Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 510.63

Σ–МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПЕРЕЧИСЛИМОЕ С ПОМОЩЬЮ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. С. Морозов

Аннотация: Строится допустимое множество вида $\mathbb{HF}_{\mathfrak{M}}$, в котором есть бесконечное Σ-множество натуральных чисел, не представимое в виде $f(\omega)$, где f — Σ-функция. Библиогр. 1.

Существуют весьма убедительные аргументы в пользу того, что Σ-подмножества допустимых множеств являются аналогом перечислимых множеств [1]. Автор не собирается опровергать эту точку зрения, он лишь хочет обратить внимание на одно новое явление, состоящее в следующем. Когда мы говорим о бесконечном перечислимом множестве A, мы обычно подразумеваем существование его *перечисления*, т. е. некоторого алгоритмического процесса, происходящего в дискретном времени и выдающего в каждый момент этого времени некоторые значения; при этом множество всех полученных значений и образует само рассматриваемое множество A. Иначе говоря, существует вычислимая функция из множества моментов времени, областью значений которой является A. В данной работе будет построено допустимое множество высоты ω, в котором имеется бесконечное Σ-подмножество $A \subseteq \omega$, не являющееся областью значений никакой Σ-функции $f : \omega \to \omega$, т. е. с точки зрения изложенного выше подхода *в этом множестве нет перечисления во времени, имеющем тип ω*. При этом не помогает даже структура порядка на A, унаследованная от натуральных чисел.

Таким образом, если мы признаем Σ-подмножества допустимых множеств перечислимыми, то нам необходимо быть последовательными и наряду с обычным временем, задаваемым моментами-ординалами $0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha, \ldots$, признать также возможность существования дискретного времени, скорее напоминающего аморфную совокупность независимо всплывающих, никак не упорядоченных относительно друг друга моментов.

Все понятия, относящиеся к допустимым множествам, можно найти в [1]. Для понимания работы нужны также самые простейшие понятия из теории вычислимости, которые могут быть найдены в любом руководстве по теории рекурсии. Обозначим через $\mathrm{range}(f)$ область значений функции f, через $\mathrm{sp}(a)$ — носитель a. Знак $\leqslant_{\mathrm{end}}$ используется для обозначения концевых расширений допустимых множеств. Мы также зафиксируем вычислимые функции c, $(\cdot)_0$, $(\cdot)_1$ для кодировки множества пар натуральных чисел натуральными числами, удовлетворяющие тождествам $c((x)_0, (x)_1) = x$, $(c(x, y))_0 = x$, $(c(x, y))_1 = y$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00485).

Введем обозначения для интересующих нас семейств множеств. Пусть A — допустимое множество, X — Σ-подмножество A и $B \subseteq A$.

Через $E^{\mathbf{A}}(B,X)$ обозначим семейство всех $C \subseteq X$ таких, что либо $C = \varnothing$, либо существует Σ-отображение из B на C. (Можно было бы назвать его *семейством всех множеств, перечислимых элементами из* B в $\mathbf{A}$. Заметим, что $E^{\mathbf{A}}(\mathbf{A},X)$ состоит из всех Σ-подмножеств ω.)

Через $D^{A}(B,X)$ обозначим семейство

$$\{\varnothing, X\} \cup \{C \subseteq X \mid C \in E^{\mathbf{A}}(B,X) \ \&\ X \setminus C) \in E^{\mathbf{A}}(B,X)\},$$

через $\Sigma^{\mathbf{A}}(\omega)$ — семейство всех Σ-подмножеств $\mathbf{A}$, содержащихся в ω, через $\Delta^{\mathbf{A}}(\omega)$ — семейство всех Δ-подмножеств $\mathbf{A}$, содержащихся в ω.

В данной работе выясняются возможные соотношения между классами множеств $E^{\mathbf{A}}(\omega,\omega)$, $D^{\mathbf{A}}(\mathbf{A},\omega)$, $D^{\mathbf{A}}(\omega,\omega)$, $\Sigma^{\mathbf{A}}(\omega)$, $\Delta^{\mathbf{A}}(\omega)$, при этом оказывается, что только семейство $\Sigma^{\mathbf{A}}(\omega)$ достаточно независимо от остальных семейств из вышеуказанного списка (см. теорему 1 и следствие 1), в то время как все остальные семейства однозначно определяют друг друга (см. теорему 2).

Теорема 1. *Пусть $(S_i)_{i<\omega}$ — произвольное счетное семейство подмножеств натуральных чисел. Тогда существует счетная модель $\mathfrak{M}$ такая, что*

1) *любая Σ-функция $f : \omega \to \omega$ над $\mathbb{HF}_{\mathbf{M}}$ вычислима, и, таким образом, справедливо* $\mathrm{range}(f) \in \Sigma^0_1$;

2) *в $\mathbb{HF}_{\mathbf{M}}$ существует Σ-подмножество $S \subseteq \omega$ такое, что $S \neq S_i$ для всех $i < \omega$.*

Доказательство. Модель $\mathfrak{M}$ будет иметь сигнатуру, состоящую из одного бинарного предикатного символа P. Основное множество M модели $\mathfrak{M}$ состоит из счетного множества $M_0 = \{m_0, m_1, \dots\}$ и не пересекающегося с ним множества M_1, которое, в свою очередь, является объединением непересекающихся множеств $B_0, B_1, B_2, \dots$:

$$M = M_0 \cup M_1, \quad M_0 \cap M_1 = \varnothing,$$

$$M_1 = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots, \quad B_i \cap B_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

Каждое множество B_i состоит из $i+2$ различных элементов $b^{(i)}_1, \dots, b^{(i)}_{i+2}$, т. е. $B_i = \{b^{(i)}_1, \dots, b^{(i)}_{i+2}\}$. Обозначим $C_t = B_0 \cup \dots \cup B_t \cup \{m_0, \dots, m_t\}$. В ходе построения модели будем на каждом шаге t определять предикат P на подходящем объединении $C_{k_t} = B_0 \cup \dots \cup B_{k_t} \cup \{m_0, \dots, m_{k_t}\}$, впоследствии уже никогда не изменяя его на элементах из C_{k_t}. При этом обеспечим выполнение неравенств $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_t < \dots$. Кроме того, будет выполнено следующее условие:

$(*)$ *предикат P либо ложен на всех парах элементов из B_i, либо образует цикл*

$$P \restriction (B_i \times B_i) = \{\langle b^{(i)}_1, b^{(i)}_2\rangle, \dots, \langle b^{(i)}_{i+1}, b^{(i)}_{i+2}\rangle, \langle b^{(i)}_{i+2}, b^{(i)}_1\rangle\}.$$

Других случаев, когда предикат P истинен на элементах модели, не существует.

Построение. Зафиксируем некоторое перечисление всех Σ-формул вида $\varphi(x,y,z)$:

$$\varphi_0(x,y,z), \varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z), \dots.$$

Зафиксируем также некоторую естественную нумерацию γ всех элементов из $\mathbb{HF}_M$, $\mathbb{HF}_M = \{\gamma_i \mid i < \omega\}$, такую, что по номеру i можно эффективно выписать элемент γ_i как выражение, составленное из $\{$, $\}$, знака запятой, элементов $b^{(r)}_q$

$(1 \le q \le r{+}2)$ и m_i, а также по подобному выражению можно эффективно находить γ-номер соответствующего элемента из $\mathbb{HF}_M$. Такая нумерация, очевидно, может быть легко построена.

Шаг 0. Полагаем $k_0 = -1$.

Шаг $t+1$. Содержит два подшага.

Подшаг 1. Пусть $\langle m, n\rangle$ — пара натуральных чисел с наименьшим номером $c(m,n)$, не рассматривавшаяся ранее и такая, что $\mathrm{sp}(\gamma_n) \subseteq C_t$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Существует такое доопределение предиката P на $B_{k_t+1} \cup \dots \cup B_{k_t+l}$ для подходящего l, удовлетворяющее условию $(*)$, сформулированному выше, что $\mathbb{HF}_{C_{k_t+l}} \models \varphi_m(c, d_0, \gamma_n)$ и $\mathbb{HF}_{C_{k_t+l}} \models \varphi_m(c, d_1, \gamma_n)$ для некоторых $c, d_0, d_1 \in \omega$, $d_0 \ne d_1$. Тогда фиксируем это расширение предиката P на C_{k_t+l}, полагаем $k_t' = k_t + l$ и переходим к подшагу 2.

Случай 2. Такого доопределения предиката не существует. Тогда сразу переходим к подшагу 2.

Подшаг 2. Сначала мы позаботимся о том, чтобы выполнялось

$$\{n \mid \mathfrak{M} \text{ содержит } P\text{-цикл длины } n+2\} \ne S_i.$$

Для этого делаем следующее. Если $k_t+1 \in S_i$, то доопределяем P на множестве $B_{k_t'+1} \times B_{k_t'+1}$ всюду ложным предикатом и считаем $k_{t+1} = k_{t+1}'$. Если $k_t+1 \notin S_t$, то доопределяем P на $B_{k_t'+1}$ циклом, а именно добавляем к P новое множество пар:

$$\langle b_1^{(k_t'+1)}, b_2^{(k_t'+1)}\rangle, \dots, \langle b_{(k_t'+1)+1}^{(k_t'+1)}, b_{(k_t'+1)+2}^{(k_t'+1)}\rangle, \langle b_{(k_t'+1)+2}^{(k_t'+1)}, b_1^{(k_t'+1)}\rangle,$$

и полагаем $k_{t+1} = k_t' + 1$. Описание построения закончено.

Докажем, что построенная нами модель $\mathfrak{M}$ годится в качестве искомой. Предположим, что Σ-формула $\varphi_m(x, y, \gamma_n)$ определяет на $\mathbb{HF}_{\mathfrak{M}}$ Σ-функцию f из ω в ω. Без ограничения общности можно считать, что формула $\varphi_m(x, y, \gamma_n)$ имеет вид $\exists u \psi(u, x, y, \gamma_n)$, где ψ — Δ-формула. Пару $\langle m, n\rangle$ рассмотрим на некотором шаге $t+1$. При этом будет выполнен случай 2 (иначе бы формула $\varphi_m(x, y, \gamma_n)$ не определяла функцию). Тогда можно предложить следующий алгоритм для вычисления функции, определяемой описываемой ниже формулой $\varphi_m(x, y, \gamma_n)$.

Пусть задано $x \in \omega$. Рассматриваем модель $\mathfrak{M}$ с предикатом P, ограниченным на C_{k_t}. Перебираем всевозможные $y, l \in \omega$ и доопределения P на C_{k_t+l}, удовлетворяющие условию $(*)$, и в них ищем элемент u так, чтобы удовлетворить $\psi(u, x, y, \gamma_n)$. Первый же найденный набор значений даст результат y, который совпадет с $f(x)$.

Проверим, что такое y существует и единственно. Существование следует из того, что формула $\varphi_m(x, y, \gamma_n)$ определяет функцию с областью определения ω. Проверим единственность. Если бы единственность нарушалась, то существовало бы как минимум два различных способа доопределения P на подходящем конечном куске $B_{k_t+1}, \dots, B_{k_t+l}$. Обозначим первый из них через P_0, а второй — P_1. Существуют $y_0, y_1 \in \omega$, $y_0 \ne y_1$, такие, что

$$\mathbb{HF}_{\langle k_t+l; P_0\rangle} \models \varphi_m(x, y_0, \gamma_n), \quad \mathbb{HF}_{\langle k_t+l; P_1\rangle} \models \varphi_m(x, y_1, \gamma_n).$$

Рассмотрим доопределение $P_0 \cup P_1$ предиката P (на $B_0 \cup \dots \cup B_{k_t}$ предикаты P_0 и P_1 совпадают). Мы можем тривиально (т. е. всюду ложным образом) расширить $P_0 \cup P_1$ на достаточно длинный кусок $C_{k_t+l+l'}$ так, чтобы существовали изоморфные вложения

$$\langle C_{k_t+l}; P_i\rangle \hookrightarrow \langle C_{k_t+l+l'}; P_0 \cup P_1\rangle, \quad i = 0, 1,$$

тождественные на C_{k_t}. Эти вложения естественным образом поднимаются до изоморфных вложений

$$j_i : \mathbb{HF}_{\langle C_{k_t+l}; P_i\rangle} \hookrightarrow \mathbb{HF}_{\langle C_{k_t+l+l'}; P_0 \cup P_1\rangle}, \quad i = 0, 1,$$

тождественных на $\mathbb{HF}_{C_{k_t}}$. При этом

$$j_i(\mathbb{HF}_{\langle C_{k_t+l}; P_i\rangle}) \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{HF}_{\langle C_{k_t+l+l'}; P_0 \cup P_1\rangle}, \quad i = 0, 1.$$

Отсюда, учитывая тождественность этих вложений на $\mathbb{HF}_{C_{k_t}}$, получим $j_i(\gamma_n) = \gamma_n$ и, следовательно,

$$\mathbb{HF}_{\langle C_{k_t+l+l'}; P_0 \cup P_1\rangle} \models \varphi_m(x, y_i, \gamma_n) \text{ для } i = 0, 1$$

и на шаге $t+1$ окажемся в условиях случая 1. В результате исполнения инструкций для этого случая мы на этом шаге лишим формулу $\varphi_m(x, y, \gamma_n)$ возможности определять функцию над $\mathbb{HF}_{\mathbf{M}}$. Противоречие.

Остается указать пример Σ-подмножества ω, не совпадающего ни с одним из множеств S_i, $i < \omega$. Это

$$S = \{n \mid p \text{ имеет цикл длины } n+2 \text{ в } \mathfrak{M}\}.$$

Очевидно, что $S \neq S_i$ для всех $i < \omega$, поскольку мы обеспечили это в ходе построения. Множество S можно задать Σ-формулой так:

$$n \in S \Leftrightarrow \exists f(\mathrm{Function}(f) \ \&\ \mathrm{dom}(f) = n+2 \\ \&\forall i \in \mathrm{dom}(f)(P(f(i), f(i+1))) \ \&\ P(f(n+1), f(0))),$$

где Function(f) служит сокращением для Δ-формулы, которая утверждает, что f — функция. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень. Существует счетная модель* $\mathfrak{M}$ *такая, что*

1) *любая* Σ*-функция* $f : \omega \to \omega$ *над* $\mathbb{HF}_{\mathfrak{M}}$ *вычислима, и, таким образом, справедливо* $\mathrm{range}(f) \in \Sigma^0_1$*;*

2) *в* $\mathbb{HF}_{\mathfrak{M}}$ *существует неперечислимое* Σ*-подмножество* $S \subseteq \omega$*, не сводящееся по Тьюрингу к* $\mathbf{d}$.

Доказательство. Достаточно в предыдущей теореме взять в качестве семейства $(S_i)_{i<\omega}$ объединение семейства всех перечислимых множеств и семейства всех множеств, сводящихся по Тьюрингу к степени $\mathbf{d}$. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— допустимое множество. Тогда любое из четырех семейств множеств* $D^{\mathbf{A}}(\mathbf{A}, \omega)$, $D^{\mathbf{A}}(\omega, \omega)$, $\Delta^{\mathbf{A}}(\omega)$, $E^{\mathbf{A}}(\omega, \omega)$ *однозначно определяет три остальных семейства. Более точно,*

1) $D^{\mathbf{A}}(\mathbf{A}, \omega) = D^{\mathbf{A}}(\omega, \omega) = \Delta^{\mathbf{A}}(\omega)$*;*

2) $E^{\mathbf{A}}(\omega, \omega) = \{(C)_1 \mid C \in D^{\mathbf{A}}(\omega, \omega)\}$*;*

3) $D^{\mathbf{A}}(\omega,\omega) = \{C \subseteq \omega \mid C,\, \omega \setminus C \in E^{\mathbf{A}}(\omega,\omega)\}$.

Доказательство. П. 1 следует из цепочки включений

$$D^{\mathbf{A}}(\mathbf{A},\omega) \subseteq D^{\mathbf{A}}(\omega,\omega) \subseteq \Delta^{\mathbf{A}}(\omega) \subseteq D^{\mathbf{A}}(\mathbf{A},\omega).$$

Пусть $C \in D^{\mathbf{A}}(\mathbf{A},\omega)$, $C \notin \{\varnothing,\omega\}$. Возьмем Σ-функции $f_0 : \mathbf{A} \xrightarrow{onto} C$ и $f_1 : \mathbf{A} \xrightarrow{onto} \omega \setminus C$. Теперь можно определить характеристическую Σ-функцию f множества C относительно ω как

$$f(x) = y \Leftrightarrow \exists z\,[(f_0(z) = x \;\&\; y = 1) \vee (f_1(z) = x \;\&\; y = 0)]. \qquad (1)$$

Зафиксируем некоторые элементы $a_0 \in C$, $a_1 \in \omega \setminus C$ и определим Σ-функции g_i, $i = 0,1$, следующим образом:

$$g_i(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \omega \text{ и } f(x) = 1 - i,\\ a_i, & \text{если } x \in \omega \text{ и } f(x) = i,\\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что g_0 и g_1 имеют ω своей областью определения и перечисляют C и $\omega \setminus C$ соответственно. Отсюда следует, что $C \in D^{\mathbf{A}}(\omega,\omega)$.

Пусть $C \in D^{\mathbf{A}}(\omega,\omega)$, $C \notin \{\varnothing,\omega\}$. Возьмем Σ-функции $f_0 : \omega \xrightarrow{onto} C$ и $f_1 : \omega \xrightarrow{onto} \omega \setminus C$. Определим Σ-функцию f правилом (1). Имеем $x \in C \Leftrightarrow x \in \omega \;\&\; f(x) = 1$ и $x \notin C \Leftrightarrow x \notin \omega \vee f(x) = 0$, откуда $C \in \Delta^{\mathbf{A}}(\omega)$.

Далее, пусть $C \in \Delta^{\mathbf{A}}(\omega) \setminus \{\varnothing,\omega\}$. Зафиксируем $c_0 \in C$ и $c_1 \in \omega \setminus C$ и определим Σ-функции f_0 и f_1 следующим образом:

$$f_0(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \omega \text{ и } x \in C,\\ c_0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \omega \text{ и } x \in \omega \setminus C,\\ c_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что $\mathrm{range}(f_0) = C$ и $\mathrm{range}(f_1) = \omega \setminus C$, откуда $C \in D^{\mathbf{A}}(\mathbf{A},\omega)$.

Докажем п. 2. Пусть $C \in E^{\mathbf{A}}(\omega,\omega) \setminus \{\varnothing,\omega\}$. Возьмем Σ-отображение $f : \omega \to \omega$ такое, что $\mathrm{range}(f) = C$. Рассмотрим

$$C' = \{c(x,y) \mid f(x) = y\}.$$

Ясно, что $(C')_1 = C$. Необходимо проверить, что $C' \in D^{\mathbf{A}}(\omega,\omega)$. Ввиду доказанного уже п. 1 достаточно понять, что $C' \in D^{\mathbf{A}}(\omega)$. Это вытекает из следующих двух эквивалентностей:

$$m \in C' \Leftrightarrow f((m)_0) = (m)_1,$$
$$m \notin C' \Leftrightarrow m \notin \omega \vee (m \in \omega \;\&\; \exists t\,(f((m)_0) = t \;\&\; t \neq (m)_0)).$$

Обратно, пусть $C' \in D^{\mathbf{A}}(\omega)$, $C' \neq 0$ и $C = (C')_1$. Зафиксируем $c_0 \in C$ и определим Σ-функцию f как

$$f(x) = \begin{cases} (x)_1, & \text{если } x \in \omega \;\&\; x \in C',\\ c_0, & \text{если } x \in \omega \;\&\; x \notin C',\\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $\mathrm{dom}(f) = \omega$ и $\mathrm{range}(f) = C$.

П. 3 следует непосредственно из определения. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.

Статья поступила 31 мая 2000 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
morozov@math.nsc.ru