Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.518

ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНОВСКОГО ТИПА НА КОМПАКТНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ РАНГА 1

С. С. Платонов

Аннотация: Рассматриваются вопросы теории приближений функций на произвольном компактном симметрическом пространстве M ранга 1 полиномами по сферическим гармоникам на M, т. е. линейными комбинациями собственных функций оператора Лапласа — Бельтрами на M. Доказаны прямые теоремы джексоновского типа. Библиогр. 18.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

В последние годы активно изучаются различные задачи теории приближений функций на n-мерной сфере S^n (см. [1–3] и цитированную там литературу). Естественным более широким классом пространств, на которых можно ставить аналогичные задачи, является множество всех компактных симметрических пространств ранга 1 (КРОСПов, по терминологии книги [4]). Для этих пространств уже получен ряд результатов (см. [5–9]), но остается еще много задач. Настоящая работа посвящена доказательству прямых теорем Джексоновского типа для произвольного КРОСПа M.

Хорошо известна полная классификация всех КРОСПов. Их всего четыре серии (индекс n всюду означает размерность пространства): сферы S^n ($n = 1, 2, \dots$), вещественные, комплексные и кватернионные проективные пространства ($P^n(\mathbb{R})$, $n = 2, 3, \dots$; $P^n(\mathbb{C})$, $n = 4, 6, \dots$; $P^n(\mathbb{H})$, $n = 8, 12, 16, \dots$) и одно особое пространство — эллиптическая плоскость Кэли $P^{16}(Cay)$. Так как задачи гармонического анализа на $P^n(\mathbb{R})$ легко сводятся к соответствующим задачам на S^n, будем считать, что $M \neq P^n(\mathbb{R})$.

КРОСП M всегда риманово многообразие. Пусть Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на M. Спектр оператора Δ является дискретным, действительным и неположительным. Упорядочим его по убыванию ($0 = \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$) и обозначим через $\mathscr{H}_k$ собственное подпространство (всегда конечномерное) оператора Δ, отвечающее собственному значению λ_k. Пусть $\mathscr{P}_N(M) := \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1 + \dots + \mathscr{H}_N$. Функции из $\mathscr{P}_N(M)$ будем называть *сферическими полиномами на M степени m* (при $M = S^n$ они совпадают с обычными сферическими полиномами).

Для любого множества X с мерой $d\sigma$ через $L_p(X, d\sigma)$ будем обозначать, как обычно, банахово пространство, состоящее из измеримых комплекснозначных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00782).

функций $f(x)$ на X с конечной нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(X)} := \left(\int\limits_X |f(x)|^p d\sigma\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Если X — компактное топологическое пространство, то пусть $L_\infty(X) = C(X)$ — пространство непрерывных на X функций с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C := \max_{x\in X} |f(x)|.$$

В частности, если M — КРОСП, то возникают банаховы пространства $L_p(M) = L_p(M, dx)$ и $L_\infty(M) = C(M)$, где dx — элемент римановой меры на M.

Наилучшим приближением функции $f(x) \in L_p(M)$ *сферическими полиномами степени* N *в метрике* L_p называется число

$$E_N(f)_p := \inf_{\Phi\in\mathscr{P}_N} \|f - \Phi\|_p.$$

Обозначим через T_xM множество касательных векторов к многообразию M в точке x, через $S(x)$ — множество единичных касательных векторов (единичная сфера) в точке x, через U — группу всех изометрий КРОСПа M.

Пусть B — многообразие единичных касательных векторов к многообразию M. Точки многообразия B имеют вид (x, ξ), где $x \in M$, $\xi \in S(x)$. Группа U естественным образом действует на B, если положить $u(x, \xi) = (ux, u_*\xi)$, где u_* — индуцированное отображение касательных векторов. Это действие транзитивно (т. е. M изотропно, см. [10, гл. I, § 4; 11, гл. IX, § 5]), поэтому на B существует единственная с точностью до умножения на число U-инвариантная мера $dv(x, \xi)$ (см., например, [10, гл. I, теорема 1.9]). Пусть $L_p(B) := L_p(B, dv)$, $1 \le p < \infty$, и $L_\infty(B) = C(B)$. Естественным образом $L_p(M)$ вкладывается в $L_p(B)$, если для $f(x) \in L_p(M)$ положить $f(x, \xi) = f(x)$.

Для $(x, \xi) \in B$ пусть $\gamma(x, \xi, t)$ — геодезическая на M, удовлетворяющая условиям

$$\gamma(x, \xi; 0) = x, \quad \frac{d}{dt}\gamma(x, \xi; t)\Big|_{t=0} = \xi,$$

где $\frac{d}{dt}\gamma(t)$ — касательный вектор к кривой $\gamma(t)$. Для любой функции $F(x, \xi) \in L_p(B)$ пусть

$$F^t(x, \xi) := F\left(\gamma(x, \xi, t), \frac{d}{dt}\gamma(x, \xi; t)\right). \tag{1.1}$$

Определим k-ю разность функции F с шагом t формулой

$$\widetilde{\Delta}_t^k F(x, \xi) := \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \mathrm{C}_k^j F^{jt}(x, \xi),$$

где C_k^j — биномиальные коэффициенты. Модуль непрерывности порядка k функции $F \in L_p(B)$ определим формулой

$$\omega_k(F, \delta)_p := \sup_{0<t\le\delta} \big\|\widetilde{\Delta}_t^k F\big\|_{L_p(B)}. \tag{1.2}$$

В частности, можно брать и $\omega_k(f, \delta)_p$ при $f \in L_p(M)$.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in L_p(M)$ справедливо неравенство*

$$E_N(f)_p \le c_1 \omega_k \left(f, \frac{\pi}{N} \right)_p, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где c_1 — некоторая постоянная, не зависящая от f и N.

Теорему 1 можно усилить для дифференцируемых функций. Будем говорить, что функция $F \in L_p(B)$ *дифференцируема* в $L_p(B)$, если для некоторой функции $G(x, \xi) \in L_p(B)$

$$\left\| \frac{1}{t}(F^t - F) - G \right\|_{L_p(B)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Функция G называется *производной от* F и обозначается, как обычно, через $G = F'$. Функция F дифференцируема r раз в $L_p(B)$, если $F \in L_p(B)$ и существуют производные $F', F'', \dots, F^{(r)} \in L_p(B)$, где $F^{(k)} = (F^{(k-1)})'$. В частности, можно брать r-ю производную $f^{(r)}$ для функции $f(x) \in L_p(M)$, отметим только, что $f^{(r)}$ — это уже функция на B.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L_p(M)$ и r раз дифференцируема в $L_p(B)$. Тогда*

$$E_N(f)_p \le \frac{c_2}{N^r} \omega_k \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{N} \right)_p, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где постоянная c_2 не зависит от f и N.

Всюду в дальнейшем $c_1, c_2, c_3, \dots$ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от f и N.

Теоремы 1 и 2 аналогичны классическим прямым теоремам типа Джексона из теории приближений функций (см. [12]), и их доказательство является основной целью настоящей работы. Отметим, что для $M = S^n$ и $p = \infty$ теоремы 1 и 2 доказаны С. М. Никольским и П. И. Лизоркиным [1] для нечетных n и А. П. Терехиным [13] для четных n. Для $M = S^n$, $1 \le p < \infty$, теоремы 1 и 2 фактически получены П. И. Лизоркиным в [14], так как легко видеть (с учетом формулы (2.17) из настоящей работы), что введенный в [14] модуль гладкости ${}^p\omega_k(f, \delta)_p$ с точностью до множителя совпадает с $\omega_k(f, \delta)_p$. Краткое изложение результатов работы опубликовано в [15]. Отметим еще работу [16], которая является естественным продолжением настоящей работы. В ней на произвольном КРОСПе M введены функциональные пространства $B^r_{p,q}(M)$ типа Никольского — Бесова и получено их описание в терминах наилучших приближений сферическими полиномами.

§ 2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Если $F(x, \xi)$ — непрерывная функция на B, то для любого $s \in \mathbb{R}$*

$$\int_B F(x, \xi)\, dv = \int_B F^s(x, \xi)\, dv. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для $u \in U$ и $F(x, \xi) \in C(B)$ пусть

$$(uF)(x, \xi) := F(ux, u_*\xi).$$

Проверим, что

$$u(F^t) = (uF)^t \tag{2.2}$$

при $t \in \mathbb{R}$, $u \in U$. Действительно, так как u — изометрия, имеем

$$u\gamma(x, \xi, t) = \gamma(ux, u_*\xi; t), \quad u_*\frac{d}{dt}\gamma(x, \xi; t) = \frac{d}{dt}\gamma(ux, u_*\xi; t).$$

Тогда

$$(uF)^t = F\Big(u\gamma(x, \xi, t), u_*\frac{d}{dt}\gamma(x, \xi; t)\Big) = F\Big(\gamma(ux, u_*\xi; t), \frac{d}{dt}\gamma(ux, u_*\xi; t)\Big) = u(F^t).$$

Из (2.2) следует, что отображение

$$F \mapsto \int\limits_B F^s(x, \xi)\, dv$$

задает положительно определенный U-инвариантный функционал на $C(B)$. Из единственности (с точностью до множителя) инвариантной меры следует, что

$$\int\limits_B F^s(x, \xi)\, dv = c \int\limits_B F(x, \xi)\, dv \tag{2.3}$$

для некоторой постоянной $c > 0$. Подставив в (2.3) $F \equiv 1$, получим, что $c = 1$.

Так как множество непрерывных функций плотно в пространстве $L_p(B)$ $(1 \le p < \infty)$, из (2.1) вытекает, что отображение $F \mapsto F^s$ переводит пространство $L_p(B)$ в себя и при этом

$$\|F^s\|_{L_p(B)} = \|F\|_{L_p(B)}. \tag{2.4}$$

При $p = \infty$ равенство (2.4), очевидно, также выполняется. Отметим еще, что

$$(F^t)^s = F^{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Пользуясь (2.5), легко получить, что

$$\widetilde{\Delta}_t^{r+k} F = \widetilde{\Delta}_t^r\big(\widetilde{\Delta}_t^k F\big), \quad k, r = 1, 2, \dots. \tag{2.6}$$

Лемма 2 (свойства модуля непрерывности). *Справедливы неравенства*

$$\omega_k(F, \delta)_p \le \omega_k(F, \lambda)_p \quad \text{при} \quad \delta \le \lambda; \tag{2.7}$$

$$\omega_k(F, l\delta)_p \le (l+1)^k \omega_k(F, \delta)_p, \tag{2.8}$$

где $l > 0$ *— произвольное число.*

Доказательство. Свойство (2.7) очевидно. При натуральном l индукцией по k с помощью (2.5) проверяется равенство

$$\widetilde{\Delta}_{lt}^k F^s(x, \xi) = \sum_{i_1=0}^{l-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{l-1} \widetilde{\Delta}_t^k F^{s+i_1 t+\dots+i_k t}(x, \xi). \tag{2.9}$$

Тогда из (2.4) следует неравенство

$$\omega_k(F, l\delta)_p \le l^k \omega_k(F, \delta)_p, \tag{2.10}$$

а из (2.10) и (2.7) вытекает (2.8) при любом, не обязательно целом, $l > 0$.

Известно (см. [11, гл. IX, § 5]), что на любом КРОСПе M все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину $2L$. Риманова метрика на M определена с точностью до умножения на положительное число. Для удобства нормируем риманову метрику так, что $L=\pi$.

При $0<t<\pi$ пусть $\alpha(t)$ — полный объем сферы радиуса t на многообразии M. Известно [10], что

$$\alpha(t)=c(\sin t/2)^a(\sin t)^b, \tag{2.11}$$

где c — константа, а числа a и b принимают следующие значения для различных КРОСПов:

$$\begin{aligned}
&M=S^n: \quad a=0, \quad b=n-1;\\
&M=P^n(\mathbb{C}): \quad a=n-2, \quad b=1;\\
&M=P^n(\mathbb{H}): \quad a=n-4, \quad b=3;\\
&M=P^{16}(Cay): \quad a=8, \quad b=7.
\end{aligned}$$

Формула (2.11) позволяет продолжить функцию $\alpha(t)$ на все значения $t\in\mathbb{R}$.

Если непрерывная функция $f(x)$ зависит только от расстояния от некоторой фиксированной точки $o\in M$ до точки x (т. е. $f(x)=\tilde f(|o,x|)$, $|x,y|$ — расстояние между точками x и y), то известно (см., например, [10, гл. 1, § 5]), что

$$\int\limits_M f(x)\,dx=\int\limits_0^\pi \tilde f(t)\alpha(t)\,dt. \tag{2.12}$$

Пусть

$$\mathscr{D}_m(t)=\left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2s}, \quad m,s=1,2,\ldots,$$

— ядро Джексона. Положим

$$\theta_m=\int\limits_M \mathscr{D}_m(|o,x|)\,dx=\int\limits_0^\pi \mathscr{D}_m(t)\alpha(t)\,dt; \tag{2.13}$$

$$\mathscr{J}_m(t)=\frac{1}{\theta_m}\mathscr{D}_m(t). \tag{2.14}$$

Отметим, что

$$\int\limits_0^\pi \mathscr{J}_m(t)\alpha(t)\,dt=1, \tag{2.15}$$

а также, что для всякого $\delta>0$

$$\int\limits_\delta^\pi \mathscr{J}_m(t)\alpha(t)\,dt\to 0 \tag{2.16}$$

при $m\to\infty$.

Как и раньше, пусть $S(x)$ — единичная сфера в касательном пространстве T_xM. Пусть $d\sigma_x(\xi)$ — элемент объема сферы $S(x)$, а σ — полный объем этой сферы.

Из свойств инвариантных мер на однородных пространствах (см. [10, гл. I, § 1, предложение 1.13]) следует, что для некоторой положительной постоянной $A > 0$ и для любой функции $F(x,\xi) \in L_1(B)$ справедлива формула

$$\int\limits_M \biggl(\int\limits_{S(x)} F(x,\xi)\,d\sigma_x(\xi)\biggr)\,dx = A\int\limits_B F(x,\xi)\,dv(x,\xi). \tag{2.17}$$

Нормируем меру $dv(x,\xi)$ (она определена с точностью до умножения на положительное число) так, чтобы в формуле (2.17) коэффициент A был равен σ. Тогда из (2.17) вытекает, что

$$\int\limits_B f(x)\,dv(x,\xi) = \int\limits_M f(x)\,dx$$

для любой функции $f \in L_1(M)$ и при $f(x) \in L_p(M)$

$$\|f\|_{L_p(M)} = \|f\|_{L_p(B)}. \tag{2.18}$$

Аналогично [2] определим оператор сдвига $S_t f(x)$ функции $f(x)$ на M с шагом t формулой

$$S_t f(x) := \frac{1}{\sigma}\int\limits_{S(x)} f(\gamma(x,\xi;t))\,d\sigma_x(\xi), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Очевидно, что функция $S_t f(x)$ по t четная и 2π-периодическая.

Лемма 3. *Если $f(x) \in L_p(M)$, то $S_t f(x) \in L_p(M)$ и*

$$\|S_t f\|_p \le \|f\|_p. \tag{2.20}$$

Доказательство. Из неравенства Гёльдера следует, что

$$|S_t f(x)| = \biggl|\int\limits_{S(x)} f(\gamma(x,\xi,t))\cdot 1\sigma^{-1}\,d\sigma_x(\xi)\biggr| \le \biggl(\int\limits_{S(x)} |f(\gamma(x,\xi,t))|^p\sigma^{-1}\,d\sigma_x(\xi)\biggr)^{1/p}$$

$$= \sigma^{-1/p}\biggl(\int\limits_{S(x)} |f(\gamma(x,\xi,t))|^p\,d\sigma_x(\xi)\biggr)^{1/p}. \tag{2.21}$$

Пользуясь (2.17), получим, что

$$\|S_t f(x)\|_p^p \le \frac{1}{\sigma}\int\limits_M\int\limits_{S(x)} |f(\gamma(x,\xi,t))|^p\,d\sigma_x(\xi)\,dx$$

$$= \int\limits_B |f(\gamma(x,\xi,t))|^p\,dv(x,\xi) = \|f^t\|_{L_p(B)}^p.$$

Из (2.4) и (2.18) вытекают равенства

$$\|f^t\|_{L_p(B)}^p = \|f\|_{L_p(B)}^p = \|f\|_p^p,$$

которые доказывают (2.20). Легко видеть, что для $p = \infty$ неравенство (2.20) также выполняется.

Обозначим через $S_t^- f(x)$ нечетное 2π-периодическое продолжение по t функции $S_t f(x)$ с отрезка $[0,\pi]$. Точнее говоря, пусть

$$S_t^- f(x) := (-1)^{[t/\pi]} S_t f(x),$$

где $[t]$ — целая часть числа t. Заметим, что нечетность функции $S_t^- f(x)$ нарушается в точках $t=\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, но это не существенно для дальнейшего.

Для любой функции $\varphi(\tau)$ действительного переменного τ через $\Delta_t^k\varphi(\tau)$ будем обозначать обычную разность k-го порядка с шагом t, т. е.

$$\Delta_t^k\varphi(\tau)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\mathrm{C}_k^j\varphi(\tau+jt).$$

Лемма 4. *Пусть $f\in L_p(M)$ и m — произвольное натуральное число, делящееся на $2k!$. Функция $\Phi_N(x)$, определяемая равенствами*

$$\Phi_N(x)=f(x)-(-1)^k\int\limits_0^\pi\left(\Delta_t^k S_\tau f(x)\right)\big|_{\tau=0}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt, \tag{2.22}$$

если $M=S^n$ и n нечетное;

$$\Phi_N(x)=f(x)-(-1)^k\int\limits_0^\pi\left(\Delta_t^k S_\tau^- f(x)\right)\big|_{\tau=0}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt, \tag{2.23}$$

если $M\neq S^n$ или $M=S^n$ и n — четное, является сферическим полиномом на M степени $N=s(m-1)$.

Доказательство. Для случая $M=S^n$ формулы (2.22) и (2.23) получены в [2], а для остальных КРОСПов M равенство (2.23) установлено в [17, лемма 2.7].

Лемма 5. *Для $F\in L_p(B)$ и любого $t>0$ справедливо неравенство*

$$\omega_k(F,t)_p\le\frac{k}{2}\omega_{k+1}(F,t)_p+\frac{1}{2^k}\omega_k(F,2t)_p. \tag{2.24}$$

Доказательство леммы проводится по схеме доказательства классического неравенства Маршо (см. [18, теорема 3.3.1]). Для доказательства неравенства (2.24) достаточно установить неравенство

$$\big\|\widetilde{\Delta}_t^k F\big\|_{L_p(B)}\le\frac{k}{2}\omega_{k+1}(F,t)_p+\frac{1}{2^k}\big\|\widetilde{\Delta}_{2t}^k F\big\|_{L_p(B)}. \tag{2.25}$$

Из (2.9) легко получить, что

$$\widetilde{\Delta}_{2t}^k F(x,\xi)=\sum_{\nu=0}^{k}\mathrm{C}_k^\nu\widetilde{\Delta}_t^k F^{\nu t}(x,\xi). \tag{2.26}$$

Отсюда, пользуясь (2.4), (2.6) и соотношением $\sum\limits_{\nu=1}^{k}\nu\mathrm{C}_k^\nu=k2^{k-1}$, находим

$$\begin{aligned}\big\|\widetilde{\Delta}_{2t}^k F-2^k\widetilde{\Delta}_t^k F\big\|_{L_p(B)}&=\Big\|\sum_{\nu=0}^{k}\mathrm{C}_k^\nu\widetilde{\Delta}_t^k(F^{\nu t}-F)\Big\|_{L_p(B)}\\&=\Big\|\sum_{\nu=0}^{k}\mathrm{C}_k^\nu\widetilde{\Delta}_t^k\sum_{j=0}^{\nu-1}\widetilde{\Delta}_t^1F^{jt}\Big\|_{L_p(B)}=\Big\|\sum_{\nu=0}^{k}\mathrm{C}_k^\nu\sum_{j=0}^{\nu-1}\widetilde{\Delta}_t^{k+1}F^{jt}\Big\|_{L_p(B)}\\&\le\sum_{\nu=0}^{k}\mathrm{C}_k^\nu\nu\omega_{k+1}(F,t)_p=k2^{k-1}\omega_k(F,t)_p,\end{aligned}$$

откуда и следует (2.25).

Так как функция $F^s(x,\xi)$ по s является 2π-периодической, то $\omega_k(F,t)_p = \omega_k(F,2\pi)_p$ при $t \geq 2\pi$. Если в (2.23) взять $t = 2\pi$, то получим, что

$$\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\omega_k(F,2\pi)_p \leq k\omega_{k+1}(F,2\pi)_p$$

и тем более

$$\omega_k(F,2\pi)_p \leq k\omega_{k+1}(F,2\pi)_p. \tag{2.27}$$

Лемма 7. *При фиксированном s и $m \to \infty$ справедливы следующие асимптотические равенства:*

$$\theta_m \asymp m^{2s-a-b-1}, \quad 2s-a-b-1 > 0; \tag{2.28}$$

$$\int\limits_0^\pi t^r \mathscr{J}_m(t)\alpha(t)\,dt \asymp m^{-r}, \quad 2s-a-b-1 > r > 0, \tag{2.29}$$

где $A_m \asymp B_m$, если $A_m, B_m > 0$ и $c_1 B_m \leq A_m \leq c_2 B_m$ для некоторых констант $c_1, c_2 > 0$.

Доказательство см. в [17, лемма 2.5].

§ 3. Доказательства теорем

Так как теорема 1 является частным случаем теоремы 2 при $r = 0$, достаточно доказать только теорему 2. Зафиксируем какое-нибудь натуральное число s, удовлетворяющее неравенству $2s-a-b-1 > k+r$. Пусть m — произвольное натуральное число, делящееся на $2(k+r)!$, а функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_p(M)$ и удовлетворяет условиям теоремы 2. В дальнейшем нам будут встречаться функции на многообразиях M и B, через $\|F\|_p$ мы будем обозначать норму в пространстве $L_p(B)$ при $F \in L_p(B)$ или норму в пространстве $L_p(M)$ при $F \in L_p(M)$. Из (2.18) следует, что такое обозначение корректно.

Предположим, что функция $F(x,\xi)$ принадлежит пространству $L_p(B)$ и r раз дифференцируема в $L_p(B)$. Из (2.5) следует, что

$$(F')^u(x,\xi) = (F^u)'(x,\xi) \tag{3.1}$$

для любого $u \in \mathbb{R}$, поэтому функция $u \mapsto F^u$ как вектор-функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $L_p(B)$ дифференцируема r раз и

$$\frac{d}{du}F^u = (F')^u. \tag{3.2}$$

Отметим также, что из (3.1) вытекает равенство

$$\widetilde{\Delta}_t(F') = (\widetilde{\Delta}_t F)' \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Используя (3.2) и (2.4), получаем

$$\big\|\widetilde{\Delta}_t^1 F\big\|_p = \|F^t - F^0\|_p = \left\|\int\limits_0^t (F')^\tau\,d\tau\right\|_p \leq |t|\|F'\|_p.$$

Рассуждая аналогично и пользуясь при этом соотношением (3.3), легко получить, что

$$\big\|\widetilde{\Delta}_t^{k+r} F\big\|_p \leq |t|^r \big\|\widetilde{\Delta}_t^k F^{(r)}\big\|_p, \quad k,r = 0,1,2,\dots. \tag{3.4}$$

Наконец, из неравенства (3.4) вытекает следующее полезное соотношение:

$$\omega_{k+r}(F,\delta)_p \le \delta^r \omega_k(F^{(r)},\delta)_p \quad \forall \delta > 0. \tag{3.5}$$

(a) Рассмотрим случай, когда $M = S^n$ и число n нечетное. Очевидно, что

$$\big(\Delta_t^{k+r} S_\tau f(x)\big)\big|_{\tau=0} = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{S(x)} \big(\widetilde{\Delta}_t^{k+r} f\big)(x,\xi)\, d\sigma_x(\xi). \tag{3.6}$$

Тогда с учетом (3.4)

$$\begin{aligned}\big\|\Delta_t^{k+r} S_\tau f(x)\big|_{\tau=0}\big\|_p &\le \frac{1}{\sigma} \int\limits_{S(x)} \big\|\widetilde{\Delta}_t^{k+l} f\big\|_p\, d\sigma_x(\xi) \\ &\le \frac{1}{\sigma} \int\limits_{S(x)} |t|^r \big\|\widetilde{\Delta}_t^{k} f^{(r)}\big\|_p\, d\sigma_x(\xi) \le |t|^r \omega_k(f^{(r)},t)_p. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Пусть

$$\Phi_N(x) := f(x) - (-1)^{k+r} \int\limits_0^\pi \big(\Delta_t^{k+r} S_\tau f(x)\big)\big|_{\tau=0} \mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\, dt. \tag{3.8}$$

По лемме 4 функция $\Phi_N(x)$ является сферическим полиномом на M степени $N = s(m-1)$. Из (3.8) и (3.7) следует, что

$$\begin{aligned}\|f - \Phi_N\|_p &\le \int\limits_0^\pi \big\|\Delta_t^{k+r} S_\tau f(x)\big|_{\tau=0}\big\|_p \mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\, dt \\ &\le \int\limits_0^\pi \omega_k(f^{(r)},t)_p t^r \mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\, dt. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Разобьем промежуток $[0,\pi]$ на две части $[0,\pi/m]$ и $[\pi/m,\pi]$. Используя свойства (2.7) и (2.8) модуля непрерывности на каждой из частей, получаем оценки

$$\omega_k(f^{(r)},t)_p \le \omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{m}\right)_p, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{m}, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\omega_k(f^{(r)},t)_p = \omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{m}\frac{mt}{\pi}\right)_p &\le \left(\frac{mt}{\pi}+1\right)^k \omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{m}\right)_p \\ &\le \left(\frac{2mt}{\pi}\right)^k \omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{m}\right)_p, \quad \frac{\pi}{m} \le t \le \pi. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Применяя эти оценки и оценку сверху из (2.28), получим, что

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\pi \omega_k(f^{(r)},t)_p t^r \mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\, dt &= \int\limits_0^{\pi/m} \omega_k(f^{(r)},t)_p t^r \mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\, dt \\ &+ \int\limits_{\pi/m}^\pi \omega_k(f^{(r)},t)_p t^r \mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\, dt \le \omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{m}\right)_p \int\limits_0^{\pi/m} t^r \mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\, dt \\ &+ \left(\frac{2m}{\pi}\right)^k \omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{m}\right)_p \int\limits_{\pi/m}^\pi t^{k+r} \mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\, dt \le \frac{c_3}{m^r}\omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{m}\right)_p, \end{aligned}$$

т. е. справедливо неравенство

$$\int_0^\pi \omega_k(f^{(r)},t)_p t^r \mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt \le c_3 m^{-r}\omega_k(f^{(r)},\pi/m)_p. \tag{3.12}$$

Из (3.9) и (3.10) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|f-\Phi_N\|_p &\le c_3 m^{-r}\omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{m}\right)_p \\ &= c_3 m^{-r}\omega_k\left(f^{(r)},\,\frac{\pi}{N}\frac{s(m-1)}{m}\right)_p \le c_4 N^{-r}\omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{N}\right), \end{aligned}\tag{3.13}$$

где $N=s(m-1)$.

Теперь пусть N — произвольное натуральное число. Напомним, что число m имеет вид $m=2(k+r)!d$, $d=1,2,\dots$. Без ограничения общности можно считать, что $N\ge 2(k+r)!$. Подберем число d так, чтобы

$$s(m-1)=s(2(k+r)!d-1)\le N\le s(2(k+r)!(d+1)-1).$$

Тогда

$$E_N(f)_p\le E_{s(m-1)}(f)_p\le \frac{c_4}{s(m-1)^r}\omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{s(m-1)}\right)_p\le\frac{c_5}{N^r}\omega_k\left(f^{(r)},\frac{\pi}{N}\right)_p,$$

что и доказывает в этом случае теорему 2.

(б) Пусть $M\ne S^n$ или $M=S^n$ и число n четное. Определим функцию

$$G_tf(x):=S_tf(x)-f(x).$$

Пусть $G_t^-f(x)$ — нечетное 2π-периодическое продолжение по t функции $G_tf(x)$ с отрезка $[0,\pi]$. Точнее говоря, для любого $t\in\mathbb{R}$ пусть

$$G_t^-f(x)=S_t^-f(x)-(-1)^{[t/\pi]}f(x),$$

где $S_t^-f(x)=(-1)^{[t/\pi]}S_tf(x)$. Нечетность функции $G_t^-f(x)$ может нарушаться в точках $t=\pi(2l+1)$, $l\in\mathbb{Z}$, но это не существенно для дальнейшего.

По лемме 4 существует сферический полином Φ_N степени $N=s(m-1)$ такой, что

$$\begin{aligned}f(x)-\Phi_N(x)&=(-1)^{k+r}\int_0^\pi\bigl(\Delta_t^{k+r}S_\tau^-f(x)\bigr)\big|_{\tau=0}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt\\ &=(-1)^{k+r}\int_0^\pi\bigl(\Delta_t^{k+r}G_\tau^-f(x)\bigr)\big|_{\tau=0}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt\\ &\quad+(-1)^{k+r}f(x)\int_0^\pi\bigl(\Delta_t^{k+r}(-1)^{[\tau/\pi]}\bigr)\big|_{\tau=0}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt.\end{aligned}$$

Пусть

$$d_m:=(-1)^{k+r}\int_0^\pi\bigl(\Delta_t^{k+r}(-1)^{[\tau/\pi]}\bigr)\big|_{\tau=0}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt.$$

Тогда

$$f(x)-\Psi_N(x)=\frac{(-1)^{k+r}}{1-d_m}(-1)^{k+r}\int\limits_0^{\pi}\big(\Delta_t^{k+r}G_\tau^- f(x)\big)\big|_{\tau=0}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt, \qquad (3.14)$$

где функция $\Psi_N:=(1-d_m)^{-1}\Phi_N$ является сферическим полиномом степени $N=s(m-1)$, если только $1-d_m\neq 0$. Заметим, что при $0<t<\pi/(k+r)$ справедливо равенство

$$\big(\Delta_t^{k+r}(-1)^{[\tau/\pi]}\big)\big|_{\tau=0}=0,$$

следовательно,

$$|d_m|=\left|\int\limits_{\pi/(k+r)}^{\pi}\big(\Delta_t^{k+r}(-1)^{[\tau/\pi]}\big)\big|_{\tau=0}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt\right|\leq 2^{k+r}\int\limits_{\pi/(k+r)}^{\pi}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt. \qquad (3.15)$$

Из неравенства (3.15) и соотношения (2.16) вытекает, что d_m стремится к нулю при $m\to\infty$. Значит, при достаточно больших m справедливо неравенство

$$|1-d_m|\geq 1/2. \qquad (3.16)$$

Промежуток интегрирования в правой части равенства (3.14) разобьем на части $[0,\pi/(k+r)]$ и $[\pi/(k+r),\pi]$, интегралы по этим отрезкам обозначим через I_1 и I_2 соответственно. Оценим сверху $\|I_1\|_p$ и $\|I_2\|_p$. Из определения функции $G_t^- f(x)$ видно, что при $t\in[0,\pi/(k+r)]$ верно равенство

$$\big(\Delta_t^{k+r}G_\tau^- f(x)\big)\big|_{\tau=0}=\big(\Delta_t^{k+r}S_\tau f(x)\big)\big|_{\tau=0}.$$

Пользуясь неравенствами (3.7) и (3.12) (они, очевидно, справедливы для любого КРОСПа M), получаем оценки

$$\|I_1\|_p=\left\|\int\limits_0^{\pi/(k+r)}\big(\Delta_t^{k+r}S_\tau f(x)\big)\big|_{\tau=0}\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt\right\|_p$$

$$\leq\int\limits_0^{\pi/(k+r)}\big\|\big(\Delta_t^{k+r}S_\tau f(x)\big)\big|_{\tau=0}\big\|_p\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt\leq\int\limits_0^{\pi/(k+r)}t^r\omega_k(f^{(r)},t)_p\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt$$

$$\leq\int\limits_0^{\pi}\omega_k(f^{(r)},t)_p t^r\mathscr{I}_m(t)\alpha(t)\,dt\leq c_6 m^{-r}\omega_k(f^{(r)},\pi/m)_p,$$

следовательно,

$$\|I_1\|_p\leq c_6 m^{-r}\omega_k(f^{(r)},\pi/m)_p. \qquad (3.17)$$

Пусть $t\in[\pi/(k+r),\pi]$. Заметим, что для любого $t\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\|G_t^- f(x)\|_p\leq\omega_1(f,t)_p\leq\omega_1(f,2\pi)_p,$$

в последнем неравенстве использовано, что функция $G_t^- f(x)$ является 2π-периодической по переменной t. Значит,

$$\big\|\big(\Delta_t^{k+r}G_\tau^- f(x)\big)\big|_{\tau=0}\big\|_p\leq 2^{k+r}\omega_1(f,2\pi)_p. \qquad (3.18)$$

Учитывая неравенства (2.27) и (3.5), получим

$$\omega_1(f,2\pi)_p \le (k+r)!\omega_{k+r}(f,2\pi)_p \le (2\pi)^r(k+r)!\omega_k(f^{(r)},2\pi). \tag{3.19}$$

Кроме того, из свойства (2.8) модуля непрерывности вытекает, что

$$\omega_k(f^{(r)},2\pi)_p \le (1+2m)^k\omega_k(f^{(r)},\pi/m)_p. \tag{3.20}$$

Применяя неравенства (3.18)–(3.20) и используя определение функции $\mathscr{J}_m(t)$ (см. (2.14)), находим, что

$$\begin{aligned}\|I_2\|_p &= \left\| \int\limits_{\pi/(k+r)}^{\pi} \left(\Delta_t^{k+r} G_\tau^- f(x)\right)\Big|_{\tau=0} \mathscr{J}_m(t)\alpha(t)\,dt \right\|_p \\ &\le 2^{k+r}\omega_1(f,2\pi)_p \int\limits_{\pi/(k+r)}^{\pi} \mathscr{J}_m(t)\alpha(t)\,dt \\ &\le \frac{(2\pi)^r 2^{k+r}(k+r)!\omega_k(f^{(r)},2\pi)}{\theta_m} \int\limits_{\pi/(k+r)}^{\pi} \mathscr{D}_m(t)\alpha(t)\,dt \\ &\le c_7\frac{\omega_k(f^{(r)},\pi/m)_p(1+2m)^k}{m^{2s-a-b-1}}.\end{aligned}$$

При этом использована оценка (2.28) и то, что на отрезке $[\pi/(k+r),\pi]$ функция $\mathscr{D}_m(t)$ ограничена сверху. Заметим еще, что

$$\frac{c_7(1+2m)^k}{m^{2s-a-b-1}} \le c_8 m^{-r},$$

так как $2s-a-b-1 > k+r$. Окончательно получаем

$$\|I_2\|_p \le c_8 m^{-r}\omega_k(f^{(r)},\pi/m)_p. \tag{3.21}$$

Из соотношения (3.14) и неравенств (3.16), (3.17), (3.21) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|f-\Psi_N\| &\le (1-d_m)^{-1}(\|I_p\|_p + \|I_2\|_p) \\ &\le c_9 m^{-r}\omega_k(f^{(r)},\pi/m)_p \le c_{10}N^{-r}\omega_k(f^{(r)},\pi/N)\end{aligned} \tag{3.22}$$

при $N = s(m-1)$. Далее, рассуждая, как в п. (a), выводим из (3.22), что

$$E_N(f)_p \le c_{11}N^{-r}\omega_k(f^{(r)},\pi/N)$$

для любого натурального N. Тем самым теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* Приближение сферическими полиномами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1984. Т. 166. С. 186–200.
2. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* Аппроксимация функций на сфере // Известия АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, № 3. С. 635–651.
3. *Рустамов Х. П.* О приближении функций на сфере // Известия РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 5. С. 127–148.
4. *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
5. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 34. Гл. 4, § 2. (Итоги науки и техники).

6. *Камзолов А. И.* Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах // Мат. заметки. 1974. Т. 35, № 6. С. 967–978.
7. *Ragozin D. L.* Polynomial approximation on compact manifolds and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 150. P. 41–53.
8. *Иванов В. А.* О неравенствах Бернштейна — Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 3. С. 179–180.
9. *Luoqung L.* Riesz means on compact Riemannian symmetric spaces // Math. Nachr. 1994. V. 188. P. 227–242.
10. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
11. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
12. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
13. *Терехин А. П.* Равномерное приближение алгебраическими многочленами на сфере нечетномерного пространства // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 3. С. 333–341.
14. *Лизоркин П. И.* О приближении функций на сфере σ. О пространствах $B^{\alpha}_{p,q}(\sigma)$ // Докл. РАН. 1993. Т. 331, № 5. С. 555–558.
15. *Платонов С. С.* О теоремах джексоновского типа на компактном симметрическом пространстве ранга 1 // Докл РАН. 1997. Т. 357, № 4. С. 445–448.
16. *Платонов С. С.* О классах Никольского — Бесова на компактных симметрических пространствах ранга 1 // Тр. Петрозаводск. гос. ун-та. Сер. математика. 1996. Т. 1, вып. 3. С. 153–172.
17. *Платонов С. С.* Приближения функций на компактных симметрических пространствах ранга 1 // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 5. С. 113–130.
18. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 29 января 1998 г.

г. Петрозаводск
Петрозаводский гос. университет
platonov@mainpgu.karelia.ru