Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 512:519.4

КРИТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМ ТОЖДЕСТВОМ

В. Ю. Попов

Аннотация: Доказано, что произвольное конечно базируемое периодическое многообразие полугрупп, удовлетворяющее перестановочному тождеству, либо имеет пустую границу разрешимости (т. е. его элементарная теория разрешима), либо его граница разрешимости равна $\{\exists\forall\neg\wedge\vee\}$. Библиогр. 7.

Многообразия полугрупп с разрешимой элементарной теорией описаны в [1]. В [2] доказана разрешимость позитивной теории произвольного конечно базируемого многообразия полугрупп с перестановочным тождеством. Эти результаты делают актуальной задачу описания всех, в рамках некоторой иерархии [3], разрешимых теорий многообразий полугрупп. В работах [4, 5] указанная задача решена в терминах границы разрешимости (см. [6]) для многообразия всех полугрупп и периодических многообразий коммутативных полугрупп. Следующая теорема обобщает результат работы [5] на случай многообразий с перестановочным тождеством.

Теорема. *Произвольное конечно базируемое периодическое многообразие полугрупп $\mathfrak{X}$, удовлетворяющее перестановочному тождеству, либо имеет пустую границу разрешимости* (*т. е. его элементарная теория разрешима*), *либо его граница разрешимости равна* $\{\exists\forall\neg\wedge\vee\}$.

Заметим, что имеются примеры многообразий, упомянутых в теореме, как с пустой границей разрешимости, так и с границей разрешимости $\{\exists\forall\neg\wedge\vee\}$ (см. [1]).

Доказательство. Напомним, что граница разрешимости класса $\mathscr{K}$ алгебраических систем — это список всех языков L из схемно-альтернативной иерархии SA таких, что теория $L\mathscr{K}$ является критической, т. е. минимальной в иерархии $SA\mathscr{K}$ неразрешимой теорией. Описание границы разрешимости дает описание всех в рамках иерархии SA разрешимых теорий данного класса $\mathscr{K}$: теория $L\mathscr{K}$ для $L \in SA$ разрешима тогда и только тогда, когда L не включает ни одного из языков, принадлежащих границе разрешимости класса $\mathscr{K}$.

Допустим, что многообразие $\mathfrak{X}$ имеет неразрешимую элементарную теорию. Убедимся, что теория $\exists\forall\neg\wedge\vee\mathfrak{X}$ неразрешима. Пусть $\mathfrak{C}$ — многообразие коммутативных полугрупп. Тогда в силу [1] элементарная теория многообразия $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{C}$ неразрешима. Поэтому из [2] получаем неразрешимость теории $\exists\forall\neg\wedge\vee\mathfrak{X}\cap\mathfrak{C}$. Обозначим через φ произвольное предложение языка $\exists\forall\neg\wedge\vee$. Рассмотрим предложение $\psi \rightleftharpoons \exists xyxy \neq yx \vee \varphi$. Легко понять, что предложение ψ истинно на всех некоммутативных полугруппах, а на коммутативных полугруппах ψ истинно тогда и только тогда, когда на них истинно предложение φ. Следовательно, $\mathfrak{X} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{X} \cap \mathfrak{C} \models \varphi$. Так как теория $\exists\forall\neg\wedge\vee\mathfrak{X}\cap\mathfrak{C}$ неразрешима, не существует алгоритма, определяющего по предложению ψ истинность его на $\mathfrak{X}$. Поскольку ψ является $\exists\forall\neg\wedge\vee$-предложением, теория $\exists\forall\neg\wedge\vee\mathfrak{X}$ неразрешима.

Перейдем к доказательству критичности теории $\exists\forall\neg\wedge\vee\mathfrak{X}$. Для этого докажем утверждение, имеющее самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть $F_\alpha\mathfrak{X}$ — полугруппа конечного ранга α, свободная в многообразии $\mathfrak{X}$. Тогда существует рекурсивная функция $f(\alpha)$ со свойством $|F_\alpha\mathfrak{X}| \leq f(\alpha)$.*

Доказательство леммы. Пусть $x_1 \dots x_n = u(x_1, \dots, x_n)$ и $x^p = x^q$, где $p < q$, — тождества перестановочности и периодичности, которым удовлетворяет многообразие $\mathfrak{X}$, w — произвольный элемент полугруппы $F_\alpha\mathfrak{X}$, $\{a_1, \dots, a_\alpha\}$ — множество свободных образующих полугруппы $F_\alpha\mathfrak{X}$. Обозначим через $l_i(w)$ число вхождений a_i в слово w и, считая для определенности $p < q$, покажем следующее. Если $l_i(w) > n + q$, то существует слово w^* такое, что $w = w^*$, $l_j(w) = l_j(w^*)$ для любого $j \neq i$ и $l_i(w^*) \leq n + q$. Для этого достаточно показать, что по слову w можно построить слово w^* такое, что $w = w^*$, $l_j(w) = l_j(w^*)$ для любого $j \neq i$ и $l_i(w^*) < l_i(w)$.

Заметим, что функция $l_j(w)$ удовлетворяет следующему условию: если слово w графически равно слову $w_1 \dots w_t$, где для любого $r \in \{1, \dots, t\}$ w_r — подслово слова w, то $l_j(w) = \sum\limits_{r=1}^{t} l_j(w_r)$.

Предположим, что $u(x_1, \dots, x_n) = x_k v(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$, где $k \neq 1$. Представим слово w в виде $A_1 a_i A_2 a_i A_3$, где A_1 — возможно пустое слово, не содержащее образующего a_i, A_2 — слово, длина которого не меньше $k - 1$. Мы можем сделать это, поскольку $l_i(w) > n + q$ и, следовательно, длина слова $a_i A_2 a_i A_3$ больше $n + q$. Применим к слову $A_2 a_i A_3$ тождество $x_1 \dots x_n = u(x_1, \dots, x_n)$, полагая $A_2 = x_1 \dots x_{k-1}$, $a_i = x_k$, $A_3 = x_{k+1} \dots x_n$. Получим, что $A_1 a_i A_2 a_i A_3 = A_1 {a_i}^2 A_4$, при этом $l_j(A_2 A_3) = l_j(A_4)$ для любого j.

Индукцией по r покажем, что для любого $r \in \{2, \dots, q\}$ найдется такое слово A_{r+2}, что выполняется равенство $w = A_1 {a_i}^r A_{r+2}$ и $l_j(w) = l_j(A_1 {a_i}^r A_{r+2})$ для любого j. Базу индукции мы уже проверили. Допустим, что данное утверждение справедливо для некоторого r. Покажем, что оно выполняется и для $r + 1$. В самом деле, так как $w = A_1 {a_i}^r A_{r+2}$, причем $l_j(w) = l_j(A_1 {a_i}^r A_{r+2})$ для любого j, то $l_i(A_{r+2}) > n + q - r$. Поскольку $r \leq q$ и $k \leq n$, слово A_{r+2} можно представить в виде $B a_i C$, где B — слово, длина которого не меньше $k-1$. Применим к слову $B a_i C$ тождество $x_1 \dots x_n = u(x_1, \dots, x_n)$, полагая $B = x_1 \dots x_{k-1}$, $a_i = x_k$, $C = x_{k+1} \dots x_n$. Получим, что $A_1 {a_i}^r B a_i C = A_1 {a_i}^{r+1} A_{r+3}$, при этом $l_j(BC) = l_j(A_{r+3})$ для любого j.

Итак, мы показали, что для любого $r \in \{2, \dots, q\}$ найдется такое слово A_{r+2}, что выполняется равенство $w = A_1 {a_i}^r A_{r+2}$ и $l_j(w) = l_j(A_1 {a_i}^r A_{r+2})$ для любого j. Следовательно, имеет место равенство $w = A_1 {a_i}^q A_{q+2}$, причем $l_j(w) = l_j(A_1 {a_i}^q A_{q+2})$ для любого j. Применение тождества $x^p = x^q$ завершает рассмотрение случая. Нам осталось рассмотреть случай, когда

$$u(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_s x_k v(x_{s+1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

где $k > s + 1$. Представим слово w в следующем виде: $A_1 a_i A_2 a_i A_3$, где A_1 — наименьшее подслово слова w такое, что его длина больше $s - 2$ и выполняется равенство $w = A_1 a_i A_2 a_i A_3$, A_2 — слово, длина которого не меньше $k - s - 1$. Мы можем сделать это, поскольку $l_i(w) > n + q$ и, следовательно, длина слова $a_i A_2 a_i A_3$ больше $n + q - s - 1$. Аналогично предыдущему случаю конечной индукцией мы можем показать, что $w = A_1 {a_i}^q A_{q+2}$, причем для любого j $l_j(w) = l_j(A_1 {a_i}^q A_{q+2})$. Применение тождества $x^p = x^q$ завершает доказательство требуемого.

Пусть $l_1(w) > n + q$. Тогда по доказанному существует слово w_1^* такое, что $l_1(w_1^*) \le n + q$ и $w = w_1^*$. Теперь применим доказанное для $i = 2$ к слову w_1^* и т. д. В итоге получим слово w_r^* такое, что $l_i(w_r^*) \le n + q$ и $w = w_r^*$ для любого i. Следовательно, длина слова w_r^* не превосходит $(q + n)r$. Полагая

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{(n+q)\alpha} \sum_{n_1 + \dots + n_\alpha = i} \frac{i!}{n_1! \dots n_\alpha!},$$

в силу произвольности слова w отсюда получаем $|F_\alpha \mathfrak{X}| \le f(\alpha)$. Легко понять, что функция $f(\alpha)$ рекурсивна. Лемма доказана.

Воспользовавшись строением схемно-альтернативной иерархии [6], легко понять, что для того чтобы показать, что $\exists\forall\neg \wedge \vee \mathfrak{X}$ — единственная критическая теория многообразия $\mathfrak{X}$, достаточно убедиться в разрешимости теорий типов $\overline{\varpi}\wedge\vee$, $\overline{\varpi}\wedge\neg$, $\overline{\varpi}\vee\neg$, $\forall\exists\neg\wedge\vee$. Разрешимость $\overline{\varpi}\wedge\vee$-теории доказана в [4]. Ввиду леммы из [7] вытекает разрешимость $\overline{\varpi} \vee \neg$-теории. Произвольное предложение языка $\overline{\varpi} \wedge \neg$ либо является предложением языка $\overline{\varpi} \wedge \vee$, либо ложно на одноэлементной полугруппе. Произвольное предложение языка $\forall\exists\neg \wedge \vee$ имеет вид $\psi \rightleftharpoons \forall x_1 \dots x_n \exists y_1 \dots y_m \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, где $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ — атомная формула. Допустим, что $\mathfrak{X} \not\models \psi$. Тогда найдется полугруппа $S \in \mathfrak{X}$ такая, что $S \models \neg\psi$. Заметим, что $\neg\psi$ имеет вид $\exists x_1 \dots x_n \forall y_1 \dots y_m \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. Отсюда в силу соотношения $S \models \neg\psi$ вытекает существование элементов $x_{1_0}, \dots, x_{n_0} \in S$ таких, что $S \models \forall y_1 \dots y_m \neg\varphi(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_1, \dots, y_m)$. Легко понять, что из последнего соотношения вытекает соотношение $S_n \models \forall y_1 \dots y_m \neg\varphi (x_{10}, \dots, x_{n0}, y_1, \dots, y_m)$, где S_n — n-порожденная подполугруппа полугруппы S с множеством образующих $x_{10}, \dots, x_{n0}$. Используя лемму, легко убедиться в том, что все n-порожденные полугруппы из многообразия $\mathfrak{X}$ конечны, их конечное число, и, кроме того, мощности n-порожденных полугрупп из многообразия $\mathfrak{X}$ и их число ограничены рекурсивными функциями. Следовательно, $\forall\exists\neg \wedge \vee$-теория многообразия $\mathfrak{X}$ разрешима. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Замятин А. П.* Предмногообразия полугрупп, элементарная теория которых разрешима // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 4. С. 417–432.
2. *Розенблат Б. В.* Позитивные теории некоторых многообразий полугрупп // Исследования по современной алгебре. Свердловск, 1981. С. 117–132.
3. *Важенин Ю. М.* Критические теории // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 23–31.
4. *Важенин Ю. М.* Алгоритмические проблемы и иерархии языков первого порядка // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 419–434.
5. *Баясгалан Б.* Критические теории некоторых многообразий полугрупп // Conf. on algebra: Thes. of reports. Ulaanbaatar, 1990. P. 1–2.
6. *Важенин Ю. М.* Множества, логика, алгоритмы. Екатеринбург: УрГУ, 1997.
7. *Баясгалан Б.* Разрешимость $\overline{\varpi}\neg\wedge$-теории квазиупорядоченных множеств // Исследования алгебраических систем. Свердловск, 1989. С. 23–30.

Статья поступила 16 января 1998 г.

г. Екатеринбург