Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 513.77

РАДИУС НАКРЫТИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ И КРАТНОСТЬ НАКРЫТИЯ

В. И. Семенов

Аннотация: Радиус накрытия отображения рассматривается как инструмент, с помощью которого описываются топологические свойства отображения. Библиогр. 11.

Пусть непрерывное дифференцируемое почти всюду отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, где U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$, $p \geq 1$, и является изолированным открытым отображением. Для отображения f определим его глобальное наименьшее искажение на сфере радиуса r с центром в точке a как радиус накрытия

$$l_f(a, r) = \min_{|\mu - a| = r} |f(\mu) - f(a)|.$$

В работе [1] автором показана важность этой геометрической характеристики отображения для изучения его топологических свойств. В частности, там указаны оценки топологического индекса отображений при условии, что показатель суммируемости p равен n. В настоящей заметке это изучение продолжено в двух направлениях.

1. Без каких-либо предположений об открытости отображения выясняются условия его локальной инъективности (невырожденности дифференциала отображения).

2. Для открытых и изолированных отображений с показателем суммируемости $p > n$ выводится точная оценка топологического индекса отображения. Важными здесь являются условие квазиконформности и теорема о локальной структуре отображений с ограниченным искажением, доказанная Ю. Г. Решетняком [2, с. 160, теорема 7.3].

Введем обозначения. Как обычно, $B = B(a, r)$ — шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в точке a и радиусом r. Пусть измеримая функция $\omega = \omega(t)$ является приведенным модулем непрерывности в этом шаре, т. е.

$$\|f'(x) - f'(a)\| \leq \frac{l_f(a, r)}{r} \omega(|x - a|), \tag{1}$$

где $f'(x)$ — матрица Якоби в соответствующей точке и норма линейного преобразования определяется как наибольшее растяжение на единичной сфере.

Достаточные условия невырожденности дифференциала отображения. Основные результаты здесь описываются следующими утверждениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00763) и Международной Ассоциации при Европейском экономическом сообществе (грант I0170, программа INTAS).

Теорема 1. *Пусть непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, где U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$, $p \geq 1$, и удовлетворяет условиям:*

1) *отображение f абсолютно непрерывно и дифференцируемо почти всюду на каждом радиусе шара $\overline{B}(a,r) \subset U$;*

2) *$f(x) \neq f(a)$ при $x \neq a$ для точек этого шара;*

3) *отображение f дифференцируемо в точке a и $\int\limits_0^r \omega(t)\,dt < r$.*

Тогда $\det f'(a) \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть дифференцируемое отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, где U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, является изолированным отображением и в шаре $\overline{B}(a,r) \subset U$ удовлетворяет условию Гёльдера:*

$$\|f'(x) - f'(a)\| \leq m\frac{l_f(a,r)}{r}\left(\frac{|x-a|}{r}\right)^{\alpha}.$$

Если $m < \alpha + 1$, $\alpha > -1$, то $\det f'(a) \neq 0$. *Оценка для постоянной m наилучшая.*

Теорема 3. *Пусть аналитическая функция $f : \overline{B}(0,1) \to C$, заданная в замкнутом единичном круге, такова, что*

1) *$f(0) = 0$ и выполняется включение $\overline{B} \subset f(\overline{B})$;*

2) *внутри единичного круга с постоянной m выполняется неравенство $|f'(z)| \leq m < 2$.*

Тогда отображение f взаимно однозначно в некоторой окрестности центра единичного круга. Оценка для постоянной m наилучшая.

Доказательство теоремы 1. Предположим противное. Пусть $\det f'(a) = 0$. Тогда для некоторого единичного вектора e имеем $f'(a)e = 0$. Пусть $x_0 = a + re$. Для отображения $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ имеем представление

$$f(x_0) - f(a) = g(x_0) = \int\limits_{\gamma} dg,$$

где γ — ориентированный радиус шара $\overline{B}(a,r)$, оканчивающийся в точке x_0. Тогда

$$|f(x_0) - f(a)| \leq \int\limits_{\gamma} |dg| = \int\limits_0^r |(f'(a+te) - f'(a))e|\,dt \leq \frac{l_f(a,r)}{r}\int\limits_0^r \omega(t)\,dt < l_f(a,r).$$

Пришли к противоречию с определением величины $l_f(a,r)$, которая отлична от нуля в силу условия 2 и непрерывности отображения. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Утверждение следует из теоремы 1, поскольку здесь $\omega(t) = mr^{-\alpha}t^{\alpha}$. Аналитическая функция $f(z) = z^2$ показывает, что оценка постоянной m при показателе $\alpha = 1$ в точке $a = 0$ является наилучшей.

Доказательство теоремы 3. Предположим противное. Тогда $f'(0) = 0$ и по лемме Шварца внутри круга имеем $|f'(z)| \leq m|z|$. Если γ — ориентированный радиус круга $|z| \leq 1$, оканчивающийся в граничной точке z, то из условия 2 получаем

$$1 \leq |f(z)| = \left|\int\limits_{\gamma} f'(t)\,dt\right| \leq \int\limits_{\gamma} |f'(t)|\,ds \leq 0{,}5m < 1,$$

где ds — линейная мера. Пришли к противоречию, которое доказывает теорему 3.

Гипотеза о локальном гомеоморфизме и верхние оценки топологического индекса. Гипотеза о локальной гомеоморфности в пространстве отображений с ограниченным искажением (определение и свойства см. в [2]) и коэффициентом квазиконформности, близким к единице, без указания меры близости была доказана В. М. Гольдштейном [3]. Топологический индекс и внутренний коэффициент квазиконформности впервые были связаны Ю. Г. Решетняком ([4], см. также [2]) в теореме о локальной структуре отображения с ограниченным искажением. Чуть позже Е. А. Полецким [5] и О. Мартио [6], при некоторых ограничениях на множество точек ветвления отображения, указаны оценки для топологических индексов через внутренний коэффициент. Без каких-либо ограничений, касающихся множества точек ветвления, ряд оценок топологического индекса $j(a, f)$ (определение и свойства см. в [2]) через внутренний коэффициент дан автором в [1]. В связи с этим интерес представляют те классы сохраняющих ориентацию пространственных отображений с ограниченным искажением, для которых справедливо неравенство

$$j(a, f) \leq K_1(f), \tag{2}$$

где внутренний коэффициент $K_1(f)$ определяется как наименьшая постоянная K в неравенстве

$$\det f'(x) \leq K \min_{|\mu|=1} |f'(x)\mu|^n,$$

выполняющемся почти всюду. Полагаем, что $L_f(x, r) = \max\limits_{|\mu - x| = r} |f(\mu) - f(x)|$.

Теорема 4. *Пусть отображение с ограниченным искажением $f : U \to \mathbb{R}^n$, где U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, таково, что*

$$\lim_{r \to 0} \frac{L_f(a, r)}{l_f(a, r)} = 1.$$

Тогда топологический индекс $j(a, f)$ удовлетворяет неравенству (2).

Теорема 5. *Пусть отображение с ограниченным искажением $f : U \to \mathbb{R}^n$, где U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, локально однородно в точке a. Тогда топологический индекс $j(a, f)$ удовлетворяет неравенству* (2).

Определение локально однородного отображения дано в [7].

Теорема 6. *Пусть отображение с ограниченным искажением $f : U \to \mathbb{R}^n$, где U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, таково, что приведенный модуль непрерывности $\omega = \omega(t)$ из* (1) *удовлетворяет условию*

$$\int_0^r \omega^p(t) t^{p-1}\, dt < \left(\frac{p - n}{p - 1}\right)^{p-1} r^n,$$

где $p > n$. Тогда топологический индекс $j(a, f)$ удовлетворяет неравенству (2).

Доказательство теоремы 4. Пусть a — точка ветвления отображения f. Предположим противное. Рассмотрим семейство отображений

$$\left\{ g(x, t) = \frac{f(a + tx) - f(a)}{l_f(a, t)} \right\}_{0 < t \leq r}.$$

Тогда в замкнутом шаре $\overline{B}(0,1)$ это семейство равностепенно и равномерно непрерывно [2, теорема 9.3]. Пусть t_ν — сходящаяся к нулю последовательность, для которой отображения $g(x,t_\nu)$ сходятся равномерно к непостоянному отображению с ограниченным искажением h (см. доказательство леммы 10.1 из [2]). При этом $K_1(h) \leq K_1(f)$ (полунепрерывность коэффициента) и

$$j(0,h) = j(a,f) \geq 2 \tag{3}$$

(из свойств топологического индекса), т. е. 0 — точка ветвления отображения h. Отметим еще, что функция $\tau(x) = |h(x)|$ постоянна на каждой сфере $|x| = \rho$. Это следует из равенств

$$L_h(0,\rho) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{L_f(a,t_\nu,\rho)}{l_f(a,t_\nu)}, \quad l_h(0,\rho) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{l_f(a,t_\nu,\rho)}{l_f(a,t_\nu)}$$

и условия теоремы. Функция τ как функция радиуса ρ строго возрастает и на единичной сфере равна единице. Пусть

$$\lambda(\rho) = \tau(\rho e), \tag{4}$$

где e — единичный вектор. Функция λ дифференцируема почти всюду, поскольку таковыми являются функция τ и отображение с ограниченным искажением h.

Убедимся сейчас, что след h_ρ отображения h на почти каждой сфере $|x| = \rho$ представляет собой отображение с ограниченным искажением. Во-первых, след на почти всех сферах принадлежит классу W_n^1 (см. [8, с. 337–339] или [9, с. 120], если осуществлен переход к отображению полупространств). Фиксируем такую сферу и установим оценку внутреннего коэффициента квазиконформности следа. Пусть b — точка на фиксированной сфере, в окрестности которой отображение h взаимно однозначно. Тогда [10, теорема 2] в этой окрестности $K_1(h_\rho) \leq K_1(h)$. Во-вторых, на почти всех сферах $|x| = \rho$ множество точек ветвления отображения h имеет нулевую $(n-1)$-мерную поверхностную меру, поскольку n-мерная мера Лебега множества точек ветвления нулевая (см. [2, с. 188]).

По определению след h_ρ является отображением с ограниченным искажением на почти всех сферах и внутренний коэффициент $K_1(h_\rho)$ не больше $K_1(h)$. На каждой такой сфере след имеет точки ветвления. Если их нет, то отображение h_ρ по теореме В. А. Зорича гомеоморфно [11], так как размерность сферы не меньше трех. Поэтому отображением $H(x) = |x|^2 h\big(\rho\frac{x}{|x|}\big)$ единичный шар $\overline{B}(0,1)$ взаимно однозначно отображается на шар $\overline{B}(0,\lambda(\rho))$. Так как на границе единичного шара имеем $H(x) = h(\rho x)$, то

$$\sigma_n \lambda^n(\rho) = \int\limits_{|x|\leq 1} \det H'(x)\,dx = \rho^n = \int\limits_{|x|\leq 1} \det h'(\rho x)\,dx$$
$$= \int\limits_{|x|\leq \rho} \det h'(x)\,dx = j(0,h)\sigma_n \lambda^n(\rho).$$

Пришли к противоречию с неравенством (3). Следовательно, на почти всех сферах есть точки ветвления отображения h.

Выберем значение радиуса $\rho > 0$ таким, что

а) функция λ дифференцируема в точке ρ;

б) на сфере $|x| = \rho$ отображение h дифференцируемо почти всюду, имеет точки ветвления, и его след является отображением с ограниченным искажением.

Если b — точка ветвления отображения h на этой сфере, то $h'(b) = 0$. Это следует из теоремы Ю. Г. Решетняка о локальном строении [2, теорема 7.3], равенства (3) и неравенства $K_1(h) \le K_1(f)$, поскольку

$$\frac{j(0,h)}{K_1(h)} \ge \frac{j(a,f)}{K_1(f)} > 1.$$

Тогда из определения функции λ получаем, что $\lambda'(\rho) = 0$, так как $|b| = \rho$. Соответственно из условия $\lambda(|x|) = |h(x)|$ выводим, что почти всюду на выбранной сфере имеет место равенство $h'(x) = 0$. Тогда след h_ρ должен быть постоянным отображением. Пришли к противоречию, которое доказывает теорему 4.

Доказательство теоремы 5. Предположим противное. Тогда $j(a,f) > K_1(f)$. Осуществляя схему доказательства теоремы 1 из [7], убеждаемся в справедливости утверждения.

Доказательство теоремы 6. Предположим противное. Тогда из теоремы Ю. Г. Решетняка о локальном строении [2, теорема 7.3] следует дифференцируемость отображения f в точке a и $f'(a) = 0$. Для почти всех граничных точек шара $B(a,r)$ имеем

$$l_f(a,r) \le |f(x) - f(a)| \le \int\limits_{\gamma} \|f'(x)\|\, ds = \int\limits_0^r \|f'(a+te) - f'(a)\|\, dt,$$

где γ — радиус шара, идущий в точку x, $e = \frac{x-a}{r}$. Проинтегрируем неравенство по единичной сфере и сделаем переход от сферических координат к декартовым. Тогда

$$n\sigma_n l_f(a,r) \le \int\limits_{B(a,r)} \frac{\|f'(x) - f'(a)\|}{|x-a|^{n-1}}\, dx \le \frac{l_f(a,r)}{r} \int\limits_{B(a,r)} \frac{\omega(|x-a|)}{|x-a|^{n-1}}\, dx.$$

Применим неравенство Гёльдера и сделаем переход к сферическим координатам. Так как $l_f(a,r) > 0$, то после элементарных преобразований получается неравенство

$$1 \le r^{-p} \int\limits_0^r \omega^p(t) t^{n-1}\, dt \left(\int\limits_0^r t^{-q(n-1)+n-1}\, dt \right)^{p-1},$$

где $q = \frac{p}{p-1}$. В силу условия теоремы правая часть этого неравенства строго меньше единицы; противоречие, которое доказывает теорему 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Семенов В. И.* Условие ограниченности топологического индекса отображения как условие квазиконформности // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 938–946.
2. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
3. *Гольдштейн В. М.* О поведении отображений с ограниченным искажением при коэффициенте искажения, близком к единице // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 6. С. 1250–1258.
4. *Решетняк Ю. Г.* Локальная структура отображений с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 6. С. 1319–1333.

5. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для неголоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 261–273.

6. *Martio O.* A capacity inequality for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 1970. V. 474. P. 1–18.

7. *Семенов В. И.* Локальная гомеоморфность некоторых отображений с ограниченным искажением с коэффициентом квазиконформности, меньшем двух // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 404–408.

8. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

9. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.

10. *Gehring F. W.* Dilatations of quasiconformal boundary correspondences // Duke Math. J. 1972. V. 39, N 1. P. 89–95.

11. *Зорич В. А.* Теорема Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Мат. сб. 1967. Т. 74, № 3. С. 417–433.

Статья поступила 31 марта 1999 г.

г. Кемерово