Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 512.58

АВТОМОРФНЫЕ ОБЪЕКТЫ В КАТЕГОРИЯХ

Э. Сибер

Аннотация: Автоморфное множество есть множество с произведением, для которого все левые трансляции являются автоморфизмами. Сделан обзор свойств этих алгебраических структур, а затем дано определение автоморфных объектов в категориях с конечными произведениями. Изучены свойства этих объектов и подкатегории, ими образованные. Такие автоморфные объекты в топологических категориях находят естественные приложения в теории кос, узлов и зацеплений. Библиогр. 8.

Введение

Теория автоморфных множеств является алгебраической теорией, которая находит естественные приложения при изучении групп кос, узлов и зацеплений.

Автоморфные множества — это множества с произведением, которое удовлетворяет алгебраическим эквивалентам второго и третьего преобразований Райдемайстера. Ранее они изучались также под другими названиями, например, рэк (англ. rack), см. [1] в качестве исторической справки.

В определение автоморфного множества можно добавить свойство, выражающее алгебраический эквивалент первого преобразования Райдемайстера. Такие автоморфные множества, называемые квандлами (англ. quandle) или леводистрибутивными группоидами, изучались в [2, 3]. Квандлы дают нам полный алгебраический инвариант неориентированных узлов и открывают новый путь для поиска более просто вычисляемых, например, полиномиальных инвариантов узлов.

Содержание работы следующее. В § 1 мы определяем автоморфные объекты в категории с конечными произведениями, а также даем определения специальных автоморфных объектов таких, как квандловые объекты, что является аналогом соответствующих определений Э. Брискорна [4]. Далее следуют определения подкатегорий автоморфных объектов и квандловых объектов в категории с конечными произведениями. В § 2 мы изучаем свойства автоморфных объектов. В частности, показываем, что определение автоморфных объектов в категории множеств соответствует определению автоморфных множеств. Затем доказываем, что диаграммы, выражающие свойства автоморфных множеств в [1], остаются справедливыми и в случае автоморфных объектов, что упрощает дальнейшие вычисления. В § 3 мы доказываем теоремы, связывающие автоморфные объекты и категории функторов. В § 4 даем примеры автоморфных объектов в различных категориях. Эти примеры происходят, главным образом, из работ Э. Брискорна [4], Р. Фенна и К. Рурка [1] и Д. Джойса [2]. Мы переформулируем некоторые из них на категорном языке и расширим определение Д. Джойса фундаментального квандла пары пространств, показывая, что это является следствием существования квандлового объекта в некоторой категории функторов.

§ 1. Основные определения

Сначала напомним определения автоморфных множеств и квандлов. Автоморфное множество определено в [4] как множество с произведением, т. е. пара $(X, *)$, где X — это множество, а $*$ — отображение $X \times X \to X$ такое, что все левые трансляции являются автоморфизмами. Другими словами, автоморфное множество определяется как множество X с произведением, удовлетворяющим следующим условиям:

$$\forall a, c \in X\ \exists! b \in X\ \ a * b = c; \quad \forall a, b, c \in X\ \ (a * b) * (a * c) = a * (b * c).$$

Квандлы определены раньше, чем автоморфные множества [2]. Квандл — это автоморфное множество $(X, *)$ такое, что

$$\forall a \in X \quad a * a = a.$$

Была введена категория **ASet** всех автоморфных множеств как подкатегория категории множеств **Set**. Объектами категории **ASet** являются автоморфные множества, а стрелками — морфизмы множеств с произведениями, т. е. отображения $\phi : c \to c'$ такие, что $\phi \circ \mu = \mu'(\phi \times \phi)$, где μ и μ' соответственно произведения для c и c'. Аналогично определяется категория квандлов **Quan**.

Определим теперь автоморфные объекты в категориях, т. е. с помощью объектов, стрелок и коммутативных диаграмм. Можно делать это для групп, как в [5], а также для любого другого типа алгебраических систем, но в случае автоморфных объектов диаграммы становятся более сложными. Мы всегда рассматриваем категорию с конечными произведениями C. Это означает, что для любых объектов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ из C существует произведение $c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n$ с проекциями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, обладающее обычным свойством универсальности. Категория обладает конечными произведениями тогда и только тогда, когда она имеет терминальный объект и произведение для любой пары объектов. Следовательно, имеется изоморфизм ассоциативности для любых трех объектов a, b, c из C, как определено в [5]: $\alpha : a \times (b \times c) \cong (a \times b) \times c$. В наших диаграммах мы будем опускать этот изоморфизм и для любых трех объектов a, b и c будем иметь в виду следующие отождествления: $a \times (b \times c) \cong (a \times b) \times c \cong a \times b \times c$. Определение объектов с использованием изоморфизма ассоциативности α приведет к результатам, соответствующим результатам из § 2, 3, но с присутствием изоморфизма α, где необходимо.

Пусть 1_C — тождественный функтор, а ΔC — диагональный функтор. Будем использовать следующие преобразования:

— диагональной морфизм $\delta : 1_C \to \Delta C$, сопоставляющий каждому объекту c из C стрелку $\delta_c : c \to c \times c$, которая определяется как единственное решение универсальной проблемы для каждого c: $p_1 \delta_c = p_2 \delta_c = 1_c$, где p_1 и p_2 — обычные проекции;

— морфизм перестановки $\tau : \Delta C \to \Delta C$, сопоставляющий каждому объекту c из C стрелку $\tau_c : c \times c \to c \times c$, которая определяется как единственное решение универсальной проблемы для каждого c: $p_1 \tau_c = p_2$, $p_2 \tau_c = p_1$. (Заметим, что $\tau_c \tau_c = 1_{c \times c}$.)

Определение 1.1. *Автоморфным объектом в категории с конечными произведениями* C называется тройка $\langle c, \mu, \gamma \rangle$, где c — объект C, μ и γ — две стрелки

$$\mu : c \times c \to c, \quad \gamma : c \times c \to c,$$

которые делают коммутативными следующие диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
c\times c\times c\times c \arrow[d, "1\times\tau_c\times 1"'] & c\times c\times c \arrow[l, "\delta_c\times 1\times 1"'] \arrow[r, "1\times\mu"] & c\times c \arrow[d, "\mu"] \\
c\times c\times c\times c \arrow[r, "\mu\times\mu"] & c\times c \arrow[r, "\mu"] & c,
\end{tikzcd}
\tag{$D1$}
$$

$$
\begin{tikzcd}
c\times c\times c \arrow[d, "1\times\gamma"'] & c\times c \arrow[l, "\delta_c\times 1"'] \arrow[r, "\delta_c\times 1"] \arrow[d, "p_2"'] & c\times c\times c \arrow[d, "1\times\mu"] \\
c\times c \arrow[r, "\mu"] & c & c\times c\ . \arrow[l, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\tag{$D2$}
$$

Замечание. Для объекта $c \in C$ из категории с конечными произведениями может существовать несколько автоморфных объектов $\langle c, \mu, \gamma\rangle$. Будем также говорить, что объект c из C *является автоморфным*, если существует по крайней мере одна тройка $\langle c, \mu, \gamma\rangle$, удовлетворяющая условиям определения 1.1.

Заметим, что можно дать следующее эквивалентное

Определение 1.1$'$. *Автоморфным объектом в категории с конечными произведениями* C называется пара $\langle c, \mu\rangle$, где c — это объект из C, μ — морфизм $\mu : c \times c \to c$, удовлетворяющий $D1$ и такой, что стрелка

$$(1 \times \mu)(\delta_c \times 1) : c \times c \to c \times c$$

обратима в C.

Важно заметить, что эти диаграммы эквивалентны таким:

$$
\begin{tikzcd}
c\times c\times c\times c \arrow[d, "1\times\tau\times 1"'] & c\times c\times c \arrow[l, "\delta_c\times 1\times 1"'] \arrow[rr, "1\times\mu"] & & c\times c \arrow[d, "\mu"] \\
c\times c\times c\times c \arrow[r, "\mu\times 1\times 1"'] & c\times c\times c \arrow[r, "1\times\mu"'] & c\times c \arrow[r, "\mu"'] & c,
\end{tikzcd}
\tag{$D3$} \Leftrightarrow (D1)
$$

$$
\begin{tikzcd}
c\times c \arrow[r, "\delta_c\times 1"] \arrow[d, "\delta_c\times 1"'] & c\times c\times c \arrow[r, "1\times\gamma"] & c\times c \arrow[d, "\delta_c\times 1"] \\
c\times c\times c \arrow[d, "1\times\mu"'] & \searrow 1_{c\times c} & c\times c\times c \arrow[d, "1\times\mu"] \\
c\times c \arrow[r, "\delta_c"'] & c\times c\times c \arrow[r, "1\times\gamma"'] & c\times c\ .
\end{tikzcd}
\tag{$D4$} \Leftrightarrow (D2)
$$

Определяем кандловые объекты.

Определение 1.2. *Кандловым объектом в категории с конечными произведениями* C называется автоморфный объект $\langle c, \mu, \gamma\rangle$, для которого морфизм μ удовлетворяет условию $\mu\delta_c = 1_c$, т. е. коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\delta_c"] \arrow[d, "1_c"'] & c\times c \arrow[d, "\mu"] \\
c \arrow[r, equal] & c\ .
\end{tikzcd}
$$

Следующие определения аналогичны данным в [4].

Определение 1.3. Автоморфный объект $\langle c, \mu, \gamma \rangle$ является
— *абелевым*, если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} c\times c\times c\times c & \xrightarrow{\mu\times\mu} & & & c\times c \\ {\scriptstyle 1\times\tau_c\times 1}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \mu} \\ c\times c\times c\times c & \xrightarrow{\mu\times\mu} & c\times c & \xrightarrow{\mu} & c, \end{array}$$

— *идемпотентным*, если $c \xrightarrow{\delta_c} c \times c \xrightarrow{\gamma} c = 1_c$,
— *инволютивным*, если $c \xrightarrow{\delta_c} c \times c \xrightarrow{\gamma} c \xrightarrow{\delta_c} c \times c \xrightarrow{\gamma} c = 1_c$,
— *инволюторным*, если $c \times c \xrightarrow{\delta_c} c \times c \times c \xrightarrow{1\times\mu} c \times c \xrightarrow{\mu} c = p_2$.

Определим некоторые наиболее важные подкатегории.

Определение 1.4. *Морфизм автоморфных* (соответственно *квандловых*) *объектов* $f : \langle c, \mu, \gamma \rangle \to \langle c', \mu', \gamma' \rangle$ есть стрелка $f : c \to c'$ такая, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} c\times c & \xrightarrow{\mu} & c \\ {\scriptstyle f\times f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ c'\times c' & \xrightarrow{\mu'} & c'\ . \end{array}$$

С такими морфизмами автоморфные (соответственно квандловые) объекты в C образуют категорию, которую будем обозначать символом $\mathbf{AObj_C}$ (соответственно $\mathbf{Quan_C}$). Следовательно, соответствие $\langle c, \mu, \gamma \rangle \to c$ определяет забывающий функтор $P : \mathbf{AObj_C} \to C$ (соответственно забывающий функтор $Q : \mathbf{Quan_C} \to C$).

Очевидно, что $\mathbf{Quan_C}$ есть подкатегория категории $\mathbf{AObj_C}$.

§ 2. Свойства автоморфных объектов

Напомним, что C — это категория с конечными произведениями. Все используемые стрелки будут или естественными преобразованиями, проекциями, морфизмами μ, γ, или композициями этих морфизмов, т. е. это стрелки из рассматриваемой категории.

Впоследствии будет возможно применить наши рассмотрения в специфических категориях. Например, они будут справедливы для топологических автоморфных множеств, т. е. автоморфных множеств в категории топологических пространств **Top**.

Предложение 2.1. *Если дана тройка $\langle c, \mu, \gamma \rangle$, где c — объект из C, а μ и γ — два морфизма $c \times c \to c$, удовлетворяющие условиям диаграмм $D1$ и $D2$, то γ единствен.*

Доказательство. Пусть $\zeta : c \times c \to c$ такое отображение, что $\langle c, \mu, \zeta \rangle$ — автоморфный объект в C. Построим следующую диаграмму, используя $D2$ и $D4$:

$$\begin{array}{ccccccc} c\times c & \xrightarrow{\delta_c\times 1} & c\times c\times c & \xrightarrow{1\times\zeta} & c\times c & \xrightarrow{\delta_c\times 1} & c\times c\times c \\ & & & & {\scriptstyle p_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1\times\mu} \\ & & & & c & \xleftarrow[\gamma]{} & c\times c\ . \end{array}$$

Применяя $D4$, упрощаем эту диаграмму и получаем $p_2(1 \times \zeta)(\delta_c \times 1) = \gamma$, так что $\zeta = \gamma$. $\square$

Это доказывает, что в категории множеств определение автоморфных объектов с помощью диаграмм эквивалентно данному в [1, 4]. Действительно, если рассмотрим для категории множеств **Set** категорию, объектами которой являются тройки $\langle c, \mu, \gamma \rangle$, где c из **Set**, μ — это стрелка $c \times c \to c$, для которой существует морфизм $\gamma : c \times c \to c$ такой, что $\langle c, \mu, \gamma \rangle$ — автоморфный объект в **Set**, то получаем в точности категорию автоморфных множеств **ASet**.

Следствие 2.2. *Определения* 1.1 *и* 1.1′ *эквивалентны.* $\square$

Для данного автоморфного объекта c из категории с конечными произведениями C пусть $\nu : c \times c \to c \times c$ — обратный морфизм для стрелки $(1 \times \mu)(\delta_c \times 1) : c \times c \to c \times c$. Имеем $\gamma = p_2 \nu$ и $\nu = (1 \times \gamma)(\delta_c \times 1)$. Покажем, что если $\langle c, \mu, \gamma \rangle$ — автоморфный объект из C, то тройка $\langle c, \gamma, \mu \rangle$ также является автоморфным объектом. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Если* $\langle c, \mu, \gamma \rangle$ *— автоморфный объект, то морфизм* γ *удовлетворяет* $D1$.

Доказательство. Сначала расширим два пути в диаграмме $D1$, используя естественные преобразования δ и τ. Получим коммутативную диаграмму, эквивалентную $D1$. Обратив в ней стрелки с помощью $D4$, придем к следующей диаграмме:

$$
\begin{tikzcd}
 & c\times c\times c \arrow[r, equal] \arrow[d, "\tau_c\times 1"'] & c\times c\times c \arrow[r, "1\times\delta_c\times 1"] & c\times c\times c\times c \arrow[d, "1\times 1\times\mu"] & \\
c\times c\times c\times c \arrow[d, "1\times 1\times\mu"] & c\times c\times c \arrow[l, "1\times\delta_c\times 1"'] & c\times c\times c\times c \arrow[u, "1\times 1\times\gamma"] & c\times c\times c \arrow[l, "1\times\delta_c\times 1"'] \arrow[d, "\tau_c\times 1"] & \\
c\times c\times c \arrow[r, "1\times\delta_c\times 1"] \arrow[d, "\tau_c\times 1"] & c\times c\times c\times c \arrow[u, "1\times 1\times\gamma"'] & & c\times c\times c \arrow[r, "1\times\delta_c\times 1"] & c\times c\times c\times c \arrow[d, "1\times 1\times\mu"'] \\
c\times c\times c \arrow[d, "\delta_c\times 1\times 1"] & c\times c\times c\times c \arrow[l, "1\times\gamma\times 1"'] & & c\times c\times c\times c \arrow[u, "1\times 1\times\gamma"] & c\times c\times c \arrow[l, "1\times\delta_c\times 1"'] \arrow[d, "\tau_c\times 1"'] \\
c\times c\times c\times c \arrow[r, "1\times\mu\times 1"] & c\times c\times c \arrow[u, "\delta_c\times 1\times 1"'] \arrow[d, "1\times\delta_c\times 1"'] & c\times c\times c\times c \arrow[l, "1\times 1\times\gamma"'] & c\times c\times c\times c \arrow[r, "1\times\gamma\times 1"] & c\times c\times c \arrow[d, "\delta_c\times 1\times 1"'] \\
 & c\times c\times c\times c \arrow[r, "1\times 1\times\mu"] & c\times c\times c \arrow[u, "1\times\delta_c\times 1"'] \arrow[r, equal] & c\times c\times c \arrow[u, "\delta_c\times 1\times 1"] & c\times c\times c\times c. \arrow[l, "1\times\mu\times 1"']
\end{tikzcd}
\tag{D5}
$$

Заметим, что в $D5$, поскольку мы пользовались $D4$, т. е. тем, что $(1 \times \mu)(\delta_c \times 1)$ обратим, мы можем заменить все стрелки, содержащие μ. Это дает коммутативную диаграмму, содержащую только γ. Тогда вычисление двух путей этой диаграммы, использующее соотношения, содержащие наши естественные преобразования, приведет к диаграмме $D1$ для γ. $\square$

Диаграмма $D4$ симметрична по отношению к μ и γ, следовательно, тройка $\langle c, \gamma, \mu \rangle$ является автоморфным объектом в категории C. Отсюда вытекает также, что для каждого объекта $\langle c, \mu, \gamma \rangle$ из $\mathbf{AObj_C}$ тройка $\langle c, \gamma, \mu \rangle$ также представляет собой объект из $\mathbf{AObj_C}$. Аналогичное утверждение, очевидным образом, справедливо для квандловых объектов в C и для подкатегории $\mathbf{Quan_C}$.

Остается только заметить, что если $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ — квандловый объект, то имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\delta_c"] \arrow[d, "\delta_c"'] & c \times c \arrow[r, "\gamma"] & c \\
c \times c \arrow[r, "1\times\delta_c"] & c \times c \times c. \arrow[u, "1\times\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Поскольку справедливо равенство $(1 \times \delta_c)\delta_c = (\delta_c \times 1)\delta_c$, нужный результат получается с использованием $D2$.

Приведем несколько свойств специфических автоморфных объектов, введенных в определениях 1.2 и 1.3.

Предложение 2.4. *Для автоморфного объекта $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ имеют место следующие коммутативные диаграммы, а также диаграммы, полученные из приведенных ниже перестановкой μ и γ:*

(1) $c \xrightarrow{\delta_c} c \times c \xrightarrow{\mu} c \xrightarrow{\delta_c} c \times c \xrightarrow{\gamma} c = 1_c$,

(2)

$$\begin{tikzcd}
c \times c \times c \times c \arrow[d, "1\times\tau_c\times1"'] & c \times c \times c \arrow[l, "\delta_c\times1\times1"'] \arrow[r, "1\times\mu"] & c \times c \arrow[d, "\gamma"] \\
c \times c \times c \times c \arrow[r, "\gamma\times\gamma"] & c \times c \arrow[r, "\mu"] & c,
\end{tikzcd}$$

(3)

$$\begin{tikzcd}
c \times c \arrow[r, "\delta_c\times1"] \arrow[d, "\mu"'] & c \times c \times c \arrow[d, "\gamma\times1"] \\
c & c \times c. \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Доказательство. (1) вытекает из $D4$ после взятия композиции с δ_c, поскольку $(\delta_c \times 1)\delta_c = (1 \times \delta_c)\delta_c$;

(2) вытекает из диаграммы, которая является следствием $D5$, и из вычислений, аналогичных проведенным в теореме 2.3;

(3) вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
c \times c \arrow[d, "\delta_c\times1"'] & c \times c \times c \arrow[l, "1\times\mu"'] & c \times c \arrow[l, "\delta_c\times1"'] \arrow[d, "\delta_c\times1"] \\
c \times c \times c \arrow[d, "1\times\gamma"'] & & c \times c \times c \arrow[d, "\gamma\times1"] \\
c \times c \arrow[r, "\delta_c\times1"] & c \times c \times c \arrow[r, "\gamma\times1"] & c \times c.
\end{tikzcd}$$

Поскольку $p_1(\delta_c \times 1) = p_2(\delta_c \times 1)$, имеем

$$(\gamma \times 1)(\delta_c \times 1)(1 \times \gamma)(\delta_c \times 1) = (\gamma \times \gamma)(1 \times \tau_c \times 1)(\delta_c \times 1 \times 1)(\delta_c \times 1).$$

После композиции с μ из (2) и $D2$ следует (3). $\square$

Следующий факт выводится непосредственно из (1).

Следствие 2.5. *Определения квандлового и идемпотентного автоморфного объектов в категории C эквивалентны.* $\square$

§ 3. Категорные свойства автоморфных объектов

Как и ранее, C — категория с конечными произведениями. В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 3.1. *Пусть f — морфизм в подкатегории $\mathbf{AObj_C}$ между двумя объектами $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ и $\langle c', \mu', \gamma'\rangle$. Тогда f является также морфизмом между двумя объектами $\langle c, \gamma, \mu\rangle$ и $\langle c', \gamma', \mu'\rangle$.*

Доказательство. Используя диаграмму $D4$ для автоморфных объектов $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ и $\langle c', \mu', \gamma'\rangle$ и тот факт, что f — морфизм в $\mathbf{AObj_C}$, т. е. $\mu'(f \times f) = f\mu$, легко получить результат $\gamma'(f \times f) = f\gamma$, который требовался. $\square$

Следующий факт был доказан в [5] для случая групп. Мы отсылаем читателя к работе [5] за точными определениями.

Теорема 3.2. *В категории C с конечными произведениями объект c автоморфен тогда и только тогда, когда функтор* hom, *обозначаемый также через $C(-, c)$, является автоморфным объектом в категории функторов $\mathbf{Set}^{C^{op}}$.*

Доказательство. Для каждого объекта c с произведением μ мы можем определить произведение $\bar{\mu}$ для функтора hom:

$$C(-, c) = \hom(-, c) : C^{op} \to \mathbf{Set}$$

по формуле

$$\bar{\mu} : C(-, c) \times C(-, c) \to C(-, c \times c) \to C(-, c),$$

где первая стрелка — естественный изоморфизм

$$C(-, c) \times C(-, c) \cong C(-, c \times c),$$

а вторая стрелка есть μ_*, т. е. композиция с μ слева. Обратно, лемма Йонеды дает биекцию

$$\mathrm{Nat}(C(-, c \times c), C(-, c)) \cong C(c \times c, c),$$

которая переводит каждое естественное преобразование $\alpha : C(-, c \times c) \to C(-, c)$ в $\alpha_{c\times c}1_{c\times c}$. Тем самым если дано естественное преобразование $\nu : C(-, c \times c) \to C(-, c)$, то получаем единственный морфизм $\mu : c \times c \to c$ такой, что $\nu = \mu_*$. Соотношение между ν и μ состоит в том, что $\mu = \nu_{c\times c}1_{c\times c}$. Это определяет μ для данного ν и

$$\forall a \in C\, \forall f, g \in C(a, c) \quad \nu_a((f \times g)\delta_a) = \mu(f \times g)\delta_a,$$

что определяет ν для данного μ. Предположим теперь, что c — автоморфный объект в C. Пусть $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ — тройка, которая дает c автоморфную структуру. Морфизм δ, определенный в § 1, представляет собой естественное преобразование между двумя функторами $C(-, c)$ и $\Delta C(-, c) = C(-, c) \times C(-, c)$, и таковым же является τ. Определение морфизма $\bar{\mu} : C(-, c) \times C(-, c) \to C(-, c)$ таково, что каждому объекту a из C он сопоставляет стрелку $\bar{\mu}_a : C(a, c) \times C(a, c) \to C(a, c)$, которая переводит любые два морфизма $f, g \in C(a, c)$ в $\mu(f \times g)\delta_a$. Поскольку для каждой стрелки $f : a \to a'$ имеем равенство $\delta_{a'}f = (f \times f)\delta_a$, морфизм $\bar{\mu}$ является естественным преобразованием между двумя функторами $C(-, c) \times C(-, c)$ и $C(-, c)$ из категории функторов $\mathbf{Set}^{C^{op}}$, т. е. это морфизм в данной категории. Чтобы доказать, что условие $D1$ выполняется для

$\langle C(-,c),\bar\mu\rangle$, легко показать, что для любого a из C и любых $f,g,h\in C(a,c)$ выполняется следующее:

$$\begin{aligned}
&\bar\mu_a(\bar\mu_a\times\bar\mu_a)(1\times\tau_{C(a,c)}\times 1)(\delta_{C(a,c)}\times 1\times 1)(f\times g\times h)\\
&\quad=\mu(\mu\times\mu)((1\times\tau_{C(a,c)}\times 1)(\delta_{C(a,c)}\times 1\times 1)(f\times g\times h))(\delta_a\times\delta_a)\delta_a\\
&\qquad=\mu(\mu\times\mu)(1\times\tau_c\times 1)(\delta_c\times 1\times 1)(f\times g\times h)(1\times\delta_a)\delta_a)\\
&\qquad\quad=\mu(f,\mu(g\times h)\delta_a)\delta_a=\bar\mu_a(1_{C(a,c)}\times\bar\mu_a)(f\times g\times h).\qquad (S1)
\end{aligned}$$

Поскольку $\langle c,\gamma,\mu\rangle$ является автоморфным объектом в C, существует естественное преобразование $\bar\gamma: C(-,c)\times C(-,c)\to C(-,c)$, соответствующее γ. Из леммы 3.1 следует, что $\bar\gamma$ также естественное преобразование. Теперь мы видим, что $\langle C(-,c),\bar\mu,\bar\gamma\rangle$ удовлетворяет условию $D2$, ибо для каждого a из C и для любых $f,g,h\in C(a,c)$ верны равенства

$$\begin{aligned}
&\bar\gamma_a(1_{C(a,c)}\times\bar\mu_a)(\delta_{C(a,c)}\times 1)(f\times g)=\gamma(f,\mu(f\times g)\delta_a)\delta_a\\
&\quad=\gamma(1\times\mu)((\delta_{C(a,c)}\times 1)(f\times g))\delta_a=\gamma(1\times\mu)(\delta_c\times 1)((f\times g)\delta_a)=g\qquad (S2)
\end{aligned}$$

и $S3$, которое получается заменой μ на ν в $S2$. Следовательно, hom-функтор $C(-,c)$ — автоморфный объект в категории функторов $\mathbf{Set}^{C^{op}}$.

Обратно, если $C(-,c)$ — автоморфный объект в $\mathbf{Set}^{C^{op}}$, то для тройки $\langle C(-,c),\bar\mu,\bar\gamma\rangle$ мы можем определить $\mu=\bar\mu_{c\times c}(p_1,p_2)$ и $\gamma=\bar\gamma_{c\times c}(p_1,p_2)$, где p_1 и p_2 — две проекции $c\times c\to c$. Также определяем $\nu: C(-,c\times c)\to C(-,c)$, соответствующее $\bar\mu$, так что

$$\bar\mu_a(f\times g)=\nu_a((f\times g)\delta_a)\quad\text{для } a\in C \text{ и } f,g\in C(a,c),$$
$$\nu_a(f)=\bar\mu_a(p_1f\times p_2f)\quad\text{для } a\in C \text{ и } f\in C(a,c\times c).$$

Таким образом, получаем следующее соотношение между μ и $\bar\mu$ для любых $a\in C$ и $f,g\in C(a,c)$:

$$\mu(f\times g)\delta_a=\bar\mu_{c\times c}(p_1\times p_2)(f\times g)\delta_a=\nu_{c\times c}1_{c\times c}(f\times g)\delta_a=\nu_a((f\times g)\delta_a)=\bar\mu_a(f\times g),$$

поскольку имеется коммутативная диаграмма (ν — естественное преобразование)

$$\begin{tikzcd}
C(c\times c,c\times c) \arrow[r, "\nu_{c\times c}"] \arrow[d, "((f\times g)\delta_a)^*"'] & C(c\times c,c) \arrow[d, "((f\times g)\delta_a)^*"] \\
C(a,c\times c) \arrow[r, "\nu_a"] & C(a,c)\ .
\end{tikzcd}$$

Имеем также соответствующее соотношение между γ и $\bar\gamma$ для любых $a\in C$ и $f,g\in C(a,c)$:

$$\gamma(f\times g)\delta_a=\bar\gamma_a(f\times g).$$

Таким образом, мы можем применить $S1$ к $a=c\times c\times c$ и $f=p_1$, $g=p_2$ и $h=p_3$ в $C(c\times c\times c,c)$, а также $S2$ и $S3$ к $a=c\times c$, $f=p_1$ и $g=p_2$ в $C(c\times c,c)$ и получить $D1$ и $D2$. □

Предложение 3.3. *Функтор $T: B\to\mathbf{Set}$ является автоморфным (соответственно квандловым) объектом в категории функторов $\mathbf{Set}^B$ тогда и только тогда, когда для каждого объекта b и любой стрелки f из B Tb есть автоморфное (соответственно квандловое) множество и Tf есть морфизм автоморфных множеств.*

Доказательство. Пусть $T: B\to\mathbf{Set}$ — автоморфный объект в категории $\mathbf{Set}^B$, объектами которой являются функторы $B\to\mathbf{Set}$, а стрелками — естественные преобразования между двумя такими функторами. Тогда существуют два естественных преобразования $\mu, \gamma : T \times T \to T$ такие, что тройка $\langle T, \mu, \gamma\rangle$ удовлетворяет $D1$ и $D2$. Следовательно, для каждого объекта b из B тройка $\langle Tb, \mu_b, \gamma_b\rangle$ также удовлетворяет этим диаграммам, значит, является автоморфным объектом в категории **Set**, т. е. автоморфным множеством. Более того, для каждого объекта b и каждой стрелки $b \xrightarrow{f} b'$ из B имеем коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
Tb \times Tb \arrow[r, "\mu_b"] \arrow[d, "Tf \times Tf"'] & Tb \arrow[d, "Tf"] \\
Tb' \times Tb' \arrow[r, "\mu_{b'}"] & Tb',
\end{tikzcd}$$

который в точности означает, что для каждой стрелки f из B Tf будет морфизмом автоморфных объектов в категории **Set**, т. е. морфизмом автоморфных множеств.

Предположим теперь, что для каждого объекта b и каждой стрелки $b \xrightarrow{f} b'$ из B Tb есть автоморфное множество и $Tf : Tb \to Tb'$ — морфизм автоморфных множеств. Каждому Tb с произведением μ_b таким, что (Tb, μ_b) — автоморфное множество, сопоставляем две стрелки $\mu_b, \gamma_b : Tb \times Tb \to Tb$ из категории **Set** такие, что $\langle Tb, \mu_b, \gamma_b\rangle$ является автоморфным объектом в **Set** с γ_b, единственным образом определяемым из предложения 2.1. Затем определяем μ (соответственно γ), сопоставляя каждому объекту b из B стрелку μ_b (соответственно γ_b). Для каждой стрелки $b \xrightarrow{f} b'$ из B Tf является морфизмом автоморфных множеств между Tb и Tb'. Следовательно,

$$\mu_{b'}(Tf \times Tf) = Tf\mu_b,$$

и вышеприведенный квадрат коммутативен. Лемма 3.1 дает соответствующий квадрат для γ. Значит, μ и γ суть естественные преобразования $T \times T \to T$, и тройка $\langle T, \mu, \gamma\rangle$ есть автоморфный объект в $B \to$ **Set**. $\square$

В категории **ASet** можно определить несколько произведений. Например, декартово произведение, определенное в [4], есть произведение **ASet**. В категории C имеется соответствующее свойство.

Предложение 3.4. *Пусть C — категория с конечными произведениями, а $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ и $\langle c', \mu', \gamma'\rangle$ — два автоморфных (соответственно квандловых) объекта в C. Тогда произведение $c \times c'$ — автоморфный (соответственно квандловый) объект в C.*

Доказательство. Для двух объектов c и c' рассмотрим произведение $c \times c' \times c \times c'$ в C. Оно имеет четыре проекции p_1, p_2, p_3, p_4 с обычными свойствами универсальности. Тогда мы можем определить стрелку $\nu : c \times c' \times c \times c' \to c \times c'$ по формуле $\nu = (\mu \times \mu')(p_1 \times p_3 \times p_2 \times p_4)$. Соответственно определяем $\zeta = (\gamma \times \gamma')(p_1 \times p_3 \times p_2 \times p_4)$. С использованием свойств проекций нетрудно показать, что диаграммы $D1$ и $D2$ коммутативны для тройки $\langle c \times c', \nu, \zeta\rangle$. Следовательно, $c \times c'$ — атоморфный объект в C.

Для двух квандловых объектов c и c' очевидно, что в дополнение к предыдущему $\nu\delta_{c\times c'} = 1_{c\times c'}$, поскольку $p_1\delta_{c\times c'} = p_3\delta_{c\times c'}$ и $p_2\delta_{c\times c'} = p_4\delta_{c\times c'}$, что и приводит к требуемому результату. $\square$

Предложение 3.5. *Для категории C с конечными произведениями существует функтор $B : \mathbf{AObj_C} \to \mathbf{Quan_C}$, который переводит каждый автоморфный объект $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ в квандловый объект $\langle c, \mu', \gamma'\rangle$, где μ' и γ' определены по формулам $\mu' = \mu(1 \times \gamma)(1 \times \delta_c)$ и $\gamma' = \gamma(1 \times \mu)(1 \times \delta_c)$.*

Доказательство следует из расширенной диаграммы, вытекающей из $D1$, в которой мы заменили μ на μ' и где два пути пока не соединяем в конце. Расширяя каждую ветвь и упрощая с использованием предложения 2.4 и $D2$, получаем в конце коммутативную диаграмму, эквивалентную $D1$ для μ'. Аналогичная техника показывает, что коммутативность каждого квадрата диаграммы $D2$ выполняется для $\langle c, \mu', \gamma'\rangle$. В конце используем левый квадрат $D2$, чтобы показать, что $\langle c, \mu', \gamma'\rangle$ — квандл. $\square$

§ 4. Примеры

Пример 1. Пусть C — произвольная категория с конечными произведениями. Тогда C обладает произведением пустого набора объектов, что является терминальным объектом t в C, т. е. для каждого объекта c из C существует в точности одна стрелка $c \to t$. Тогда $\langle t, \mu, \mu\rangle$, где μ — единственная стрелка $t \times t \to t$, есть автоморфный (и даже квандловый) объект в C.

Пример 2. Рассмотрим категорию $\mathbf{ASet}$.

Предложение 4.1. *Автоморфные объекты $\mathbf{ASet}$ суть в точности абелевы автоморфные множества в категории $\mathbf{Set}$.*

Доказательство. Вспомним, что категория $\mathbf{ASet}$ имеет конечные произведения, которые являются декартовыми произведениями. Пусть $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ — автоморфный объект в категории $\mathbf{ASet}$. Эта категория будет подкатегорией категории $\mathbf{Set}$, следовательно, $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ — автоморфный объект в $\mathbf{Set}$, значит, множество c с произведением μ автоморфно. Поскольку μ — стрелка из $\mathbf{ASet}$, т. е. морфизм автоморфных множеств, он должен удовлетворять равенству $\mu(\mu(a, b), \mu(a', b')) = \mu(\mu(a, a'), \mu(b, b'))$ для любых $a, a', b, b' \in c$. Значит, $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ представляет собой абелев автоморфный объект в $\mathbf{Set}$, т. е. абелево автоморфное множество.

Теперь пусть $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ — абелев автоморфный объект в $\mathbf{Set}$. Тогда (c, μ) — автоморфное множество. Но μ удовлетворяет приведенному выше соотношению. Следовательно, μ также морфизм между автоморфными множествами $c \times c$ и c. То же самое выполняется для γ, так что μ и γ являются стрелками в категории $\mathbf{ASet}$. Тогда для $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ выполнены диаграммы $D1$ и $D2$, т. е. $\langle c, \mu, \gamma\rangle$ — автоморфный объект в $\mathbf{ASet}$. $\square$

Пример 3. Пусть C — категория $\mathbf{Ab}$, объектами которой являются все абелевы группы, а стрелками — морфизмы групп. Произведение в $\mathbf{Ab}$ — декартово произведение. Каждый объект из $\mathbf{Ab}$ является автоморфным. Действительно, для каждого объекта c из $\mathbf{Ab}$ стрелка $\mu = \gamma = p_2 : c \times c \to c$ есть морфизм из $\mathbf{Ab}$, и для объекта $\langle c, \mu, \gamma\rangle$, очевидно, коммутативны диаграммы $D1$ и $D2$. Следовательно, это автоморфный объект в $\mathbf{Ab}$.

Пример 4. Пусть C — категория $\mathbf{Grp}$, объектами которой являются все группы, а морфизмами — гомоморфизмы групп. Мы видели в предыдущем примере, что объекты подкатегории $\mathbf{Ab}$ абелевых групп автоморфны, значит, они суть автоморфные объекты в $\mathbf{Grp}$. Однако каждая группа может быть наделена автоморфной структурой, т. е. каждая группа в **Set** также автоморфный объект в **Set**. Имеется функтор $S : \mathbf{Grp} \to \mathbf{ASet}$, который сопоставляет каждой группе $(g, \times_g)$ тройку $\langle g, \mu_g, \gamma_g \rangle$, где μ_g и γ_g — две операции сопряжения в g:

$$\mu(a, b) = aba^{-1}, \quad \gamma(a, b) = a^{-1}ba,$$

а каждой стрелке $g \xrightarrow{f} g'$ — ее самое: $\langle g, \mu_g, \gamma_g \rangle \xrightarrow{f} \langle g', \mu_{g'}, \gamma_{g'} \rangle$. Следовательно, **Grp** с помощью функтора S определяет подкатегорию категории **ASet**. Более того, образ функтора S лежит в **Quan**, и **Grp** определяет также подкатегорию категории **Quan**, т. е. в **Grp** каждый объект может быть наделен структурой квандла. Функтор S — забывающий функтор из **Grp** в **Quan**, так как он забывает часть групповой структуры, сохраняя классы сопряженности каждой группы.

Функтор S имеет левый сопряженный $T : \mathbf{ASet} \to \mathbf{Grp}$, который сопоставляет каждому объекту c группу g с образующими $\{u_a \mid a \in c\}$ и соотношениями $\{u_{\mu(a,b)} = u_a u_b u_a^{-1} \mid a, b \in c\}$ и каждой стрелке $f : c \to c'$ из **ASet** — стрелку Tf, определенную на образующих по формуле $Tf(u_a) = v_{f(a)}$, на произведении по формуле $Tf(u_a u_b) = v_{f(a)} v_{f(b)}$, где $\{v_y \mid y \in c'\}$ — образующие $g' = Tc'$. Для автоморфного множества c группа Tc является ассоциированной группой из [1].

В [2] используется сердцевина (англ. core) группы g, которая также является квандлом. Здесь операция определяется по формуле

$$\mu(a, b) = \gamma(a, b) = ab^{-1}a$$

и мы получаем другой функтор $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Quan}$, который имеет левый сопряженный, определяемый сходным образом. Это пример инволютивного автоморфного множества.

Пример 5 восходит к работам [1, 2, 4]. Пусть $K = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ — кольцо полиномов Лорана. Каждый объект категории **Set**, являющийся K-модулем, есть также автоморфный объект в **Set**, который может быть описан следующим образом. Пусть C — категория K-**Mod**, объектами которой являются модули над K, а морфизмами — линейные отображения. Каждый объект из C может получить автоморфную структуру, поскольку мы имеем функтор $V : K\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{ASet}$, который сопоставляет каждому K-модулю M квандл $\langle M, \mu_M, \gamma_M \rangle$, где

$$\mu_M : a, b \in M \mapsto (1 - t)a + tb, \quad \gamma_M : a, b \in M \mapsto (1 - t^{-1})a + t^{-1}b,$$

а каждой стрелке $M \xrightarrow{f} M'$ — стрелку $\langle M, \mu_M, \gamma_M \rangle \xrightarrow{f} \langle M', \mu_{M'}, \gamma_{M'} \rangle$. Следовательно, получаем также, что K-**Mod** будет подкатегорией категории **ASet**. Как и в предыдущем примере, образ функтора V лежит в **Quan** и K-**Mod** определяет подкатегорию категории **Quan**, и каждый ее объект может быть оснащен квандловой структурой. Мы можем определить левый сопряженный $W : \mathbf{ASet} \to K\text{-}\mathbf{Mod}$ к функтору V таким же образом, как в примере 4.

Джойс показал в [2], что V сопоставляет полиномиальному узловому инварианту Александера (который определяет K-модуль) некоторый квандл, изоморфный абелеанизации квандла узла (который будет определен в примере 8). Обратно, W сопоставляет фундаментальному квандлу узла инвариант Александера.

Пример 6. В предыдущем примере мы можем заменить $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ кольцом $\mathbb{Z}[t, t^{-1}, s]$, профакторизованным по идеалу $(s(t + s - 1))$, и определить

$$\mu_M : a, b \in M \mapsto sa + tb, \quad \gamma_M : a, b \in M \mapsto t^{-1}(b - sa).$$

Это пример абелева автоморфного множества.

Пример 7. Это основополагающий пример Джойса [2]. Сначала напомним определение фундаментального группоида топологического пространства X. *Группоидом* называется категория, в которой каждая стрелка обратима. Фундаментальный группоид $\pi(X)$ топологического пространства X имеет объектами точки пространства X, а стрелками $x \to x'$ — гомотопические классы путей из x в x'. Тогда для любого $x \in X$ имеем группу $\hom_{\pi(X)}(x, x)$, а для любых $x, x' \in X$ группы $\hom_{\pi(X)}(x, x)$ и $\hom_{\pi(X)}(x', x')$ изоморфны, как только существует стрелка $x \to x'$. Мы можем выбрать базисную точку x в X, и если топологическое пространство X линейно связно, то группа $\hom_{\pi(X)}(x, x)$ называется *фундаментальной группой* пространства X, которая вместе с множеством точек пространства X определяет фундаментальный группоид пространства X. Рассмотрим категорию $\mathbf{Toph}_*$ топологических пространств с базисной точкой, морфизмами которой являются гомотопические классы сохраняющих базисные точки непрерывных отображений. Пусть S — единичная окружность комплексной плоскости с базисной точкой $s = 1$ и X_x — объект из $\mathbf{Toph}_*$. Тогда фундаментальная группа пространства X_x состоит из множества морфизмов $\mathbf{Toph}_*(S_s, X_x)$.

Если определить групповые объекты в категории с конечными произведениями так, как это сделано в [5], получаем следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Функтор* $\mathbf{Toph}_*(S_s, -)$ *является групповым объектом в категории функторов* $\mathbf{Set}^{\mathbf{Toph}_*}$.

Доказательство. Легко показать, что аналог предложения 3.3 справедлив в случае групповых объектов в категориях. Затем, чтобы показать, что функтор $\mathbf{Toph}_*(S_s, -)$ является групповым объектом в категории функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{Toph}_*}$, достаточно доказать, что каждая стрелка f в $\mathbf{Toph}_*$ определяет гомоморфизм групп. Это немедленно вытекает из определения композиции петель и того, что морфизмы из $\mathbf{Toph}_*$ сохраняют базисные точки. □

Пусть C — категория пар топологических пространств с отмеченной точкой, объектами которой являются пары топологических пространств (X, Y), где $Y \subset X$, с базисной точкой $x \in X \setminus Y$. Ее морфизмами являются гомотопические классы непрерывных отображений, сохраняющих базисные точки $f : (X, Y) \to (X', Y')$, где $f^{-1}(Y') = Y$ и $f(x) = x'$. Пусть G — фундаментальный группоид пространства $X \setminus Y$ с базисной точкой x. Рассмотрим пару $(N, \{O\})$, определенную следующим образом: N — объединение на комплексной плоскости замкнутого единичного диска D с базисной точкой z, расположенной на вещественной оси, так что $z > 1$, и сегмента между ними, O — начало координат. Определим *аркан* как морфизм $\nu : (N, \{O\}) \to (X, Y)$. Пусть ∂N — ориентированная граница N. Ограничение аркана ν на ∂N определяет гомотопический класс петель в $(X \setminus Y, x)$, т. е. морфизм $x \to x$ в G. Мы получаем отображение аугментации

$$\partial : C((N, \{O\}), (X, Y)) \to \pi_1(X \setminus Y, x),$$

где $C((N, \{O\}), (X, Y))$ — множество гомотопических классов непрерывных отображений из $(N, \{O\})$ в (X, Y). Имеется также естественное действие фундаментальной группы $\pi_1(X \setminus Y, x)$ на $C((N, \{O\}), (X, Y))$. Для элемента γ из фундаментальной группы и элемента ν из $C((N, \{O\}), (X, Y))$ определим $\gamma.\nu$ следующим образом:

$\gamma.\nu$ отображает замкнутый единичный диск D на X так, как это делает ν, т. е. $\gamma.\nu_{|D} = \nu_{|D}$,

$\gamma.\nu$ отображает сегмент $\left[1, \frac{1+z}{2}\right]$ на X по формуле $\gamma.\nu(t) = \nu(2t-1)$,

$\gamma.\nu$ отображает сегмент $\left[\frac{1+z}{2}, z\right]$ на $X \setminus Y$ по формуле $\gamma.\nu(t) = \gamma\left(\frac{t-(1+z)/2}{(z-1)/2}\right)$.

Следовательно, $\gamma.\nu$ есть морфизм $(N, \{O\}) \to (X, Y)$. Имеем соотношение

$$\partial(\gamma.\nu) = \gamma\partial\nu\gamma^{-1}.$$

Определим произведение μ на множестве морфизмов $C((N, \{O\}), (X, Y))$ по формуле $\mu(a, b) = \partial a.b$. Тогда $\langle C((N, \{O\}), (X, Y)), \mu, \gamma\rangle$, где $\gamma(a, b) = \partial a^{-1}.b$, есть квандл. Это фундаментальный квандл пары пространств, определенный в [2, 3]. Мы можем рассмотреть ковариантный hom-функтор $C((N, \{O\}), -) : C \to \mathbf{Set}$, который переводит каждый объект (X, Y) в множество морфизмов $C((N, \{O\}), (X, Y))$ и каждую стрелку f из C в композицию с f слева.

Теорема 4.3. *$C((N, \{O\}), -)$ есть квандловый объект в категории функторов $\mathbf{Set}^C$ и, следовательно, определяет функтор $C \to$* **Quan**.

Доказательство. Нужно показать, что для любого морфизма f между парами (X, Y) и (X', Y') $\hom((N, \{O\}), f)$ есть морфизм автоморфных множеств между $C((N, \{O\}), (X, Y))$ и $C((N, \{O\}), (X', Y'))$. Для любых $a, b \in C((N, \{O\}), (X, Y))$ нужно сравнить $f(\partial a.b)$ и $\partial f(a).f(b)$. Согласно данному выше определению имеем следующие равенства для $f(\partial a.b)$:

$f(\partial a.b)_{|D} = fb_{|D}$,

$f(\partial a.b)(t) = fb(2t-1)$, $t \in \left[1, \frac{1+z}{2}\right]$,

$f(\partial a.b)(t) = f\partial a\left(\frac{t-(1+z)/2}{(z-1)/2}\right)$, $t \in \left[\frac{1+z}{2}, z\right]$,

и для $\partial f(a).f(b)$:

$(\partial f(a).f(b))_{|D} = f(b)_{|D}$,

$(\partial f(a).f(b))(t) = f(b(2t-1))$, $t \in \left[1, \frac{1+z}{2}\right]$,

$(\partial f(a).f(b))(t) = \partial f(a)\left(\frac{t-(1+z)/2}{(z-1)/2}\right)$, $t \in \left[\frac{1+z}{2}, z\right]$.

Ограничение на D пропускается через гомотопию, следовательно, нужно только проверить, что $f\partial a = \partial f(a)$. Нужно выбрать представитель α для гомотопического класса a и представитель ϕ для f. Тогда $\phi(\alpha)$ — представитель гомотопического класса $f(a)$. Теперь определим $\partial\alpha$ и $\partial\phi(\alpha)$ в качестве представителей гомотопических классов петель ∂a и $\partial f(a)$ с помощью следующего описания ∂: ∂a есть гомотопический класс $\partial\alpha$, определенный по формулам

$\partial\alpha(t) = \alpha(z + 4t(1-z))$, $\quad 0 \le t \le \frac{1}{4}$,

$\partial\alpha(t) = \alpha(e^{2\pi i(2t-1/2)})$, $\quad \frac{1}{4} \le t \le \frac{3}{4}$,

$\partial\alpha(t) = \alpha(1 + (4t-3)(z-1))$, $\quad \frac{3}{4} \le t \le 1$.

Тогда, очевидно, имеем $\phi\partial\alpha = \partial(\phi\alpha)$. Следовательно, гомотопические классы $f\partial a$ и $\partial(f(a))$ совпадают. Значит, f — морфизм автоморфных множеств. □

Пример 8. Пусть C обозначает ту же категорию, что и в примере 7. Рассмотрим узел, т. е. объект (S^3, K) из C, где K — подпространство S^3, гомеоморфное окружности. Пусть ϵ — образующая $H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$. Рассмотрим композицию $f : C((N, \{O\}), (S^3, K)) \to H_1(S^3 \setminus K)$ отображения ∂ с отображением абелеанизации $\pi_1(S^3 \setminus K) \to H_1(S^3 \setminus K)$. Тогда $f^{-1}(\epsilon)$ — квандл, а именно квандл узла, определенный в [2, 3], где доказано, что это инвариант узла K, т. е. два неориентированных ручных узла эквивалентны тогда и только тогда, когда их квандлы изоморфны.

Аналогичным образом в [1] дано обобщение фундаментального квандла и квандла узла, соответственно фундаментальный рэк зацепления, где под зацеплением понимается вложение коразмерности два одного многообразия в другое и фундаментальный рэк с аугментацией неприводимого зацепления в замкнутом связном трехмерном многообразии. В [1] доказано, что эти объекты являются полными инвариантами зацепления и трехмерного многообразия.

Пример 9. Рассмотрим евклидово пространство E с положительно определенной симметричной билинейной формой $(\ ,\ )$. Тогда $E \setminus 0$ может быть оснащено структурой автоморфного множества с произведением μ, определяемым для пары ненулевых векторов (α, β) по формуле $\mu(\alpha, \beta) = \sigma_\alpha(\beta)$, где σ_α — отражение относительно гиперплоскости $P_\alpha = \{\beta \in E | (\beta, \alpha) = 0\}$, определяемой по формуле

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Предложение 4.4. *Пусть Φ — конечное автоморфное подмножество $E \setminus 0$, порождающее E и такое, что*

$$\mu(\alpha, \beta) - \beta \in \mathbb{Z}$$

для всех $\alpha, \beta \in \Phi$. Тогда Φ — (неприведенная) корневая система.

Доказательство. Множество Φ конечно, порождает E и не содержит 0. Это первая аксиома для корневой системы (см., например, [6]). Если $\alpha \in \Phi$, то $\sigma_\alpha(\beta) = \mu(\alpha, \beta) \in \Phi$ для любого $\beta \in \Phi$, следовательно, σ_α оставляет Φ инвариантным. Это вторая аксиома для корневой системы. Наконец, если $\alpha, \beta \in \Phi$, то

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \beta - \mu(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}.$$

Это последняя аксиома для корневой системы. Значит, Φ — неприведенная корневая система в E. $\square$

Обратно, любая приведенная корневая система в E будет автоморфным множеством в E с произведением μ, определенным выше.

Определение этого автоморфного множества в E сохраняется для векторного пространства и произвольной симметричной билинейной формы. Тогда автоморфным множеством является множество неизотропных векторов с произведением, определенным выше.

Пример 10 представляет собой обобщение предыдущего примера, приведенное в [1]. Рассмотрим коммутативное кольцо R с единицей и сопряжением, т. е. инволютивным изоморфизмом. Пусть M — R-модуль с эрмитовой формой

$$(\ ,\ ) : M \times M \to R,$$

а U_M — множество, состоящее из элементов $a \in M$ таких, что $(a, a) = 1$, а элементы $v \in R$ определяются тем, что $v\bar{v} = 1$. Тогда U_M есть автоморфное множество с произведением μ, определенным по формуле

$$\mu(a, b) = b + (v - 1)(b, a)a.$$

В случае, когда $R = \mathbb{R}$ с сопряжением, равным тождественному морфизму, а M является векторным пространством над $\mathbb{R}$ и $v = -1$, получаем предыдущий пример.

Естественный пример, когда $R = \mathbb{C}$, связан с полиномом Джонса [7].

Благодарности. Я бы хотел поблагодарить обоих моих руководителей: Жана Ланна из Эколь Политехник и Владимира Вершинина из Института математики СО РАН в Новосибирске. Я благодарен Искандеру Тайманову за его советы, а также всем гостеприимным и дружелюбным сотрудникам Института математики, с которыми мне выпало удовольствие работать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fenn R., Rourke C.* Racks and links in codimension two // J. Knot Theory Ramifications. 1992. V. 1. P. 343–406.

2. *Joyce D.* A classifying invariant of knots, the knot quandle // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 23. P. 37–65.

3. *Матвеев С. В.* Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 1. С. 78–88.

4. *Brieskorn E.* Automorphic sets and braids and singularities // Contemp. Math. 1988. V. 78. P. 45–115.

5. *Mac Lane S.* Categories for the working mathematician. New York etc.: Springer-Verl., 1971.

6. *Humphreys J. E.* Introduction to Lie algebras and representation theory. New York etc.: Springer-Verl., 1972.

7. *Jones V. F. R.* Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials // Ann. Math. 1987. V. 126. P. 335–388.

Статья поступила 11 августа 1999 г.

Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
herve.sibert@polytechnique.org