Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 517.555+517.547+517.988

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ С КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА В КЛАССЕ ВИНЕРА

Л. С. Маергойз

Аннотация: Выведена формула неустранимой погрешности Ω экстраполяции по точным данным с конечного множества $U \subset \mathbb{C}^n$ в расположенную вне U фиксированную точку для целых функций класса Винера W_σ^n из заданного множества корректности. Найдена экстремальная функция, погрешность экстраполяции которой совпадает с величиной Ω. Изучены экстремальные свойства функций класса W_σ^n, которые помогли при $n = 1$ получить сравнительно простую оценку погрешности Ω. Кроме того, исследуется асимптотическое поведение погрешности, когда узлы экстраполяции расположены равномерно на фиксированном отрезке вещественной оси, а их число стремится к бесконечности. Библиогр. 21.

Как известно, экстраполяция целых функций с конечного множества возможна лишь в редких случаях — в классах многочленов, квазиполиномов (т. е. решений линейных дифференциальных уравнений конечного порядка с постоянными коэффициентами, см., например, [1, гл. 2]). В общем случае при наличии конечного числа заданных значений целой функции ее аналитическое продолжение в фиксированную точку возможно лишь с некоторой ошибкой.

В данной работе рассматривается задача оптимальной экстраполяции с конечного множества в популярном в задачах естествознания классе Винера, т. е. классе целых функций с финитным спектром (см., например, [2]). А именно, объектом исследования является класс $W_\sigma^n = W(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \{f\}$ целых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|f(z)| < C_f \exp\{\sigma_1 |\operatorname{Im} z_1| + \dots + \sigma_n |\operatorname{Im} z_n|\}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{1}$$

где $\sigma_1 > 0, \dots, \sigma_n > 0$, $C_f = \mathrm{const} > 0$, и принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$ на вещественном подпространстве $\mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{C}^n$.

В § 1 получены формулы для неустранимой погрешности наилучшего аналитического продолжения по точным данным с конечного множества в классе W_σ^n и других параметров оптимальной экстраполяции. Кроме того, в § 1 содержится аналог для конечного числа измерений известной формулы А. А. Котельникова (см. [2]). При этом использовались известные подходы к определению погрешности оптимального восстановления линейных функционалов в гильбертовых пространствах (см., например, [3, 4]). Найденные в § 1 результаты примыкают к исследованиям А. М. Федотова в [5–7]. В § 2 изучаются экстремальные свойства функций класса W_σ^n, а также их производных и их приложения к получению оценки оптимальной погрешности экстраполяции. Необходимость такой оценки объясняется тем, что в общем случае формула для этой погрешности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–15–96140).

© 2000 Маергойз Л. С.

громоздкая. Эти исследования дополняют некоторые результаты И. И. Ибрагимова из [8, 9]. В § 3 рассматривается класс Винера W_σ^1 целых функций одной переменной. Для функций этого класса получена опирающаяся на результаты § 2 простая оценка сверху неустранимой погрешности оптимальной экстраполяции $\Omega_N(z_0)$ с произвольного конечного множества $U_N = \{z_1, z_2, \dots, z_N\} \subset \mathbb{C}$ в точку $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U_N$. Кроме того, здесь изучается асимптотическое поведение $\Omega_N(z_0)$ при $N \to \infty$ для случая, когда множество U_N состоит из узлов равномерной сетки на заданном отрезке вещественной оси и число этих узлов неограниченно увеличивается.

В целом эта статья является переработанным вариантом препринта автора [10]. Основные ее результаты анонсированы в [11].

Ниже используются обозначения: $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ и т. д.; $dt = dt_1 \dots dt_n$; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$$\langle t, z\rangle = \sum_{j=1}^n t_j z_j; \quad \|\varphi\|_U^2 = \int_U |\varphi(t)|^2\, dt,$$

где U — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что $\operatorname{int} U \neq \oslash$; $\Delta_\sigma = \{t \in \mathbb{R}^n : |t_j| \le \sigma_j,\ j = 1, \dots, n\}$, где $\sigma_1 > 0, \dots, \sigma_n > 0$.

§ 1. Неустранимая погрешность аналитического продолжения с конечного множества в классе Винера

Пусть $U_N = \{z_1, \dots, z_N\}$ — подмножество различных точек в $\mathbb{C}^n$; $I_N = \{f \in W_\sigma^n : f(z) = 0\ \forall z \in U_N\}$; $V = \{f \in W_\sigma^n : \|f\| \le r\}$, где $r > 0$; $z_0 \in \mathbb{C}^n \backslash U_N$. Для характеристики качества аналитического продолжения с множества U_N в точку z_0 функций из ограниченного множества V в W_σ^n обычно используется функционал

$$\Omega_N(z_0) = \inf_{\alpha \in \mathbb{C}^N} \{E_N(z_0; \alpha)\}, \quad E_N(z_0; \alpha) = \sup_{f \in V} \left| f(z_0) - \sum_{j=1}^N \alpha_j f(z_j) \right|. \tag{2}$$

Величина $\Omega_N(z_0)$ задает неустранимую погрешность оптимальной экстраполяции любой функции f из множества V в точку z_0. Если $\Omega_N(z_0) = E_N(z_0; \alpha^*)$ при некотором $\alpha^* \in \mathbb{C}^n$, то элемент α^* определяет оптимальный линейный алгоритм аналитического продолжения функции $f \in V$ в точку z_0 в том смысле, что прогнозируемое значение $w_0 = f(z_0)$ находится в круге радиуса $R \le \Omega_N(z_o)$ с центром в точке

$$w^* = \sum_{j=1}^N \alpha_j^* f(z_j). \tag{3}$$

Поскольку $z_0(f) := f(z_0)$, $f \in W_\sigma^n$, — линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве W_σ^n, рассматриваемая задача аналитического продолжения сводится к задаче об оптимальном восстановлении линейного функционала в гильбертовом пространстве (см. [3, 4]).

Пусть H — комплексное гильбертово пространство; S_N — его N-мерное подпространство с базисом $x_1, \dots, x_N$; $x_0 \in H$; $M = \{\varphi \in H : \|\varphi\| \le r\}$, где $r > 0$; $x_j(\varphi) = (x_j, \varphi)$, $\varphi \in H$; $j = 0, 1, \dots, N$, — элементы H^*, (x, φ) — скалярное произведение элементов x и φ в H. Качество наилучшего восстановления значений функционала $x_0(\varphi)$ на M по значениям функционалов $x_j(\varphi)$, $j=1,\dots,N$, определяется с помощью функционала

$$\omega_N(x_0)=\inf\left\{\sup_{\varphi\in M}\left|x_0(\varphi)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x(\varphi)\right| : \alpha\in\mathbb{C}^N\right\}. \tag{4}$$

Следующее утверждение, по-видимому, известно (однако для полноты изложения его доказательство приводится ниже, поскольку каких-либо ссылок на этот результат автору не удалось найти).

Лемма 1. *Пусть $\Gamma(y_1,\dots,y_m)$ — определитель Грама элементов $y_1,\dots,y_m$ из H, т. е. определитель матрицы $\|a_{kj}=(y_j,y_k)\|$ порядка m. В предыдущих обозначениях для оптимальной погрешности восстановления линейного функционала, определяемой соотношением (4), справедлива формула*

$$[\omega_N(x_0)]^2=r^2\cdot\frac{\Gamma(x_0,x_1,\dots,x_N)}{\Gamma(x_1,\dots,x_N)}, \tag{5}$$

причем

$$\omega_N(x_0)=\sup\bigl\{|(x_0,\varphi)| : \varphi\in M\cap S_N^{\perp}\bigr\}=r\bigl\|x_0-x_0^*\bigr\|, \tag{6}$$

где $S_N^{\perp}$ — подпространство в H, ортогональное S_N,

$$x_0^*=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & x_1 \quad x_N \\ (x_0,x_1) & \\ \vdots & \Gamma(x_1,\dots,x_N) \\ (x_0,x_N) & \end{vmatrix}}{\Gamma(x_1,\dots,x_N)} \tag{7}$$

— проекция элемента x_0 на подпространство S_N, и $\omega_N(x_0)=0$, если $x_0\in S_N$. Если $x_0\in H\backslash S_N$, то верхняя грань в правой части равенства (6) достигается лишь на элементах вида

$$\varphi_\Theta=\frac{re^{i\Theta}\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \quad x_N \\ (x_0,x_1) & \\ \vdots & \Gamma(x_1,\dots,x_N) \\ (x_0,x_N) & \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma(x_0,x_1,\dots,x_N)\cdot\Gamma(x_1,\dots,x_N)}},\quad \Theta\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

◀ В обозначениях, предшествующих формулировке леммы 1, имеем из формулы (4)

$$\omega_N(x_0)=\inf\{\sup_{\varphi\in M}|(x_0-y,\varphi)| : y\in S_N\}. \tag{9}$$

Из неравенства Коши — Буняковского при условии $x_0\neq y$ находим

$$|(x_0-y,\varphi)|\le\|x_0-y\|\,\|\varphi\|\quad\forall\varphi\in M,$$

причем равенство здесь достигается при $\varphi=\lambda(x_0-y)$, где $\lambda\in\mathbb{C}$;

$$|\lambda|\le r\|x_0-y\|^{-1}.$$

Отсюда и из (9) заключаем

$$\omega_N(x_0)=r\inf\{\|x_0-y\| : y\in S_N\}. \tag{10}$$

Поэтому (см. [12, с. 23; 13, с. 228])

$$\omega_N(x_0) = r\|x_0 - x^*\|, \tag{11}$$

где x^* — проекция элемента x_0 на подпространство S_N, определяемая формулой (7), и $x_0 - x^* \in S_N^\perp$. Если $x_0 \in S_N$, то (см. (10)) $\omega_N(x_0) = 0$ и, следовательно, формула (6) справедлива в этом случае.

Пусть $x_0 \in H \setminus S_N$. С помощью элементарных преобразований из (11) получаем

$$\omega_N(x_0) = |(x_0, \varphi_\Theta)|,$$

где

$$\varphi_\Theta = re^{i\Theta}\frac{x_0 - x^*}{\|x_0 - x^*\|} \in M \cap S_N^\perp \quad \forall\Theta \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

С другой стороны, непосредственно из соотношения (4) имеем

$$\omega_N(x_0) \geq \sup\bigl\{|(x_0, \varphi)| : \varphi \in M \cap S_N^\perp\bigr\}.$$

Итак, формула (6) справедлива. Равенство (5) вытекает из (10), (11) и формулы расстояния элемента x_0 пространства H до конечномерного подпространства S_N [12, с. 26]. Формула (8) — следствие соотношения (12) и известного представления элемента $x_0 - x^*$ [13, с. 228]. ►

Замечание. Формула (4) леммы 1 остается справедливой и без требования о том, что $x_1, \dots, x_n$ — линейно независимые элементы в H. В этом случае S_N — их линейная оболочка.

Лемма 1 дает ключ к решению вышеупомянутой задачи о наилучшем аналитическом продолжении в пространстве W_σ^n. Действительно, преобразование Фурье

$$[Tf](t) = \operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int\limits_{\Delta_A} f(\tau)e^{-i\langle t,\tau\rangle}d\tau, \qquad t \in \Delta_\sigma, \tag{13}$$

следа любой функции f класса W_σ^n определяет линейный изоморфизм $T : W_\sigma^n \to L_2(\Delta_\sigma)$ с сохранением изометрии $\|f\|_{\mathbb{R}^n} = \|Tf\|_{\Delta_\sigma}$ (см. теорему Планшереля и Пойа [14, с. 275]). Здесь $\Delta_A = \Delta_\sigma$ при $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = A$, а символ l. i. m. означает сходимость в среднем. С другой стороны, для любой фиксированной точки $z \in \mathbb{C}^n$ справедливо следующее представление для линейного непрерывного функционала:

$$f(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (e^{i\langle z,t\rangle}, \overline{[Tf]\,(t)}), \quad f \in W_\sigma^n, \tag{14}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Delta_\sigma)$.

Поэтому (см. (13)) $T(I_N) = S_N^\perp$ и

$$\Omega_N(z_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sup\bigl\{|(e^{i\langle z_0,t\rangle}, \varphi)| : \varphi \in S_N^\perp \cap M\bigr\},$$

если в обозначениях леммы 1 $H = L_2(\Delta_\sigma)$,

$$X := \{x_j = e^{i\langle z_j,t\rangle},\ t \in \Delta_\sigma\}_0^N. \tag{15}$$

Поскольку $z_k \neq z_j$ при $k \neq j$, то $X\backslash\{e^{i\langle z_0,t\rangle}\}$ — система линейно независимых функций пространства $H = L_2(\Delta_\sigma)$, удовлетворяющая всем условиям леммы 1. Отсюда вытекает изложенное в следующем утверждении решение исходной задачи об аналитическом продолжении в W_σ^n.

Теорема 1. *Пусть* $U_N = \{z_j = (z_1^{(j)}, \dots, z_n^{(j)})\}_1^N$ *— множество различных точек в* $\mathbb{C}^n$*;* $z_0 = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n \setminus U_N$*;* $V = \{f \in W_\sigma^n : \|f\|_{\mathbb{R}^n} \le r\}$*;* $r > 0$*;* $I_N = \{f \in W_\sigma^n : f(z) = 0\ \forall z \in U_N\}$*;* $K = V \cap I_N$*;* $\Gamma = \Gamma(x_1, \dots, x_N)$*;* $\Gamma_0 = \Gamma(x_0, x_1, \dots, x_N)$ *— определители Грама функций* $\{x_j\}_0^N$ *системы* (15)*. Тогда*

1) *элементами определителей* Γ, Γ_0 *являются числа*

$$a_{kj} = (x_j, x_k) = \prod_{i=1}^n s\big(z_i^{(j)}, z_i^{(k)}, \sigma_i\big), \quad k, j = 0, 1, \dots, N, \tag{16}$$

где

$$s(z, w, \sigma) = \begin{cases} \frac{2\sin\sigma(z-\bar{w})}{z-\bar{w}}, & z \ne \bar{w}; \\ 2\sigma, & z = \bar{w}; \end{cases} \qquad z, w \in \mathbb{C};\ \sigma > 0; \tag{17}$$

2) *в обозначениях соотношения* (2) *неустранимая погрешность* $\Omega_N(z_0)$ *аналитического продолжения функций множества* V *в точку* z_0 *определяется формулой*

$$\Omega_N(z_0) = \sup_{f\in K} |f(z_0)| = \frac{r}{(\sqrt{2\pi})^n}\sqrt{\Gamma/\Gamma_0}, \tag{18}$$

причем равенство $\Omega_N(z_0) = |f(z_0)|$ *справедливо лишь для функций множества* K*, допускающих представление*

$$f(z) = \frac{re^{i\theta}}{(\sqrt{2\pi})^n\sqrt{\Gamma\Gamma_0}} \cdot \begin{vmatrix} S(z,z_0) & S(z,z_1) & \dots & S(z,z_N) \\ a_{10} & & & \\ \vdots & & \Gamma & \\ a_{N0} & & & \end{vmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{19}$$

где $S(z, w) = \prod\limits_{i=1}^n s(z_i, w_i, \sigma_i)$ (см. (8), (16), (17));

3) *в обозначениях формул* (3), (16) *значение* $f(z_0)$ *в точке* z_0 *любой функции* f *из множества* V *удовлетворяет неравенству*

$$|f(z_0) - w^*| \le \Omega_N(z_0), \tag{20}$$

где

$$w^* = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & f(z_1)\dots f(z_N) \\ a_{10} & \\ \vdots & \Gamma \\ a_{N0} & \end{vmatrix}}{\Gamma}.$$

Замечания. 1. Оценка сверху для величины $\Omega_N(z_0)$ при условии $U_N \subset \mathbb{R}^n$ и алгоритм для ее реализации даны в работах [6, 7], где рассматривается предположение о том, что значения $\{f(z_j)\}_1^N$ для $f \in V$ (см. (5)) измеряются с некоторой погрешностью.

2. В частности, при $n = N = 1$ из формулы (18) получаем

$$\Omega_1(z_0) = \frac{r}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{H(y_0) - 4[H(y_1)]^{-1}|\Phi(z_0, \bar{z}_1)|^2}, \tag{21}$$

где

$$H(y) = \begin{cases} y^{-1}\,\mathrm{sh}(2\sigma y), & y \ne 0, \\ 2\sigma, & y = 0; \end{cases} \qquad \Phi(z, w) = \frac{\sin\sigma(z-\bar{w})}{z-\bar{w}}.$$

Если, кроме того, $y_0 = y_1 = 0$, т. е. $z_j = x_j$, $j = 1, 2$, то

$$\Omega_1(x_0) = r\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}\left[1 - \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\right]}, \tag{22}$$

где $u = \sigma(x_0 - x_1)$, а экстремальная функция имеет вид (см. (19))

$$f(z) = re^{i\Theta}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\left[\frac{\sin\sigma(z - x_0)}{\sigma(z - x_0)} - \frac{\sin\sigma(z - x_1)}{\sigma(z - x_1)}\cdot\frac{\sin u}{u}\right]\left[1 - \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

3. Неравенство (20) — аналог для конечного числа измерений известной формулы А. А. Котельникова о разложении любой целой функции класса Винера W^1_σ в интерполяционный ряд исходя из ее значений в узлах равномерной сетки, расположенной на всей вещественной оси (см., например, [2, с. 151], а также [15, § 30], где имеется информация о других обобщениях этой формулы).

§ 2. Неравенства И. И. Ибрагимова для целых функций класса Винера

Перейдем к изучению ряда экстремальных свойств функций класса W^n_σ, которые помогут получить довольно простую оценку неустранимой погрешности оптимальной экстраполяции с конечного множества для функций из этого класса (см. (18)).

Теорема 2. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}^n_+$, $D^k = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_n^{k_n}}$ *— дифференциальный оператор. Любая целая функция* f *класса* W^n_σ *удовлетворяет неравенству*

$$|D^k f(x)| \le \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^{2k_j+1}}{\pi(2k_j+1)}}\cdot\|f\|_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{23}$$

причем для любого фиксированного элемента $a \in \mathbb{R}^n$ *равенство в* (23) *при* $x = a$ *достигается лишь для функции вида*

$$f_k(z; a) = \lambda D^k\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\sigma_j(a_j - z_j)}{a_j - z_j}\right], \quad z \in \mathbb{C}^n;\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Неравенство (23) имеется в работах И. И. Ибрагимова [8; 9, с. 150], где дано и частичное описание экстремальных функций. Метод доказательства теоремы 2 отличен от метода, использованного в [10] для доказательства неравенства (23), и опирается на интегральное представление функций класса W^n_σ, близкое к известным формулам теории интегралов Фурье (см. [9, с. 59; 16, с. 283; 17, с. 375]).

Предложение 1. *Для любой функции* f *класса* W^n_σ *справедлива следующая интегральная формула (в обозначениях теоремы 2)*

$$D^k f(z) = \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\tau)D^k\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\sigma_j(z_j - \tau_j)}{z_j - \tau_j}\right]d\tau, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{24}$$

◀ Идею доказательства предложения 1 проиллюстрируем, рассматривая случай $n = 1$ и полагая $k = k_1$, $\sigma = \sigma_1$.

Пусть $f \in W^1_\sigma$; $g = f|_{\mathbb{R}}$; T — классический интегральный оператор Фурье, действующий в $L_2(-\infty, \infty)$ (см., например, [17, с. 369]); $\Phi = Tg$. По теореме Винера — Пэли [17, с. 408] $\operatorname{supp}\Phi \subset [-\sigma, \sigma]$. Применяя обобщенную формулу Парсеваля [17, с. 375] к функциям g и

$$h(\tau, x) = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\frac{\sin\sigma(x-\tau)}{x-\tau}\right], \quad \tau \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}, \tag{25}$$

и учитывая, что

$$[Th]_x(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ixt}(-it)^k, & |t| \le \sigma, \\ 0, & |t| > \sigma, \end{cases} \tag{26}$$

находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\overline{h(\tau, x)}d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [Tg](t)\overline{[Th]_x(t)}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(t)e^{ixt}(it)^k dt. \tag{27}$$

Но

$$g(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(t)e^{itx}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда и из (27) заключаем, что формула (24) верна при $n = 1$, $x \in \mathbb{R}$. Из единственности аналитического продолжения следует, что она справедлива и при $z \in \mathbb{C}$: интеграл в соотношении (24) сходится равномерно по переменной z на любом компакте в $\mathbb{C}$. ►

Доказательство теоремы 2. 1. Рассмотрим P-индикатор h_f функции f:

$$h_f(x; y) = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\ln|f(x + iyR)|}{R}; \quad h_f(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} h_f(x; y), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Из неравенства (1) вытекает, что $h_f \le H_n$, где

$$H_n(y) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j |y_j|, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

— опорная функция n-мерного параллелепипеда Δ_σ (см. список обозначений). Тогда согласно теореме Планшереля — Пойа [14, с. 275; 18, с. 131] справедливо интегральное представление

$$f(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int\limits_{\Delta_\sigma} \Phi(t)e^{i\langle t,z\rangle}\, dt, \tag{28}$$

где Φ — некоторый элемент $L_2(\Delta_\sigma)$, причем

$$\|f\|_{\mathbb{R}^n} = \|\Phi\|_{\Delta_\sigma}. \tag{29}$$

Поэтому

$$D^k f(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int\limits_{\Delta_\sigma} \Phi(t)e^{i\langle t,z\rangle} \prod_{j=1}^{n}(it)^{k_j} dt, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{30}$$

и, следовательно, $D^k f \in W^n_\sigma$.

2. Для простоты изложения дальнейшие рассуждения проведем при $n = 1$, полагая $k = k_1$, $\sigma = \sigma_1$. Учитывая равенство (29), из формулы (30) и неравенства Коши — Буняковского получим

$$|f^{(k)}(x+iy)| \le \omega_k(y)\|f\|_{\mathbb{R}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{31}$$

где

$$\omega_k(y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} t^{2k} e^{-2ty}\, dt}.$$

Отсюда при $y = 0$ убеждаемся в справедливости (23) в случае $n = 1$.

3. Используя известное свойство скалярного произведения в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ (см. [19, с. 13]) и формулу (24) при $n = 1$, $z = x \in \mathbb{R}$, имеем в обозначениях соотношения (25)

$$|f^{(k)}(x)| \le \frac{1}{\pi}\|f\|_{\mathbb{R}} \cdot \|h(\cdot; x)\|_{\mathbb{R}}, \tag{32}$$

причем, когда $x = a$, равенство достигается здесь лишь при $f = \lambda h(\cdot; a)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, и рассматривается аналитическое продолжение в $\mathbb{C}$ функции h по переменной τ. Но (см. (29), (26))

$$\|h(\cdot; a)\|_{\mathbb{R}} = \|Th(\cdot; a)\|_{[-\sigma,\sigma]} = \sqrt{\frac{\pi\sigma^{2k+1}}{2k+1}}.$$

Отсюда и из (32) вытекает заключительное утверждение теоремы 2.

Замечание. Из формулы (28) с помощью многомерного аналога теоремы Римана — Лебега [17, с. 453] находим

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \quad \forall f \in W_\sigma^n.$$

Поэтому

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} \ne 0, \tag{33}$$

если $f \ne 0$. Следовательно, в теореме 1 описаны все экстремальные функции неравенства (23).

Постоянный множитель в неравенстве (23) совпадает с нормой $\|D^k\|$ оператора D^k: $W_\sigma^n \to W_\sigma^n$, если в его области определения введена норма, указанная в формуле (33). Стандартным приемом (см. [12, с. 184]) убеждаемся в том, что

$$\|D^k f(\cdot + iy)\| \le \|D^k\| \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j |y_j|\right\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{34}$$

Из хода доказательства теоремы 2 вытекает и другая оценка (см. (31))

$$\|D^k f(\cdot + iy)\| \le \prod_{j=1}^{n} \omega_{k_j}(y_j)\|f\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Эта оценка является более тонкой по сравнению с (34), поскольку (см. (31)) для любого $y \in \mathbb{R}$ имеем

$$[\omega_k(y)]^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\sigma} t^{2k} \operatorname{ch}(2yt)\, dt \le \frac{\sigma^{2k+1}}{\pi(2k+1)} \operatorname{ch}(2\sigma|y|).$$

Итак, справедливо следующее обобщение неравенства (23), найденного другим способом в [9, с. 166].

Теорема 3. *Любая функция f класса W^n_σ удовлетворяет следующему неравенству в $\mathbb{C}^n$:*

$$|D^k f(z)|^2 \le \|f\|^2_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^{2k_j+1}\operatorname{ch}(2\sigma_j|\operatorname{Im} z_j|)}{\pi(2k_j+1)}. \tag{35}$$

§ 3. Оценка сверху величины $\dot{\ }_N(z_0)$ при $n = 1$ и ее асимптотическое поведение при $N \to \infty$

1°. Формула (18) для определения $\Omega_N(z_0)$ сложна для восприятия, особенно при больших N. Элементарными средствами математического анализа можно показать, что при $N = n = 1$ (см. (22))

$$\Omega_1(x_0) \le r\sigma\sqrt{\frac{\sigma}{3\pi}}|x_0 - x_1|.$$

Справедлива подобная оценка для $\Omega_N(z_0)$ при любом натуральном N. Ее доказательство опирается на теорему 3.

Теорема 4. *В обозначениях теоремы* 1 *величина* $\Omega_N(z_0)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\Omega_N(z_0) \le r\left|\prod_{j=1}^{N}(z_0 - z_j)\right|\frac{\sigma^N}{N!}\sqrt{\frac{\sigma ch(2\alpha\sigma)}{\pi(2N+1)}}, \tag{36}$$

где $\alpha = \max\{|\operatorname{Im} z \mid z \in U_N \cup \{z_0\}\}$.

Для доказательства теоремы 4 понадобится

Предложение 2. *Пусть*

$$\mathscr{D} = \{t \in \mathbb{R}^N : 0 \le t_N \le t_{N-1} \le \dots \le t_1 \le 1\}.$$

В обозначениях теоремы 4 любая функция f класса $I_n \subset W^n_\sigma$ допускает следующее интегральное представление при всех $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U_N$:

$$f(z_0) = \prod_{j=1}^{N}(z_0 - z_j)\int\limits_D f^{(N)}\left[z_0 + \sum_{j=1}^{N-1} t_j(z_j - z_{j-1})\right]dt. \tag{37}$$

Доказательство предложения 2 ничем не отличается от вещественного случая, рассмотренного в [20, с. 12] для более широкого класса функций.

Следствие 1. *Пусть G — выпуклая оболочка множества* $\{z_0, z_1, \dots, z_N\}$. *Тогда в обозначениях формулы* (37) *справедливо неравенство*

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{N!}\left|\prod_{j=1}^{N}(z_0 - z_j)\right|\max_{z\in G}|f^{(N)}(z)|. \tag{38}$$

Подобное неравенство в вещественном случае имеется в [21, с. 73]. Теорема 4 непосредственно вытекает из определения величины $\Omega_N(z_0)$ (см. (18)), неравенства (38) и теоремы 3.

2°. Величина $\Omega_N(z_0)$ характеризует точность алгоритмов аналитического продолжения функций из ограниченного множества $V = \{f \in W^n_\sigma : \|f\| \le r\}$, заданных на множестве U_N, в точку $z_0 \in \mathbb{C}^n \backslash U_N$ при наличии полной информации о значениях $\{f(z_j)\}_1^N$, $f \in V$.

Рассмотрим счетное множество единственности U с заданным способом его исчерпания с помощью конечных множеств $U_N = \{z_j\}_1^N$, т. е. $U = \cup U_N | N \in \mathbb{N}$. Естественно ожидать, что точность упомянутых алгоритмов возрастает с ростом мощности множества $U_N \subset U$ при экстраполяции в точку $z_0 \in \mathbb{C}^n \backslash U$. Для случая $n = 1$, $U_N \subset U_{N+1}$ в [6] имеются примеры, подтверждающие этот факт. Найдем асимптотическую оценку сверху величины $\Omega_N(z_0)$ при $N \to \infty$ в случае

$$U_{N+1} = \{x_{k+1} := a + k(b-a)/N : k = 0, 1, \dots, N\}, \tag{39}$$

$U = \cup U_{N+1} | N \in \mathbb{N}$ — множество «рациональных» точек отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Преобразование

$$v = v(z) := \frac{2z - (a+b)}{2(b-a)} + \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{40}$$

переводит U в множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$.

Ниже используется символ $g_N \sim h_N$, означающий асимптотическую эквивалентность при $N \to \infty$ последовательностей $\{g_N\}_1^\infty$, $\{h_N\}_1^\infty$ в том смысле, что $\lim\limits_{N\to\infty} g_N/h_N = 1$.

Исследование асимптотического поведения величины $\Omega_N(z_0)$ при $N \to \infty$ опирается на нижеследующие утверждения.

Лемма 2. *Пусть в обозначениях формулы* (39)

$$P_{N+1}(z) = \prod_{k=1}^{N+1} (z - x_k), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{41}$$

Тогда для всех $z \in \mathbb{C} \backslash [a, b]$ *имеем*

$$|P_{N+1}(z)| \sim \Delta \sqrt{|v(v-1)|} B_N(z),$$

где $\Delta = b - a$*; величина* v *определяется соотношением* (40)*;*

$$B_N(z) = \begin{cases} |\Delta e^{-1} v^v (v-1)^{1-v}|^N, & \mathrm{Re} z \geq a \\ |\Delta e^{-1} (-v)^v (1-v)^{1-v}|^N, & \mathrm{Re} z < a. \end{cases}$$

◀ Из формул (39)–(41) с помощью элементарных преобразований получаем

$$|P_{N+1}(z)| = (\Delta/N)^{N+1} \prod_{k=0}^{N} (Nv - k)|. \tag{42}$$

Отсюда, опираясь на свойство $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ гамма-функции $\Gamma(z)$, в обозначениях соотношения (41) находим

$$|P_{N+1}(z)| = (\Delta/N)^{N+1} \frac{|\Gamma(Nv+1)|}{|\Gamma[N(v-1)]|}, \quad \mathrm{Re}\, z \geq a, \quad z \notin [a, b];$$

$$|P_{N+1}(z)| = (\Delta/N)^{N+1} \frac{|\Gamma[N(1-v)+1]|}{|\Gamma(-Nv)|}, \quad \mathrm{Re}\, z < a.$$

Теперь с помощью формулы Стирлинга, дающей асимптотическое разложение функции Γ, убеждаемся в справедливости леммы. ▶

Лемма 2 дополняет известный результат [21, с. 81] об оценке сверху модуля многочлена $T_{N+1}(v) = \prod\limits_{k=0}^{N} (v - k/N)$ при $v \in (0, 1)$.

Лемма 3. *Пусть в обозначениях равенства* (41) $M_N = \max\{|P_{N+1}(x)| : x \in [a,b]\}$. *Тогда* $M_N \sim (\ln N)^{-1}\sqrt{2\pi/N}(\Delta/e)^{N+1}$.

◀ 1. Преобразование $u = Nv(z)$, где функция v определяется соотношением (40), переводит отрезок $[a,b]$ в отрезок $[0,N]$. Пусть

$$Q(u) = \left|\prod_{k=0}^{N}(u-k)\right|, \quad u \in \mathbb{R}; \tag{43}$$

$$B_j = \max\{Q(u) : u \in [j-1, j]\}; \quad B = \max\{B_j : j = 1, \dots, N\}. \tag{44}$$

Тогда (см. (42))

$$M_N = (\Delta/N)^{N+1}B. \tag{45}$$

Покажем, что $B = B_1$. Функция Q (см. (43)) обладает свойством

$$Q(u) = Q(N-u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Поэтому (см. (44))

$$B_j = B_{N+1-j}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Следовательно, при $N = 2$

$$B = B_1 = B_2, \tag{46}$$

а при $N \geq 3$

$$B = \max\{B_1, B_2, \dots, B_\alpha\}, \tag{47}$$

где α — целая часть числа $(N+1)/2$. Зафиксируем произвольно $j \leq \alpha$. Пусть

$$\Psi(y) = \prod_{l=1}^{j-1}(y-l)\prod_{l=j}^{N}(l-y), \quad y \in [j-1, j].$$

Тогда $\Psi(y) \geq 0$ и (см. (43), (44))

$$B_{j-1} = \max_{j-1\leq y\leq j} Q(y-1) = \max_{j-1\leq y\leq j} \Psi(y)(N+1-y);$$
$$B_j = \max\{y\Psi(y) : y \in [j-1, j]\}.$$

Отсюда и из (47), (46) заключаем, что

$$B_{j-1} \geq B_j, \quad B = B_1. \tag{48}$$

Итак, асимптотика величины M_N при $N \to \infty$ определяется асимптотикой B_1 (см. (45)).

2. Пусть ε_N — точка максимума функции Q на интервале (0, 1/N), определяемая из условия

$$\frac{1}{y} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k-y}. \tag{49}$$

Поэтому справедливо неравенство $1/\varepsilon_N > H_N$, где

$$H_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$$

— частная сумма гармонического ряда. Следовательно, $\varepsilon_N = o(1)$ при $N \to \infty$. Отсюда и из (49), учитывая, что $H_N = \ln N + \mathbb{C} + \gamma_N$, где $\mathbb{C}$ — постоянная Эйлера, $\gamma_N = o(1)$ при $N \to \infty$, находим

$$\frac{1}{\varepsilon_N} - \ln N - C - \gamma_N = \varepsilon_N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k-\varepsilon_N)} = o(1).$$

Итак, $\varepsilon_N \sim \frac{1}{\ln N}$. Теперь, опираясь на формулу Стирлинга, после элементарных преобразований получаем (см. (48), (43), (42))

$$B = B_1 = Q(\varepsilon_N) = \frac{\varepsilon_N \Gamma(N - \varepsilon_N + 1)}{\Gamma(1 - \varepsilon_N)} \sim \frac{1}{\ln N} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \left(\frac{N}{e}\right)^{N+1}.$$

Для доказательства леммы остается использовать равенство (45). ►

Из лемм 2, 3 и неравенства (36) в теореме 4, в обозначениях которого (см. (18)) $N > 1$, $z_0 \in \mathbb{C} \backslash U$,

$$z_j = x_j = a + \frac{(j-1)(b-a)}{N-1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

непосредственно вытекает

Теорема 5. *При вышеуказанных допущениях справедлива следующая оценка сверху величины* $\Omega_N(z_0), z_0 \in \mathbb{C} \backslash U$:

$$\Omega_N(z_0) \le \mathscr{A}_N(z_0),$$

где

$$\mathscr{A}_N(z_0) \sim \frac{r}{N \ln N} \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi N}} \left(\frac{\sigma \Delta}{N}\right)^N, \quad z_0 \in [a, b];$$

$$\mathscr{A}_N(z_0) \sim r \frac{\sqrt{\sigma \operatorname{ch}(2\sigma |\operatorname{Im} z_0|)}}{2\pi N} \left| \left(1 - \frac{1}{v}\right)^{v-1/2} \right| \left| \frac{\sigma \Delta v^v}{N(v-1)^{v-1}} \right|^N,$$

если $\operatorname{Re} z_0 \ge a$, $z_0 \notin [a, b]$;

$$\mathscr{A}_N(z_0) \sim r \frac{\sqrt{\sigma \operatorname{ch}(2\sigma |\operatorname{Im} z_0|)}}{2\pi N} \left| \left(\frac{v}{v-1}\right)^{1/2-v} \right| \left| \frac{\sigma \Delta (1-v)^{1-v}}{N(-v)^{-v}} \right|^N,$$

если $\operatorname{Re} z_0 < a$. *Здесь величина* v *определяется формулой* (40), $\Delta = b - a$.

Автор искренне признателен А. М. Федотову за плодотворные обсуждения основных результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маергойз Л. С.* Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике. Новосибирск: Наука, 1991.
2. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
3. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1129. P. 21–93.
4. *Арестов В. В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.
5. *Fedotov A. M.* Analytic continuation of functions from discrete sets // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1994. V. 2, N 3. P. 235–252.
6. *Федотов А. М.* Численный алгоритм экстраполяции функций класса Винера // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 2. С. 306–309.

7. *Fedotov A. M., Settarov J. A.* Optimal algorithms in Hilbert spase for the continuation of entire functions // Scientific Siberian / Numerical and Data Analysis. Ser. A. Tassin, France, 1994. P. 70–75 (AMSE Transaction, 1994. V. 11).

8. *Ибрагимов И. И.* Некоторые неравенства для целых функций конечной степени многих переменных // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128, № 6. С. 1114–1117.

9. *Ибрагимов И. И.* Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Баку: Изд-во АН Азерб. ССР, 1962.

10. *Маергойз Л. С.* Экстремальные свойства целых функций класса Винера и их приложения к выбору наилучшего продолжения. Красноярск, 1995. 16 с. (Препринт / Ин-т биофизики СО РАН, № 220Б).

11. *Маергойз Л. С.* Эктремальные свойства целых функций класса Винера и их приложения // Докл. РАН. 1997. Т. 356, № 2. С. 161–165.

12. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

14. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.

15. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990.

16. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962.

17. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.

18. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.

19. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

20. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наук. думка, 1992.

21. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения. М.: ГИТТЛ, 1954.

Статья поступила 8 января 1998 г.

г. Красноярск
`root@maergoiz.krsk.infotel.ru`