) *G — 2-транзитивная группа автоморфизмов;*

(3) *G — c-периодическая группа автоморфизмов с периодом конечного порядка.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rieger L. S.* On the ordered and cyclically ordered groups. I–III // Věstnik Král. České Spol. Nauk. 1946. N 6. P. 1–31; 1947. N 1. P. 1–33; 1948. N 1. P. 1–26.
2. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.
3. *Копытов В. М.* Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
4. *Holland W. Ch.* Transitive lattice-ordered groups // Math. Z. 1965. Bd 87, N 3. S. 420–434.
5. *McCleary S. H.* *O*-primitive ordered permutation groups // Pacific J. Math. 1972. V. 40, N 2. P. 349–372.
6. *McCleary S. H.* *O*-primitive ordered permutation groups. II // Pacific J. Math. 1973. V. 49, N 2. P. 431–445.
7. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1972.
8. *Hölder O.* Die Axiome Quantität und die Lehre vom Mass // Ber. Verh. Sächs. Wiss. Leipzig, Math.-Phis. C1. 1901. Bd 53. S. 1–64.

Статья поступила 4 апреля 2000 г.

г. Петрозаводск
Институт прикладных математических исследований Кар. НЦ РАН
tararin@krc.karelia.ru