Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 517.957

КОММУТАТИВНЫЕ КОЛЬЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫЕ С ДВУМЕРНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

А. Е. Миронов

Аннотация: Построены коммутативные кольца матричных дифференциальных операторов, собственные функции и собственные значения которых параметризуются двумерными главно поляризованными абелевыми многообразиями с неособыми тэта-дивизорами. Библиогр. 9.

1. Введение

Основной результат этой работы — построение двумерных 2×2-матричных дифференциальных операторов с двоякопериодическими коэффициентами по спектральным функциям и собственной вектор-функции Бейкера — Ахиезера, введенной Накаяшики в [1]. Замечательным свойством этих операторов является то, что они конечнозонны на любом уровне энергии. А именно, их блоховские функции — собственные функции одновременно и для дифференциального оператора, и для операторов сдвига на периоды — параметризуются точками двумерного главно поляризованного абелева многообразия X^2. При этом собственные значения (спектр) задаются мероморфной функцией $\lambda(z)$ на X^2 с полюсом на тэта-дивизоре. Мы указываем процедуру построения коммутативного кольца таких операторов по абелеву многообразию X^2 (с неприводимым тэта-дивизором) и спектральной функции λ.

Впервые многомерная обратная задача была решена Б. А. Дубровиным, И. М. Кричевером и С. П. Новиковым для периодического оператора Шредингера с магнитным полем [2]. Ими указана процедура построения таких операторов, конечнозонных на одном уровне энергии, т. е. таких, для которых блоховские функции с фиксированным собственным значением E_0 параметризуются точками римановой поверхности конечного рода. Позднее А. П. Веселов и С. П. Новиков в [3] выделили среди них потенциальные операторы (т. е. операторы с нулевым магнитным полем).

Конечнозонность оператора Шредингера на заданном уровне энергии является исключительным явлением: Фельдман, Кноррер и Трубовитц [4] показали, что двумерный оператор Шредингера с гладким вещественным потенциалом может быть конечнозонным только на одном уровне энергии. Как впервые указал Сато, для матричных операторов возможна ситуация, когда блоховские

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–15–96877, 98–01–00749).

функции параметризуются поверхностями конечного рода (в нашем случае поверхностями уровня $\lambda = \mathrm{const}$) для всех уровней энергии. Эта идея реализована Накаяшики [1, 5].

В работе [1] строится методом преобразования Фурье — Мукаи [6] модуль Бейкера — Ахиезера над кольцом дифференциальных операторов по g пространственным переменным, где g — размерность главно поляризованного абелева многообразия X^g с несингулярным тэта-дивизором. Этому модулю соответствует (с точностью до сопряжения) коммутативное кольцо $g!\times g!$-матричных дифференциальных операторов в частных производных, коэффициенты которых определены в общем случае локально. Каждый оператор отвечает некоторой мероморфной функции на X^g с полюсом на тэта-дивизоре (спектральной функции), параметризующей собственные значения оператора (в дальнейшем эти операторы будем называть операторами Накаяшики). Вектор-функция, компонентами которой являются элементы базиса модуля Бейкера — Ахиезера, параметризует общие собственные функции этих операторов.

Заметим, что эта конструкция требует несингулярности тэта-дивизора. Как показали Андреотти и Мейер [7], для общего абелева многообразия его тэта-дивизор является неособым подмногообразием, однако для многообразий Якоби римановых поверхностей тэта-дивизор имеет особенности при $g > 3$ и при $g = 3$ для гиперэллиптических поверхностей.

В разд. 2 мы опишем преобразование Фурье — Мукаи [6] в нужном нам случае, напомним конструкцию Накаяшики модуля Бейкера — Ахиезера [1] и укажем связь конструкции Кричевера [8] с преобразованием Фурье — Мукаи [6].

В разд. 3 изложим полученное нами короткое аналитическое доказательство теоремы Накаяшики о свободности модуля Бейкера — Ахиезера в размерности 2. Оно существенно использует двумерность абелева многообразия X^2 в отличие от доказательства общего случая в [1] и требует минимального аппарата алгебраической геометрии. Здесь же мы вводим базис модуля Бейкера — Ахиезера при $g = 2$, в котором удается найти коэффициенты операторов Накаяшики.

В разд. 4 мы укажем эффективную процедуру построения операторов Накаяшики при $g = 2$. В предложениях 1–3 получим явные формулы для операторов, порождающих, как будет доказано в лемме 9, все кольцо операторов Накаяшики. В предложении 1 мы вводим коммутирующие между собой операторы $Z_1, \dots, Z_g$ такие, что для произвольного оператора Накаяшики L коммутатор $[L, Z_j]$ также является оператором Накаяшики. В предложении 2 найдем явные формулы для операторов Накаяшики второго порядка, в предложении 3 — явные формулы для операторов Z_j.

Автор благодарит С. П. Новикова и И. А. Тайманова за постановку задачи и И. А. Тайманова за полезные обсуждения и замечания.

2. Конструкция Накаяшики (модуль Бейкера — Ахиезера)

Пусть $X^g = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g)$ — главно поляризованное комплексное абелево многообразие, где Ω — симметричная $g \times g$-матрица с $\operatorname{Im}\Omega > 0$. Через $\operatorname{Pic}^0(X^g)$ обозначим многообразие Пикара многообразия X^g, т. е. пространство модулей линейных расслоений над X^g с нулевым первым классом Чжэня. Если X^g главно поляризовано, то $\operatorname{Pic}^0(X^g)$ изоморфно X^g. Изоморфизм задается отображением $z \to x$, где $z \in X^g$, $x \in \mathrm{Pic}^0(X^g)$. Сечения расслоения x при подъеме на универсальное накрытие $\mathbb{C}^g$ представляются функциями $h(z)$, которые удовлетворяют условиям периодичности

$$h(z + \Omega m + n) = \exp(-2\pi i \langle m, x\rangle) h(z),$$

где $m, n \in \mathbb{Z}^g$, $\langle m, x\rangle = m_1 x_1 + \dots + m_g x_g$.

Обозначим через $\mathscr{P}$ расслоение Пуанкаре над $X^g \times \mathrm{Pic}^0(X^g)$. Оно определяется следующими свойствами. Расслоение, отвечающее $x \in \mathrm{Pic}^0(X^g)$, изоморфно $\mathscr{P}|_{X^g \times \{x\}}$, а расслоения $\mathscr{P}|_{X^g \times \{0\}}$ и $\mathscr{P}|_{\{0\} \times \mathrm{Pic}^0(X^g)}$ тривиальны. Сечения $\mathscr{P}$ при подъеме на универсальное накрытие $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$ задаются функциями $f(z, x)$ такими, что

$$f(z + \Omega m_1 + n_1, x + \Omega m_2 + n_2) = \exp(-2\pi i(\langle m_1, x\rangle + \langle m_2, z\rangle)) f(z, x), \quad (1)$$

где $m_j, n_j \in \mathbb{Z}^g$. Через $z = (z_1, \dots, z_g)^\top \in \mathbb{C}^g$ обозначим координаты точек на универсальном накрытии X^g, а через $x = (x_1, \dots, x_g)^\top \in \mathbb{C}^g$ — координаты точек на универсальном накрытии $\mathrm{Pic}^0(X^g)$. Сечения расслоения $\mathscr{P}$ отождествим с функциями на $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$, обладающими свойством (1).

Тэта-функция с характеристикой $[a, b]$ определяется рядом

$$\theta[a, b](z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i \langle \Omega(n + a), (n + a)\rangle + 2\pi i \langle (n + a), (z + b)\rangle),$$

где $a, b \in \mathbb{C}^g$. Функцию $\theta(z) = \theta[0, 0](z, \Omega)$ для краткости будем называть *тэта-функцией.* Функция $\theta[a, b](z, \Omega)$ обладает свойствами периодичности

$$\theta[a, b](z + m, \Omega) = \exp(2\pi i \langle a, m\rangle) \theta[a, b](z, \Omega),$$

$$\theta[a, b](z + \Omega m, \Omega) = \exp(-2\pi i \langle b, m\rangle - \pi i \langle m\Omega, m\rangle - 2\pi i \langle m, z\rangle) \theta[a, b](z, \Omega),$$

$m \in \mathbb{Z}^g$.

Через Θ обозначим множество нулей тэта-функции (тэта-дивизор), которое задает одноименное подмногообразие в X^g.

Пусть $Y \subset X^g$ — подмногообразие коразмерности 1, A_Y — пространство мероморфных функций на X^g с полюсом в Y. Обозначим через $F_Y(U)$ пространство мероморфных сечений расслоения $\mathscr{P}$, определенных на подмножествах вида $X^g \times U \subset X^g \times \mathrm{Pic}^0(X^g)$ с полюсом в $Y \times U$, здесь U — открытое подмножество в $\mathrm{Pic}^0(X^g)$.

Множество $F_Y = \bigcup_U F_Y(U)$ называется преобразованием Фурье — Мукаи пространства A_Y [6].

В [1] строятся операторы «ковариантного дифференцирования» (связность на $\mathscr{P}$)

$$\nabla_j : F_Y(U) \to F_Y(U), \quad \nabla_k \nabla_j = \nabla_j \nabla_k, \quad k, j = 1, \dots, g,$$

которые снабжают $F_Y(U)$ структурой модуля над кольцом $\mathscr{O}_U[\nabla_1, \dots, \nabla_g]$, где $U \subset \mathrm{Pic}^0(X^g)$ — открытое подмножество, $\mathscr{O}_U$ — кольцо аналитических функций на U. Из построения следует, что $F_Y(U)$ является также A_Y-модулем.

Накаяшики ввел функции Бейкера — Ахиезера, которые имеют вид

$$f(z, x) \exp\left(-\sum_{j=1}^{g} x_j \partial_{z_j} \log \theta(z)\right), \quad f(z, x) \in F_\Theta.$$

Операторы ∇_j определяются формулой

$$\nabla_j = \partial_{x_j} - \partial_{z_j} \log\theta(z).$$

Обозначим через M_c пространство функций Бейкера — Ахиезера

$$\left\{ f(z,c+x)\exp\left(-\sum_{j=1}^{g} x_j\partial_{z_j}\log\theta(z)\right) \mid f(z,c+x)\in\bigcup_U F_\Theta(c+U)\right\},$$

где $U\subset\mathbb{C}^g$ — некоторая окрестность нуля, $c\in\mathbb{C}^g$, $f(z,c+x)$ принадлежит образу преобразования Фурье — Мукаи F_Θ. Функция $f(z,c+x)$ определена на $\mathbb{C}^g\times U$ и имеет полюс только в $\Theta\times U$. Грубо говоря, $f(z,c+x)$ является по переменной x ростком функции в точке $x=0$. Из (1) следует, что

$$f(z+\Omega m+n,c+x) = \exp(-2\pi i\langle m,(c+x)\rangle)f(z,c+x).$$

Обозначим через $M_c(k)$ подмножество функций в M_c таких, что $f(z,c+x)$ имеет полюс порядка $\leq k$ в $\Theta\times U$. Из определения вытекает, что M_c является модулем над кольцом дифференциальных операторов $\mathscr{D}=\mathscr{O}[\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_g}]$ ($\mathscr{D}$-модулем), где $\mathscr{O}$ — кольцо аналитических функций по переменным $x_1,\dots,x_g$, определенных в окрестности $0\in\mathbb{C}^g$. $\mathscr{D}$-модуль M_c называется *модулем Бейкера — Ахиезера*. Из определения преобразования Фурье — Мукаи получаем, что M_c обладает также структурой A_Θ-модуля.

$\mathscr{D}$-модуль M_c можно описать с помощью тэта-функций [1].

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$M_c = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a\in\mathbb{Z}^g/n\mathbb{Z}^g}\mathscr{O}\cdot\frac{\theta[\frac{a}{n},0](nz+c+x,n\Omega)}{\theta^n(z)}\exp\left(-\sum_{k=1}^{g}x_k\partial_{z_k}\log\theta(z)\right).$$

В дальнейшем нам понадобится следующее тождество [1].

Лемма 2. *Справедливо тождество*

$$\partial_{x_j}\left(\frac{\theta[\frac{a}{n},0](nz+c+x,n\Omega)}{\theta^n(z)}\exp\left(-\sum_{k=1}^{g}x_k\partial_{z_k}\log\theta(z)\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n}\partial_{z_j}\left(\frac{\theta[\frac{a}{n},0](nz+c+x,n\Omega)}{\theta^n(z)}\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{g}x_k\partial_{z_k}\log\theta(z)\right),$$

$j=1,\dots,g$.

В [1] доказана

Теорема Накаяшики. *Если Θ — неособое многообразие и $c\neq 0$, то M_c — свободный $\mathscr{D}$-модуль ранга $g!$.*

Зафиксируем базис $\Phi_c=(\phi_{1c}(z,x),\dots,\phi_{g!c}(z,x))^\top$ в $\mathscr{D}$-модуле M_c. Пусть $\lambda(z)\in A_\Theta$. Так как M_c — свободный $\mathscr{D}$-модуль, существуют единственные операторы $[L_{\Phi_c}(\lambda)]_{kj}\in\mathscr{D}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{g!}[L_{\Phi_c}(\lambda)]_{kj}\phi_{jc}=\lambda\phi_{kc},\quad k=1,\dots,g!.$$

Следовательно,

$$L_{\Phi_c}(\lambda)\Phi_c = \lambda\Phi_c, \tag{2}$$

где $[L_{\Phi_c}(\lambda)]_{kj}$ — компоненты матричного дифференциального оператора $L_{\Phi_c}(\lambda)$, $\lambda\Phi_c = (\lambda\phi_{1c}, \dots, \lambda\phi_{g!c})^\top$. Поскольку $L_{\Phi_c}(\lambda)$ — дифференциальные операторы по переменным x_j, а λ зависит лишь от z, то из (2) следует условие коммутации

$$L_{\Phi_c}(\lambda\mu) = L_{\Phi_c}(\lambda)L_{\Phi_c}(\mu) = L_{\Phi_c}(\mu)L_{\Phi_c}(\lambda),$$

где $\mu(z) \in A_\Theta$. Получили

Следствие [1]. *Существует вложение колец*

$$L_{\Phi_c} : A_\Theta \to \mathrm{Mat}(g!, \mathscr{D}),$$

где $\mathrm{Mat}(g!, \mathscr{D})$ *— кольцо* $g! \times g!$*-матричных дифференциальных операторов. Образ вложения является коммутативным кольцом дифференциальных операторов.*

Как указано в [5], конструкция Накаяшики обобщает конструкцию Кричевера [8], которая тоже может трактоваться через преобразование Фурье — Мукаи следующим образом.

Напомним конструкцию функции Бейкера — Ахиезера [8]. Пусть Γ — риманова поверхность рода g, $D = p_1 + \dots + p_g$ — неспециальный положительный дивизор на Γ, ∞ — точка на Γ, отличная от точек из дивизора. Выберем локальный параметр k^{-1} в ∞ так, что $k^{-1}(\infty) = 0$. *Одноточечной функцией Бейкера — Ахиезера со спектральными данными* $\{\Gamma, \infty, p_1, \dots, p_g, k^{-1}\}$ называется функция $\psi(z, x), z \in \Gamma$, определяемая с точностью до умножения на функцию, зависящую только от x, следующими свойствами:

1) $\psi(z, x)$ мероморфна на $\Gamma\backslash\infty$, ее множество полюсов совпадает с $\{p_1, \dots, p_g\}$ и не зависит от x;

2) в окрестности ∞ функция $\psi(z, x)\exp(-kx)$ аналитична.

Эта функция имеет вид

$$\psi(z, x) = \frac{\theta\Big(\mathscr{A}(z) - \sum\limits_{j=1}^{g}\mathscr{A}(p_j) - \Delta + Vx\Big)}{\theta\Big(\mathscr{A}(z) - \sum\limits_{j=1}^{g}\mathscr{A}(p_j) - \Delta\Big)} \exp\left(2\pi i x \int\limits_{p_0}^{z} \eta\right),$$

где $\mathscr{A} : \Gamma \to X^g$ — отображение Абеля с базисной точкой p_0, X^g — многообразие Якоби поверхности Γ, Δ — вектор римановых констант и $V \in \mathbb{C}^g$ — вектор, определенный спектральными данными.

Функция

$$\frac{\theta\Big(\mathscr{A}(z) - \sum\limits_{j=1}^{g}\mathscr{A}(p_j) - \Delta + Vx\Big)}{\theta\Big(\mathscr{A}(z) - \sum\limits_{j=1}^{g}\mathscr{A}(p_j) - \Delta\Big)}$$

является ограничением на $\mathscr{A}(\Gamma) \times \{Vx\}$ функции

$$\frac{\theta\Big(\tilde{z} - \sum\limits_{j=1}^{g}\mathscr{A}(p_j) - \Delta + \tilde{x}\Big)}{\theta\Big(\tilde{z} - \sum\limits_{j=1}^{g}\mathscr{A}(p_j) - \Delta\Big)},$$

принадлежащей образу преобразования Фурье — Мукаи $F_{\Theta'}$, где $\Theta' \subset X^g$ — подмногообразие, заданное уравнением

$$\theta(\tilde{z} - \sum_{j=1}^{g} \mathscr{A}(p_j) - \Delta) = 0.$$

Через $\widetilde{\mathscr{D}}(\psi(z,x))$ обозначим $\widetilde{\mathscr{D}}$-модуль $\{d\psi(z,x) \mid d \in \widetilde{\mathscr{D}}\}$, где $\widetilde{\mathscr{D}}$ — кольцо дифференциальных операторов по x. Как показано в [8], $\widetilde{\mathscr{D}}(\psi(z,x))$ — свободный $\widetilde{\mathscr{D}}$-модуль, и для любой мероморфной функции $f(z)$ на Γ с единственным полюсом в ∞ существует единственный дифференциальный оператор $L(f)$ такой, что

$$L(f)\psi(z,x) = f(z)\psi(z,x).$$

Отсюда следует сопоставление спектральных данных коммутативных колец скалярных дифференциальных операторов в теории Берчналла — Чаунди — Кричевера и спектральных данных коммутативных колец матричных дифференциальных операторов Накаяшики:

$$\{\Gamma, \infty, D, f\} \longleftrightarrow \{X^g, \Theta, c, \lambda\}.$$

3. Доказательство теоремы Накаяшики при $g = 2$

Здесь мы изложим полученное нами доказательство теоремы Накаяшики при $g = 2$. Введем функции из M_c:

$$\psi = \frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)} \exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z)),$$

$$\psi_{c'} = \frac{\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c')}{\theta^2(z)} \exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z)),$$

и поверхность

$$\Gamma_{c'} = \{z \in \mathbb{C}^2 | \ \theta(z-c') = 0\}.$$

В леммах 4 и 5 мы докажем, что $\mathscr{D}(\psi,\psi_{c'}) = \{d_1\psi + d_2\psi_{c'} \mid d_1, d_2 \in \mathscr{D}\}$ — свободный $\mathscr{D}$-модуль. В лемме 6 покажем, что $\mathscr{D}$-модули $\mathscr{D}(\psi,\psi_{c'})$ и M_c совпадают.

В дальнейшем нижние индексы у тэта-функции будут означать дифференцирование по соответствующей переменной: $\theta_j(z) = \partial_{z_j}\theta(z)$, $\theta_{kj}(z) = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\theta(z)$.

Лемма 3. *Функции $a\theta_1(z)+b\theta_2(z)$ и $\theta(z+e)$, где $a, b \in \mathbb{C}$, $e \in \mathbb{C}^2$, имеют два нуля на Θ с учетом кратности и с точностью до элементов решетки $\mathbb{Z}^2 + \Omega\mathbb{Z}^2$.*

Доказательство. Пусть X^2 — многообразие Якоби некоторой римановой поверхности Γ рода 2. Обозначим через $\widehat{\Gamma}$ универсальное накрытие Γ. На $\widehat{\Gamma}$ действует фундаментальная группа $\pi_1(\Gamma)$. Обозначим через S фундаментальную область. Пусть $\mathscr{A} : \widehat{\Gamma} \to X^2$ — отображение Абеля. Образ $\mathscr{A}(\widehat{\Gamma})$ задается уравнением $\theta(z - \Delta) = 0$. Искомое число нулей, как легко убедиться, равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S} d\log(a\theta_1(\mathscr{A}(p)-\Delta) + b\theta_2(\mathscr{A}(p)-\Delta)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S} d\log\theta(\mathscr{A}(p)+e-\Delta) = 2.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для* $c' \in \mathbb{C}^2$ *и* $c' \notin \mathbb{Z}^2 + \Omega\mathbb{Z}^2$ *функция* $\psi_{c'}$ *не принадлежит множеству функций*

$$\{\alpha_1(x)\partial_{x_1}\psi + \alpha_2(x)\partial_{x_2}\psi + \alpha_3(x)\psi \mid \alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x) \in \mathscr{O}.\}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда существуют $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x) \in \mathscr{O}$ такие, что

$$\alpha_1(x)\partial_{x_1}\psi + \alpha_2(x)\partial_{x_2}\psi + \alpha_3(x)\psi = \psi_{c'}.$$

Тем самым для $z \in \Gamma_{c'}$ справедливо равенство

$$\alpha_1(x)\left(\frac{\theta_1(z+c+x)}{\theta(z)} - \frac{\theta(z+c+x)\theta_1(z)}{\theta^2(z)}\right)$$
$$+ \alpha_2(x)\left(\frac{\theta_2(z+c+x)}{\theta(z)} - \frac{\theta(z+c+x)\theta_2(z)}{\theta^2(z)}\right) + \alpha_3(x)\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)} = 0.$$

Пусть p — точка пересечения $\Gamma_{c'}$ и Θ (лемма 3). Из последнего равенства следует, что

$$\alpha_1(x)\theta_1(p) + \alpha_2(x)\theta_2(p) = 0.$$

Так как Θ — гладкая риманова поверхность, то либо $\theta_1(p) \neq 0$, либо $\theta_2(p) \neq 0$. Пусть для определенности $\theta_1(p) \neq 0$. Тогда

$$\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = -\frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)}.$$

Следовательно,

$$-\frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)}\partial_{x_1}\log\theta(z+c+x) + \partial_{x_2}\log\theta(z+c+x) = -\frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)}\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} + \frac{\theta_2(z)}{\theta(z)} - \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_2(x)}.$$

В левой части полюс (по переменной x) зависит от $z \in \Theta$, а в правой не зависит. Получили противоречие. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. $\mathscr{D}(\psi, \psi_{c'})$ *— свободный* $\mathscr{D}$*-модуль ранга* 2.

Доказательство. Предположим, что $\mathscr{D}(\psi, \psi_{c'})$ не является свободным $\mathscr{D}$-модулем. Тогда существуют операторы $d_1, d_2 \in \mathscr{D}$ такие, что

$$d_1\psi_{c'} + d_2\psi = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{ord}(d_1) > \operatorname{ord}(d_2) - 1$, где ord — порядок оператора. Пусть $\operatorname{ord}(d_1) = n$. Оператор d_1 имеет вид

$$d_1 = f_n(x)\partial_{x_1}^n + f_{n-1}(x)\partial_{x_1}^{n-1}\partial x_2 + \dots + f_0(x)\partial_{x_2}^n + \dots,$$

где $f_j(x) \in \mathscr{O}$, $j = 0, \dots, n$. Разделим равенство (3) на

$$\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z)),$$

умножим на $\theta^{n+2}(z)$, и пусть $z \in \Theta$. Получим

$$\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c')(f_n(x)\theta_1^n(z)+f_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z)\theta_2(z)+\dots+f_0(x)\theta_2^n(z)) = 0. \tag{4}$$

По лемме 3 существует точка $p \in \mathbb{C}^2$ такая, что $p \in \Theta$ и $\theta_1(p) = 0$. Положим в (4) $z = p$. Получим $f_0 = 0$. Разделим (4) на $\theta_1(z)$ и опять положим $z = p$. Получим $f_1 = 0$. Аналогично рассуждая, получим $f_n = f_{n-1} = \dots = f_0 = 0$.

Следовательно, неравенство $\mathrm{ord}(d_1) > \mathrm{ord}(d_2) - 1$ невозможно. Аналогично показывается, что неравенство $\mathrm{ord}(d_1) + 1 < \mathrm{ord}(d_2)$ также невозможно. Рассмотрим случай, когда $\mathrm{ord}(d_1) + 1 = \mathrm{ord}(d_2) = n$. Пусть операторы d_1 и d_2 имеют вид

$$d_1 = f_{n-1}(x)\partial_{x_1}^{n-1} + f_{n-2}(x)\partial_{x_1}^{n-2}\partial_{x_2} + \dots + f_0(x)\partial_{x_2}^{n-1} + \dots,$$

$$d_2 = g_n(x)\partial_{x_1}^{n} + g_{n-1}(x)\partial_{x_1}^{n-1}\partial_{x_2} + \dots + g_0(x)\partial_{x_2}^{n} + \dots.$$

Разделим равенство (3) на

$$\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z)),$$

умножим на $\theta^{n+1}(z)$, и пусть $z \in \Theta$. Тогда

$$\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c')(f_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z)+f_{n-2}(x)\theta_1^{n-2}(z)\theta_2(z)+\dots+f_0(x)\theta_2^{n-1}(z))$$

$$-\theta(z+c+x)(g_n(x)\theta_1^{n}(z) + g_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z)\theta_2(z) + \dots + g_0(x)\theta_2^{n}(z)) = 0.$$

Разложим

$$f_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z) + f_{n-2}(x)\theta_1^{n-2}(z)\theta_2(z) + \dots + f_0(x)\theta_2^{n-1}(z),$$

$$g_n(x)\theta_1^{n}(z) + g_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z)\theta_2(z) + \dots + g_0(x)\theta_2^{n}(z)$$

на множители. Получим

$$\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c')(a_{n-1}(x)\theta_1(z)+b_{n-1}(x)\theta_2(z))\dots(a_1(x)\theta_1(z)+b_1(x)\theta_2(z))$$

$$-\theta(z+c+x)(a_n'(x)\theta_1(z) + b_n'(x)\theta_2(z))\dots(a_1'(x)\theta_1(z) + b_1'(x)\theta_2(z)) = 0, \quad (5)$$

где $a_j'(x)$, $b_j'(x)$, $a_k(x)$, $b_k(x)$ — некоторые функции, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n-1$.

Фиксируем точку x. Отметим, что если две функции $a_j'\theta_1(z) + b_j'\theta_2(z)$ и $a_k\theta_1(z) + b_k\theta_2(z)$ имеют общий нуль на Θ, то они пропорциональны. Предположим, что это не так. Тогда их отношение имеет единственный простой полюс на $\Theta \subset X^2$ (по лемме 3). Следовательно, отображение

$$\big(a_j'\theta_1(z) + b_j'\theta_2(z) : a_k\theta_1(z) + b_k\theta_2(z)\big) : \Theta \to \mathbf{CP}^1,$$

где $\mathbf{CP}^1$ — одномерное проективное пространство, является изоморфизмом. Род римановой поверхности $\Theta \subset X^2$ равен 2. Получили противоречие.

Нули у $a_k\theta_1(z) + b_k\theta_2(z)$ и $\theta(z+c+x)$ на Θ не могут совпадать, потому что эти функции можно рассматривать как сечения линейного расслоения над $\Theta \subset X^2$ и их отношение

$$\frac{a_k\theta_1(z) + b_k\theta_2(z)}{\theta(z+c+x)} \quad (6)$$

также является сечением линейного расслоения, у которого нет ни полюсов, ни нулей. Такими сечениями могут быть только константы, но функция (6) не является константой на Θ.

Следовательно, (5) эквивалентно равенству

$$\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c') + \theta(z+c+x)(a(x)\theta_1(z) + b(x)\theta_2(z)) = 0,$$

где $a(x)$, $b(x)$ — некоторые функции, из которого вытекает, что функции $\theta(z-c')$ и $\theta(z+c+x)$ должны иметь общий нуль на Θ для любого x, что невозможно, как легко следует, например, из теоремы Римана о нулях тэта-функции на римановой поверхности. Лемма 5 доказана.

Для завершения доказательства теоремы Накаяшики достаточно показать, что $\mathscr{D}$-модули $\mathscr{D}(\psi, \psi_{c'})$ и M_c совпадают.

Лемма 6. *Имеет место равенство* $\mathscr{D}(\psi, \psi_{c'}) = M_c$.

Доказательство. Вложение $\mathscr{D}(\psi, \psi_{c'}) \subset M_c$ очевидно. Фиксируем точку x. Обозначим через $\mathscr{D}^k(\psi, \psi_{c'}) \subset \mathscr{D}(\psi, \psi_{c'})$ множество функций

$$\{d_1\psi_{c'} + d_2\psi \mid d_1, d_2 \in \mathscr{D},\ \operatorname{ord}(d_1) \le k-2,\ \operatorname{ord}(d_2) \le k-1\}.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\dim_{\mathbb{C}} M_c(k) = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{D}^k(\psi, \psi_{c'}).$$

По лемме 1

$$\dim_{\mathbb{C}} M_c(k) = \dim_{\mathbb{C}} \biggl\{ \sum_{a \in \mathbb{Z}^g/k\mathbb{Z}^g} \beta_a \theta \left[\frac{a}{k}, 0\right](kz + c + x, k\Omega) \mid \beta_a \in \mathbb{C} \biggr\}.$$

Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} M_c(k) = k^2$ (см., например, [9]). Так как размерность пространства дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами порядка $\le k$ равна

$$1 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

и $\mathscr{D}$-модуль $\mathscr{D}(\psi, \psi_{c'})$ свободный, то

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{D}^k(\psi, \psi_{c'}) = \frac{(k-1)k}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = k^2.$$

Лемма 6 доказана.

4. Коммутативное кольцо 2 × 2-матричных дифференциальных операторов

Обозначим через D кольцо дифференциальных операторов $\mathbb{C}[\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_g}]$ с постоянными коэффициентами. Из определения следует, что M_c представляет собой D-модуль. Пусть $\Phi_c = (\phi_{1c}, \dots, \phi_{g!c})^\top$ — базис M_c. Тогда имеется кольцевое вложение

$$\mathscr{L}_{\Phi_c} : D \to \operatorname{Mat}(g!, \mathscr{D}),$$

определенное формулой

$$\mathscr{L}_{\Phi_c}(d)\Phi_c = d\Phi_c,$$

где $d \in D$, $d\Phi_c = (d\phi_{1c}, \dots, d\phi_{g!c})^\top$. Образом вложения $\mathscr{L}_{\Phi_c}$ является коммутативное кольцо матричных дифференциальных операторов, изоморфное D. Через Z_j обозначим оператор $\mathscr{L}_{\Phi_c}(\partial_{z_j})$, $j = 1, \dots, g$.

Найдем коммутатор $[L_{\Phi_c}(\lambda), Z_j]$, где $\lambda \in A_\Theta$:

$$Z_j L_{\Phi_c}(\lambda)\Phi_c = Z_j(\lambda\Phi_c) = \lambda(Z_j\Phi_c) = \lambda(\partial_{z_j}\Phi_c),$$

$$L_{\Phi_c}(\lambda)Z_j\Phi_c = L_{\Phi_c}\partial_{z_j}\Phi_c = \partial_{z_j}(L_{\Phi_c}(\lambda)\Phi_c) = \partial_{z_j}(\lambda\Phi_c) = (\partial_{z_j}\lambda)\Phi_c + \lambda(\partial_{z_j}\Phi_c).$$

Получили равенство

$$[L_{\Phi_c}(\lambda), Z_j]\Phi_c = (\partial_{z_j}\lambda)\Phi_c,$$

следовательно, доказано

Предложение 1. *$[L_{\Phi_c}(\lambda), Z_j] = L_{\Phi_c}(\partial_{z_j}\lambda)$, где $\lambda \in A_\Theta$, $j = 1,\dots,g$.*

Выясним, как изменяются матричные операторы при замене базиса $\mathscr{D}$-модуля M_c. Пусть $\Phi_c = (\phi_{1c},\dots,\phi_{g!c})^\top$ и $\Psi_c = (\psi_{1c},\dots,\psi_{g!c})^\top$ — два базиса $\mathscr{D}$-модуля M_c. Согласно теореме Накаяшики существуют единственные операторы $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{Mat}(g!, \mathscr{D})$ такие, что $\mathscr{A}\Phi_c = \Psi_c$, $\mathscr{B}\Psi_c = \Phi_c$, значит, $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$ — единичный элемент в $\mathrm{Mat}(g!, \mathscr{D})$. Через $\mathscr{A}^{-1}$ обозначим оператор $\mathscr{B}$. Легко убедиться, что

$$\mathscr{A} L_{\Phi_c}(\lambda)\mathscr{A}^{-1}\Psi_c = \lambda\Psi_c, \quad \mathscr{A}\mathscr{L}_{\Phi_c}(d)\mathscr{A}^{-1}\Psi_c = d\Psi_c,$$

где $\lambda \in A_\Theta$, $d \in D$. Следовательно, справедлива

Лемма 7. *Имеют место равенства*

$$\mathscr{A} L_{\Phi_c}(\lambda)\mathscr{A}^{-1} = L_{\Psi_c}(\lambda), \quad \mathscr{A}\mathscr{L}_{\Phi_c}(d)\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{L}_{\Psi_c}(d).$$

В дальнейшем предполагаем $g = 2$. В предложении 2 найдем операторы $L_{\Phi_c}(\lambda)$ второго порядка. Они отвечают следующим спектральным функциям:

$$\lambda = \frac{\partial^2 \log\theta(z)}{\partial z_k \partial z_j}, \quad j,k = 1,2.$$

В предложении 3 найдем операторы Z_1, Z_2. В лемме 9 докажем, что полученные в предложениях 1–3 операторы порождают кольцо $L_{\Phi_c}(A_\Theta)$.

Следующая лемма доказывается прямыми вычислениями. Мы их опускаем.

Лемма 8. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned}\partial_{x_k}\partial_{x_j}&\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z))\right)\\ &= \partial_{z_k}\partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z))\\ &\quad + \partial_{z_k}\partial_{z_j}(\log\theta(z))\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z)),\end{aligned}$$

где $k, j = 1, 2$.

Пусть c' общего положения. Обозначим через $p_1, p_2 \in \mathbb{C}^2$ точки пересечения $\Gamma_{c'}$ с Θ (p_1 и p_2 определены с точностью до элемента решетки $\mathbb{Z}^2 + \Omega\mathbb{Z}^2$). Через $L_{c,c'}$ обозначим операторы Накаяшики, построенные по базису $\psi, \psi_{c'}$. Для краткости введем обозначения

$$H^{kj}_{c,c'} = [L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))]_{11}, \quad F^{kj}_{c,c'} = [L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))]_{12}.$$

Предложение 2. *Имеет место равенство*

$$[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))]_{11} = -\partial_{x_k}\partial_{x_j} + f^{kj}_{c,c'}\partial_{x_1} + g^{kj}_{c,c'}\partial_{x_2} + h^{kj}_{c,c'},$$

где

$$\begin{aligned}f^{kj}_{c,c'} &= \frac{\theta_2(p_1)\theta_2(p_2)}{\theta_2(p_2)\theta_1(p_1) - \theta_2(p_1)\theta_1(p_2)}\\ &\quad\times\left(\partial_{x_k}\log\theta(p_1+c+x)\frac{\theta_j(p_1)}{\theta_2(p_1)} + \partial_{x_j}\log\theta(p_1+c+x)\frac{\theta_k(p_1)}{\theta_2(p_1)} - \frac{\theta_{kj}(p_1)}{\theta_2(p_1)}\right.\end{aligned}$$

$$- \partial_{x_k} \log\theta(p_2+c+x)\frac{\theta_j(p_2)}{\theta_2(p_2)} - \partial_{x_j} \log\theta(p_2+c+x)\frac{\theta_k(p_2)}{\theta_2(p_2)} + \frac{\theta_{kj}(p_2)}{\theta_2(p_2)}\Bigg),$$

$$g^{kj}_{c,c'} = \frac{\theta_1(p_1)\theta_1(p_2)}{\theta_2(p_1)\theta_1(p_2)-\theta_2(p_2)\theta_1(p_1)}$$

$$\times\Bigg(\partial_{x_j}\log\theta(p_1+c+x)\frac{\theta_k(p_1)}{\theta_1(p_1)} + \partial_{x_k}\log\theta(p_1+c+x)\frac{\theta_j(p_1)}{\theta_1(p_1)} - \frac{\theta_{kj}(p_1)}{\theta_1(p_1)}$$

$$- \partial_{x_j} \log\theta(p_2+c+x)\frac{\theta_k(p_2)}{\theta_1(p_2)} - \partial_{x_k} \log\theta(p_2+c+x)\frac{\theta_j(p_2)}{\theta_1(p_2)} + \frac{\theta_{kj}(p_2)}{\theta_1(p_2)}\Bigg),$$

$$h^{kj}_{c,c'} = \frac{\theta(\Delta+c')}{\theta(\Delta+c'+c+x)}$$

$$\times\left(\partial_{z_k}\partial_{z_j} - f^{kj}_{c,c'}\partial_{z_1} - g^{kj}_{c,c'}\partial_{z_2} + 2\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\right)\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)\Bigg|_{z=\Delta+c'},$$

$$[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))]_{12} = \frac{\theta^2(0)}{\theta(c+c'+x)\theta(c')}$$

$$\times\left(\partial_{z_k}\partial_{z_j} - f^{kj}_{c,c'}\partial_{z_1} - g^{kj}_{c,c'}\partial_{z_2} - h^{kj}_{c,c'} + 2\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\right)\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)\Bigg|_{z=0},$$

$$[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))]_{21} = F^{kj}_{c+c',-c'}\big(\alpha_{11}H^{11}_{c,c'} + \alpha_{12}H^{12}_{c,c'} + \alpha_{22}H^{22}_{c,c'} + \alpha\big),$$

$$[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))]_{22} = F^{kj}_{c+c',-c'}\big(\alpha_{11}F^{11}_{c,c'} + \alpha_{12}F^{12}_{c,c'} + \alpha_{22}F^{22}_{c,c'}\big) + H^{kj}_{c+c',-c'},$$

где $\alpha, \alpha_{kj} \in \mathbb{C}$ *такие, что*

$$\frac{\theta(z-c')\theta(z+c')}{\theta^2(z)} = \alpha_{11}\partial^2_{z_1}\log\theta(z) + \alpha_{12}\partial_{z_1}\partial_{z_2}\log\theta(z) + \alpha_{22}\partial^2_{z_2}\log\theta(z) + \alpha.$$

Доказательство предложения 2. Легко проверить, что функция

$$\frac{\partial_{x_k}\partial_{x_j}\psi + \partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\psi}{\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\log\theta(z))}$$

имеет полюс второго порядка на Θ, т. е.

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j}\psi + \partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\psi \in M_c(2).$$

Следовательно, оператор $H^{kj}_{c,c'}$ имеет вид

$$H^{kj}_{c,c'} = -\partial_{x_k}\partial_{x_j} + f^{kj}_{c,c'}\partial_{x_1} + g^{kj}_{c,c'}\partial_{x_2} + h^{kj}_{c,c'},$$

а $F^{kj}_{c,c'}$ — оператор умножения на функцию

$$H^{kj}_{c,c'}\psi + F^{kj}_{c,c'}\psi_{c'} = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\psi. \tag{7}$$

Для $z \in \Gamma_{c'}$ равенство (7) перепишется в виде

$$H^{kj}_{c,c'}\psi = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\psi.$$

Из лемм 2 и 8 следует, что последнее равенство эквивалентно

$$\left(\partial_{z_k}\partial_{z_j} - f^{kj}_{c,c'}\partial_{z_1} - g^{kj}_{c,c'}\partial_{z_2} - h^{kj}_{c,c'} + 2\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\right)\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right) = 0. \qquad (8)$$

Умножим обе части (8) на $\theta^2(z)$ и положим $z = p_1, z = p_2$. Получим систему линейных уравнений относительно $f^{kj}_{c,c'}$ и $g^{kj}_{c,c'}$:

$$f^{kj}_{c,c'}\theta_1(p_1) + g^{kj}_{c,c'}\theta_2(p_1) = \frac{\theta_j(p_1+c+x)\theta_k(p_1) + \theta_k(p_1+c+x)\theta_j(p_1) - \theta_{kj}(p_1)}{\theta(p_1+c+x)},$$

$$f^{kj}_{c,c'}\theta_1(p_2) + g^{kj}_{c,c'}\theta_2(p_2) = \frac{\theta_j(p_2+c+x)\theta_k(p_2) + \theta_k(p_2+c+x)\theta_j(p_2) - \theta_{kj}(p_2)}{\theta(p_2+c+x)}.$$

Решая ее, находим $f^{kj}_{c,c'}$, $g^{kj}_{c,c'}$. Полагая в (8) $z = \Delta + c'$ ($\Delta + c' \in \Gamma_{c'}$, так как $\theta(\Delta) = 0$), найдем $h^{kj}_{c,c'}$. Из лемм 2 и 8 следует, что (7) эквивалентно равенству

$$\left(-\partial_{z_k}\partial_{z_j} + f^{kj}_{c,c'}\partial_{z_1} + g^{kj}_{c,c'}\partial_{z_2} + h^{kj}_{c,c'}\right)\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)$$
$$+ F^{kj}_{c,c'}\frac{\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c')}{\theta^2(z)} = 2\partial_{z_i}\partial_{z_j}\log\theta(z)\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}.$$

Полагая в этом равенстве $z = 0$, получим $F^{kj}_{c,c'}$.

Найдем оставшиеся компоненты оператора $L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))$. Заменим в равенстве (7) c' на $-c'$, c на $c+c'$ и умножим обе части на $\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}$. Получим

$$H^{kj}_{c+c',-c'}\psi_{c'} + F^{kj}_{c+c',-c'}\frac{\theta(z-c')\theta(z+c')}{\theta^2(z)}\psi = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\psi_{c'}. \qquad (9)$$

Пусть

$$\frac{\theta(z-c')\theta(z+c')}{\theta^2(z)} = \alpha_{11}\partial^2_{z_1}\log\theta(z) + \alpha_{12}\partial_{z_1}\partial_{z_2}\log\theta(z) + \alpha_{22}\partial^2_{z_2}\log\theta(z) + \alpha,$$

где $\alpha, \alpha_{kj} \in \mathbb{C}$. Существование констант α, α_{kj}, $k, j = 1, 2$, следует из того, что размерность пространства мероморфных функций с полюсом порядка не выше чем 2 на Θ равна 4 (см., например, [9]). Функции 1 и $\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)$, $k, j = 1, 2$, линейно независимы над $\mathbb{C}$. Это можно, например, показать с помощью теоремы Накаяшики. Операторы $L_{c,c'}(1)$ и $L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))$, $k, j = 1, 2$, линейно независимы, так как старшие части у 11-компонент этих операторов, как мы показали, равны соответственно 1 и $-\partial_{x_k}\partial_{x_j}$. Равенство (9) эквивалентно

$$F^{kj}_{c+c',-c'}(\alpha_{11}H^{11}_{c,c'} + \alpha_{12}H^{12}_{c,c'} + \alpha_{22}H^{22}_{c,c'} + \alpha)\psi$$
$$+ (F^{kj}_{c+c',-c'}(\alpha_{11}F^{11}_{c,c'} + \alpha_{12}F^{12}_{c,c'} + \alpha_{22}F^{22}_{c,c'}) + H^{kj}_{c+c',-c'})\psi_{c'} = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)\psi_{c'},$$

из которого получаем $[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))]_{21}$ и $[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z))]_{22}$. Предложение 2 доказано.

Найдем операторы Z_1 и Z_2.

Предложение 3. *Операторы Z_1 и Z_2, построенные по базису $\psi, \psi_{c'}$, имеют вид*

$$[Z_j]_{11} = -x_1 H^{1j}_{c,c'} - x_2 H^{j2}_{c,c'} + \partial_{x_j}, \quad [Z_j]_{12} = -x_1 F^{1j}_{c,c'} - x_2 F^{j2}_{c,c'},$$

$$[Z_j]_{21} = -x_1 [L_{c,c'}(\partial_{z_1}\partial_{z_j} \log\theta(z))]_{21} - x_2 [L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_2} \log\theta(z))]_{21} + k_1^j \partial_{x_1} + k_2^j \partial_{x_2} + h^j_{c,c'},$$

$$[Z_j]_{22} = -x_1 [L_{c,c'}(\partial_{z_1}\partial_{z_j} \log\theta(z))]_{22} - x_2 [L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_2} \log\theta(z))]_{22} + g^j_{c,c'} + 2\partial_{x_j},$$

где

$$k_1^j = \frac{1}{\theta_1(p_2)\theta_2(p_1) - \theta_1(p_1)\theta_2(p_2)} \times \left(\frac{\theta_j(p_1 - c')\theta(p_1 + c + x + c')\theta_2(p_2)}{\theta(p_1 + c + x)} - \frac{\theta_j(p_2 - c')\theta(p_2 + c + x + c')\theta_2(p_1)}{\theta(p_2 + c + x)} \right),$$

$$k_2^j = \frac{1}{\theta_1(p_1)\theta_2(p_2) - \theta_1(p_2)\theta_2(p_1)} \times \left(\frac{\theta_j(p_1 - c')\theta(p_1 + c + x + c')\theta_1(p_2)}{\theta(p_1 + c + x)} - \frac{\theta_j(p_2 - c')\theta(p_2 + c + x + c')\theta_1(p_1)}{\theta(p_2 + c + x)} \right),$$

$$h^j_{c,c'}(x) = \frac{\theta_j(\Delta)\theta(\Delta + c + x + 2c')}{\theta(\Delta + c')\theta(\Delta + c + x + c')}$$
$$-k_1^j \left(\frac{\theta_1(\Delta + c + x + c')}{\theta(\Delta + c + x + c')} - \frac{\theta_1(\Delta + c')}{\theta(\Delta + c')} \right) - k_2^j \left(\frac{\theta_2(\Delta + c' + c + x)}{\theta(\Delta + c' + c + x)} - \frac{\theta_2(\Delta + c')}{\theta(\Delta + c')} \right),$$

$$g^j_{c,c'}(x) = -\frac{\theta_j(c')}{\theta(c')} + \frac{\theta_j(c + x + c')}{\theta(c + x + c')} - \frac{\theta^2(0)}{\theta(c')\theta(c + x + c')} \left(k_1^j \partial_{z_1} + k_2^j \partial_{z_2} + h^j_{c,c'} \right) \left(\frac{\theta(z + c + x)}{\theta(z)} \right) \bigg|_{z=0},$$

$j = 1, 2$.

Доказательство предложения 3. Нужно найти оператор $Z_j \in \mathrm{Mat}(2, \mathscr{D})$ такой, что

$$[Z_j]_{11}\psi + [Z_j]_{12}\psi_{c'} = \partial_{z_j}\psi, \quad [Z_j]_{21}\psi + [Z_j]_{22}\psi_{c'} = \partial_{z_j}\psi_{c'},$$

$$\partial_{z_j}\psi = \partial_{z_j} \left(\frac{\theta(z + c + x)}{\theta(z)} \right) \exp(-x_1 \partial_{z_1} \log\theta(z) - x_2 \partial_{z_2} \log\theta(z))$$
$$- (x_1 \partial_{z_1}\partial_{z_j} \log\theta(z) + x_2 \partial_{z_j}\partial_{z_2} \log\theta(z)) \frac{\theta(z + c + x)}{\theta(z)} \exp(-x_1 \partial_{z_1} \log\theta(z)$$
$$- x_2 \partial_{z_2} \log\theta(z)) = \left(-x_1 H^{1j}_{c,c'} - x_2 H^{j2}_{c,c'} + \partial_{x_j} \right)\psi - (x_1 F^{1j}_{c,c'} + x_2 F^{j2}_{c,c'})\psi_{c'}.$$

Следовательно,

$$[Z_j]_{11} = -x_1 H^{1j}_{c,c'} - x_2 H^{j2}_{c,c'} + \partial_{x_j}, \quad [Z_j]_{12} = -x_1 F^{1j}_{c,c'} - x_2 F^{j2}_{c,c'}.$$

Найдем оставшиеся компоненты Z_j:

$$\partial_{z_j}\psi_{c'} = \partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}\right)\frac{\theta(z+c+x+c')}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\log\theta(z))$$

$$+\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}\partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z+c+x+c')}{\theta(z)}\right)\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\log\theta(z))$$

$$-\big(x_1\partial_{z_1}\partial_{z_j}\log\theta(z)+x_2\partial_{z_j}\partial_{z_2}\log\theta(z)\big)\frac{\theta(z-c')\theta(z+c+x+c')}{\theta^2(z)}$$

$$\times\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\log\theta(z)). \quad (10)$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}\right)\frac{\theta(z+c+x+c')}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\log\theta(z))-\partial_{x_j}\psi_{c'}$$

$$=\frac{\theta_j(z-c')\theta(z+c+x+c')-\theta(z-c')\theta_j(z+c+x+c')}{\theta^2(z)}$$

$$\times\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\log\theta(z))\in M_c(2),$$

следовательно, существуют функции $k_1^j, k_2^j, h_{c,c'}^j, g_{c,c'}^j\in\mathscr{O}$ такие, что

$$\partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}\right)\frac{\theta(z+c+x+c')}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\log\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\log\theta(z))$$

$$=\big(k_1^j\partial_{x_1}+k_2^j\partial_{x_2}+h_{c,c'}^j\big)\psi+\big(g_{c,c'}^j+\partial_{x_j}\big)\psi_{c'}. \quad (11)$$

Чтобы не загромождать запись, мы не ставим индексов c, c' у k_1^j и k_2^j. Умножим обе части равенства (11) на $\theta^2(z)$ и положим $z=p_1, z=p_2$. Получим систему линейных уравнений

$$k_1^j\theta_1(p_1)+k_2^j\theta_2(p_1)=-\frac{\theta_j(p_1-c')\theta(p_1+c+x+c')}{\theta(p_1+c+x)},$$

$$k_1^j\theta_1(p_2)+k_2^j\theta_2(p_2)=-\frac{\theta_j(p_2-c')\theta(p_2+c+x+c')}{\theta(p_2+c+x)}$$

относительно k_1^j и k_2^j. Решая ее, находим k_1^j и k_2^j. Положив в (11) $z=\Delta+c'$ ($\Delta+c'\in\Gamma_{c'}$), найдем $h_{c,c'}^j(x)$. Полагая в (11) $z=0$, находим $g_{c,c'}^j(x)$. Из (10) и (11) получаем $[Z_j]_{21}$, $[Z_j]_{22}$. Предложение 3 доказано.

Покажем, что полученные операторы порождают кольцо $L_{c,c'}(A_\Theta)$.

Лемма 9. *Операторы*

$$L_{\Phi_c}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\log\theta(z)), \quad L_{\Phi_c}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\partial_{z_s}\log\theta(z)),$$

где $s,j,k=1,2$, *порождают кольцо операторов* $L_{c,c'}(A_\Theta)$.

Доказательство. Размерность пространства мероморфных функций на X^2, имеющих полюс только на Θ кратности не выше чем 3, равна 9 (см., например, [9]). Выберем базис в этом пространстве, состоящий из функций вида

$$1,\ \frac{f_1}{\theta^3},\dots,\frac{f_8}{\theta^3},$$

где f_i не делится на θ, $i = 1, \dots, 8$. В качестве такого базиса, как будет показано ниже, можно взять функции

$$\begin{gathered} 1, \quad \partial_{z_k}\partial_{z_j}\partial_{z_s}\log\theta(z), \quad \partial^3_{z_1}\log\theta(z) + \partial_{z_j}\partial_{z_s}\log\theta(z), \\ (\partial_{z_1}\partial_{z_2}\log\theta(z))^2 - \partial^2_{z_1}\log\theta(z)\partial^2_{z_2}\log\theta(z), \end{gathered} \tag{12}$$

где $k, j, s = 1, 2$. По теореме Лефшеца отображение $(\theta^3 : f_1 : \dots : f_8)$ задает вложение $F : X^2 \to \mathbf{CP}^8$ в проективное пространство. Пусть $(y_0 : \dots : y_8)$ — однородные координаты в $\mathbf{CP}^8$. Тогда ограничение функций $\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_8}{y_0}$ на $F(X^2)$ порождают координатное кольцо аффинного алгебраического многообразия $F(X^2 \backslash \Theta)$. Следовательно, функции

$$\frac{f_1}{\theta^3}, \dots, \frac{f_8}{\theta^3}$$

порождают A_Θ. Осталось показать, что функции (12) линейно независимы над $\mathbb{C}$. Это следует из того, что операторы

$$\begin{gathered} L_{c,c'}(1),\ L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\partial_{z_s}\log\theta(z)),\ L_{c,c'}(\partial^3_{z_1}\log\theta(z) + \partial_{z_j}\partial_{z_s}\log\theta(z)), \\ (L_{c,c'}(\partial_{z_1}\partial_{z_2}\log\theta(z))^2 - \partial^2_{z_1}\log\theta(z)\partial^2_{z_2}\log\theta(z)), \end{gathered}$$

где $k, j, s = 1, 2$, линейно независимы, так как старшие символы 11-компонент этих операторов равны соответственно

$$\begin{gathered} 1, \quad -2\partial_{x_k}\partial_{x_j}\partial_{x_s}, \quad -2\partial^3_{x_1} - \partial_{x_j}\partial_{x_s}, \\ f^{22}_{c,c'}\partial^3_{x_1} + \left(g^{22}_{c,c'} - 2f^{12}_{c,c'}\right)\partial^2_{x_1}\partial_{x_2} + \left(f^{11}_{c,c'} - 2g^{12}_{c,c'}\right)\partial_{x_1}\partial^2_{x_2} + g^{11}_{c,c'}\partial^3_{x_2}. \end{gathered}$$

Лемма 9 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nakayashiki A.* Structure of Baker — Akhiezer modules of principally polarized abelian varieties, commuting partial differential operators and associated integrable systems // Duke Math. J. 1991. V. 62, N 2. P. 315–358.
2. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шредингера в периодическом магнитном поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, № 1. С. 15–19.
3. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 784–788.
4. *Feldman J., Knorrer H., Trubowitz E.* There is no two-dimensional analogue of Lame's equation // Math. Ann. 1992. V. 294, N 2. P. 295–324.
5. *Nakayashiki A.* Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties // Amer. J. Math. 1994. V. 116. P. 65–100.
6. *Mukai S.* Duality between $D(X)$ and $D(\widehat{X})$ with its application to Picard sheaves // Nagoya Math. J. 1981. V. 81. P. 153–175.
7. *Andreotti A., Mayer A.* On period relations for abelian integrals on algebraic curves // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4). 1967. V. 21. P. 189–238.
8. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 6. С. 183–208.
9. *Тайманов И. А.* Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения // Успехи мат. наук. 1997. Т. 52, № 1. С. 149–224.

Статья поступила 29 октября 1999 г.

г. Новосибирск
mironov@math.nsc.ru