*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6*

*УДК 517.5*

# О ВОЗМОЖНОСТИ ОБОБЩЕННО–АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ В ОБЛАСТЬ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА КУСКЕ ЕЕ ГРАНИЦЫ

**Т. Ишанкулов**

**Аннотация:** Рассматривается задача описания функций, заданных на куске границы области, которые могут быть продолжены в эту область как решение обобщенной системы уравнений Коши — Римана, т. е. как обобщенная аналитическая функция. Получен аналог известной теоремы Фока — Куни для обобщенных аналитических функций. Для получения этого аналога используется формулы Карлемана и Сохоцкого для обобщенных аналитических функций. Библиогр. 9.

Пусть $D$ — ограниченная односвязная область на плоскости $z = x + iy$ с кусочно-гладкой границей, состоящей из отрезка действительной оси и гладкой кривой $M$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$. Пусть $C_\alpha(E)$ — множество функций, удовлетворяющих на плоскости $E$ условию Гёльдера с показателем $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, $L_{p,2}(E)$ — множество функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям

$$f(z) \in L_p(\overline{D}_1), \quad |z|^{-2} f(1/z) \in L_p(\overline{D}_1), \quad D_1 = \{z : |z| < 1\}.$$

Обозначим через $U_{p,2}(A, B, D)$ множество решений в области $D$ уравнения

$$\partial_z W + A(z)W + B(z)\overline{W} = 0, \quad \partial_{\bar z} W = \frac{1}{2}(W_x + W_y), \tag{1}$$

где $A, B \in L_{p,2}(E) \cap C_\alpha(E)$, $p > 0$. При $A(z) \equiv 0$, $B(z) \equiv 0$ множество $U_{p,2}(A, B, D)$ совпадает с множеством $U(D)$ аналитических функций в области $D$. Функции из класса $U_{p,2}(A, B, D)$ называются *обобщенно-аналитическими в области* $D$.

Рассмотрим задачу описания функций, заданных на кривой $M$, которые могут быть продолжены в область $D$ как решение уравнения (1). Другими словами, выясним, каким условиям должна удовлетворять функция $\varphi(z) \in C_\alpha(M)$, чтобы существовала обобщенно-аналитическая функция $W \in U_{p,2}(A, B, D)$, граничные значения которой на кривой $M$ совпадают с $\varphi$:

$$W(z) = \varphi(z), \quad z \in M. \tag{2}$$

Как известно, произвольная линейная эллиптическая система первого порядка на плоскости заменой независимых переменных и неизвестных функций сводится к уравнению (1). Это редукция приведена в [1]. Поэтому здесь фактически речь идет о разрешимости задачи Коши для линейной эллиптической системы первого порядка на плоскости. Теорема единственности доказана Т. Карлеманом [1].

Через $X_j^\sigma(\zeta,z)$, $j=1,2$, обозначим решения по $\zeta$ уравнения (1) из класса $U_{p,2}(A,B,E)$, соответствующие по теореме 3.13 из [1] функциям $\frac{1}{2}G_{\sigma,z}$, $\frac{1}{2i}G_{\sigma,z}$, $G_\sigma(\zeta,z)=\frac{\exp[-i\sigma(\zeta-z)]}{\zeta-z}$. Функции $X_j^\sigma(\zeta,z)$ удовлетворяют нелинейным интегральным уравнениям

$$X_1^\sigma(\zeta,z)=\frac{1}{2}G_{\sigma,z}e^{\omega_1^\sigma}(\zeta,z),\quad X_2^\sigma(\zeta,z)=\frac{1}{2i}G_{\sigma,z}e^{\omega_1^\sigma}(\zeta,z), \tag{3}$$

где

$$\omega_j^\sigma=\frac{z-\zeta}{\pi}\iint\limits_E\frac{A(t)X_j^\sigma(t,z)+B(t)\overline{X_1^\sigma(t,z)}}{(t-\zeta)(z-t)X_j^\sigma(t,z)}\,d\xi d\eta,\quad t=\xi+i\eta,\ j=1,2,$$

а также линейным интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} X_1^\sigma(\zeta,z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_E\frac{A(t)X_1^\sigma(t,z)+B(t)X_1^\sigma(t,z)}{(t-\zeta)}\,d\xi d\eta&=\frac{1}{2}G_\sigma(\zeta,z),\\ X_1^\sigma(\zeta,z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_E\frac{A(t)X_2^\sigma(t,z)+B(t)\overline{X_2^\sigma(t,z)}}{(t-\zeta)}\,d\xi d\eta&=\frac{1}{2i}G_\sigma(\zeta,z). \end{aligned}\tag{4}$$

При $\sigma=0$ пару функций $X_1^0=X_1$, $X_2^0=X_2$ называют *системой основных элементарных обобщенных аналитических функций класса* $U_{p,2}(A,B,E)$ *с полюсом в точке* $\zeta=z$.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Omega_1^\sigma=X_1^\sigma(\zeta,z)+iX_2^\sigma(\zeta,z),\quad \Omega_2^\sigma=X_1^\sigma(\zeta,z)-iX_2^\sigma(\zeta,z). \tag{5}$$

При $\sigma=0$ функции $\Omega_1=\Omega_1^0$ и $\Omega_2=\Omega_2^0$ называют *основными ядрами класса* $U_{p,2}(A,B,E)$ [1].

**Теорема 1.** *Пусть* $W\in U_{p,2}(A,B,D)\cap C(D\cup M)$ *и* $W(z)=\varphi(z)$, $z\in M$, *где* $\varphi(z)$ — *заданная на* $M$ *функция класса* $C(M)$. *Тогда справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения:*

$$W(z)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M\Omega_1^\sigma(\zeta,z)\varphi(\zeta)\,d\zeta-\Omega_2^\sigma(\zeta,z)\overline{\varphi}(\zeta)\,d\bar\zeta,\quad z\in D, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} W(z)=\lim_{\sigma\to\infty}&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M\Omega_1^\sigma(\zeta,z)\varphi(\zeta)\,d\zeta-\Omega_2^\sigma(\zeta,z)\overline{\varphi}(\zeta)\,d\bar\zeta\\ &+\int\limits_0^\infty\frac{1}{2\pi i}e^{i\sigma z}\biggl(\int\limits_M\gamma_1^\sigma(\zeta,z)\varphi(\zeta)\,d\zeta-\gamma_2^\sigma(\zeta,z)\overline{\varphi}(\zeta)d\bar\zeta\biggr),\quad z\in D, \end{aligned}\tag{7}$$

*где*

$$\begin{aligned} I(z,\sigma)&=\int\limits_M\gamma_1^\sigma(\zeta,z)\varphi(\zeta)\,d\zeta-\gamma_2^\sigma(\zeta,z)\overline{\varphi}(\zeta)\,d\bar\zeta\\ \gamma_j^\sigma(\zeta,z)&=e^{-i\sigma z}\frac{d}{d\sigma}\Omega_j^\sigma(\zeta,z)=e^{-i\sigma z}\widetilde{\Omega}_j^\sigma(\zeta,z),\quad j=1,2. \end{aligned}\tag{8}$$

Доказательство формулы (6) в более общем случае, когда $D$ — произвольная односвязная область, приведено в [2]. Эквивалентность формул (6) и (7) устанавливается непосредственным вычислением на основе формулы Ньютона — Лейбница.

**Теорема 2.** *Пусть $\varphi \in L(M) \cap C(M^0)$ $(M^0 = \operatorname{Int} M)$. Для того чтобы существовала функция $W \in U_{p,2}(A,B,D) \cap C(D \cup M^0)$ такая, что ее сужение на $M$ совпадает с $\varphi$, необходимо и достаточно выполнения условия: для всякого $\tau > 0$ существует $C = C(\tau)$ такая, что для всех $\sigma > 0$*

$$|I(z,\sigma)| \le Ce^{\tau\sigma} \tag{9}$$

*равномерно на каждом компакте $K \subset D$, $z \in K$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $W$, указанная в формулировке теоремы, существует. Обозначим $M_\tau = M \setminus \{z : \operatorname{Im} z < \tau\}$, где $\tau > 0$, $D_\tau = D \setminus \{z \le \tau\}$. Граница $D_\tau$ состоит из гладкой кривой $M_\tau$ и отрезка $P_\tau$, параллельного действительной оси. Пусть $M_{1,\tau}$ и $M_{2,\tau}$ — части кривой $M$, не вошедшие в $M_\tau$. Из уравнений (4) следует, что функциям

$$\frac{1}{2}\widetilde{G}_\sigma = \frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}G_\sigma(\zeta,z) = -\frac{i}{2}\exp(-i\sigma(\zeta - z)),$$
$$\frac{1}{2i}\widetilde{G}_\sigma = \frac{1}{2i}\frac{d}{d\sigma}G_\sigma(\zeta,z) = -\frac{1}{2}\exp(-i\sigma(\zeta - z))$$

по теореме 3.13 из [1] соответствуют функции $\frac{d}{d\sigma}X_1^\sigma$ и $\frac{d}{d\sigma}X_2^\sigma$. Эти функции на всей плоскости по переменной $\zeta$ удовлетворяют уравнению (1) и нелинейным интегральным уравнениям (3), где нужно заменить $G_\sigma$ на $\widetilde{G}_\sigma$ и $X_j^\sigma$ на $\widetilde{X}_j^\sigma = \frac{d}{d\sigma}X_j^\sigma$:

$$\widetilde{X}_1^\sigma(\zeta,z) = \frac{1}{2}\widetilde{G}_\sigma(\zeta,z)e^{\omega_1^\sigma(\zeta,z)}, \quad \widetilde{X}_2^\sigma(\zeta,z) = \frac{1}{2i}\widetilde{G}_\sigma(\zeta,z)e^{\omega_2^\sigma(\zeta,z)}, \tag{10}$$

где

$$\widetilde{\omega}_j^\sigma(\zeta,z) = \frac{z-\zeta}{\pi}\iint\limits_E \frac{A(t)\widetilde{X}_j^\sigma(t,z) + B(t)\overline{\widetilde{X}_1^\sigma(t,z)}}{(t-\zeta)(z-t)\widetilde{X}_j^\sigma(t,z)}\,d\xi d\eta, \quad j = 1,2. \tag{10$'$}$$

Рассуждая, как при доказательстве обобщенно-интегральной формулы Коши [1], имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M_\tau + P_\tau} \widetilde{\Omega}_1^\sigma(\zeta,z)\varphi(\zeta)\,d\zeta - \widetilde{\Omega}_2^\sigma(\zeta,z)\overline{\varphi}(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M \gamma_1^\sigma(\zeta,z)\varphi(\zeta)\,d\zeta - \gamma_2^\sigma(\zeta,z)\overline{\varphi}(\zeta)d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{M_{1,\tau}} + \int\limits_{M_\tau} + \int\limits_{M_{2,\tau}}\Bigg) = \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{M_{1,\tau}} - \int\limits_{P_\tau} + \int\limits_{M_{2,\tau}}\Bigg). \tag{11}$$

Оценим интегралы в правой части равенства (11), используя формулы (5), (8) и (10):

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M \gamma_1^\sigma(\zeta,z)\varphi(\zeta)\,d\zeta - \gamma_2^\sigma(\zeta,z)\overline{\varphi}(\zeta)\,d\bar{\zeta}\right|$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_M \big(\big|\gamma_1^\sigma(\zeta,z)\big| + \big|\gamma_2^\sigma(\zeta,z)\big|\big)|\varphi(\zeta)|\,|d\zeta| \le \frac{1}{\pi}e^{m_p L_{p,2}(|A|+|B|)}\int\limits_{M_{1,\tau}} |\varphi|e^{\sigma \operatorname{Im}\zeta}\,|d\zeta|$$
$$\le \frac{1}{\pi}e^{m_p L_{p,2}(|A|+|B|)}e^{\sigma\tau}\int\limits_{M_{1,\tau}} |\varphi|\,|d\zeta|,$$

где

$$L_{p,2}(f) = L_p(f, D_1) + L_p(|z|^{-2} f(1/z), D_1), \quad L_p(f, D_1) = \left( \iint\limits_{D_1} |f(z)|^p \, dxdy \right)^{\frac{1}{p}},$$

постоянная $m_p$ зависит только от $p$ [1]. Аналогично оценивается интеграл по множеству $M_{2,\tau}$. Далее, используя формулы (8) и (10), имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{P_\tau} \gamma_1^\sigma(\zeta, z)\varphi(\zeta)\, d\zeta - \gamma_2^\sigma(\zeta, z)\overline{\varphi}(\zeta)\, d\bar{\zeta}$$

$$= \frac{e^{\tau\sigma}}{2\pi i} \int\limits_{P_\tau} e^{i\sigma\xi} \left\{ \left[ -\frac{i}{2} e^{\omega_1^\sigma(\zeta,z)} - \frac{i}{2} e^{\omega_2^\sigma(\zeta,z)} \right] \varphi(\zeta)\, d\zeta \right.$$

$$\left. + \left[ -\frac{i}{2} e^{\omega_1^\sigma(\zeta,z)} + \frac{i}{2} e^{\omega_2^\sigma(\zeta,z)} \right] \overline{\varphi}(\zeta)\, d\bar{\zeta} \right\}$$

$$= \frac{e^{\tau\sigma}}{2\pi i} \int\limits_{a_\tau}^{b_\tau} e^{-i\sigma\xi} \{ [e^{\omega_1^\sigma(\xi+i\tau,z)} \operatorname{Im} \varphi((\xi + i\tau) - i e^{\omega_2^\sigma(\xi+i\tau,z)} \operatorname{Re} \varphi((\xi + i\tau)] \, d\xi,$$

где $a_\tau + i\tau$, $b_\tau + i\tau$ — концы отрезка $P_\tau$. Функция, стоящая в квадратной скобке последнего интеграла, абсолютно интегрируема по переменой $\zeta$ и ограничена по $\sigma$. В этом можно убедиться непосредственно, оценив ее по модулю с использованием формулы (10). Поэтому последний интеграл стремится к нулю по теореме Римана — Лебега, следовательно, он ограничен по абсолютной величине. Итак, верно (9).

Достаточность. Пусть для всякого $\tau > 0$ верно неравенство (9). Рассмотрим функцию $W(z)$, заданную двумя эквивалентными формулами (6) и (7). Первое слагаемое в (7) задает две функции, удовлетворяющие соответственно в областях $D$ и $\Pi \setminus \overline{D}$ уравнению (1), такие, что разность их предельных значений по нормалям (или по углам определенного ограниченного раствора при том, что соответствующие точки $z^+ \in D$ и $z \in \Pi \setminus \overline{D}$ при стремлении к точке $\zeta \in M^0$ находятся на равных расстояниях от $\zeta$) на $M^0$ равна $\varphi(\zeta)$ (см. [1, с. 198]), причем если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до $M^0$, то другая тоже обладает данным свойством. Второе слагаемое в (7) в силу (9) удовлетворяет уравнению в полуплоскости $\Pi$. Итак, правая часть формулы (7) задает две функции $W_1 \in U_{p,2}(A, B, D)$ и $W_2 \in U_{p,2}(A, B, \Pi \setminus \overline{D})$ такие, что для всякой точки $\zeta \in M^0$ верно (в указанном смысле) равенство

$$W_1(\zeta) - W_2(\zeta) = \varphi(\zeta), \tag{12}$$

причем если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до $M^0$, то другая тоже обладает этим свойством. Воспользовавшись равенствами (3) и (5), оценим интеграл

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_M \Omega_1^\sigma(\zeta, z)\varphi(\zeta)\, d\zeta - \Omega_2^\sigma(\zeta, z)\overline{\varphi}(\zeta)\, d\bar{\zeta} \right| \leq \frac{1}{\pi} e^{\sigma(\operatorname{Im}\zeta - \operatorname{Im} z)} \cdot e^{m_p L_{p,2}(|A|+|B|)} \int\limits_M |\varphi|\, |d\zeta|.$$

Отсюда и из формулы (6) вытекает, что $W_2(z) = 0$ при $\operatorname{Im} z > \max \operatorname{Im}\zeta$, поэтому $W_2(z) \equiv 0$ в силу теоремы единственности для обобщенно-аналитических функций [1]. Теперь из (12) вытекает утверждение теоремы.

В теореме 2 обсуждался вопрос о существовании продолжения с гладкой кривой $M$ вплоть до заданной прямой $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$. Приведем близкий по смыслу результат о возможности продолжения с $M$ до заданной окружности.

Пусть $D$ — область, ограниченная единичной окружностью $\gamma_1 = \{z : |z| = 1\}$ и гладкой кривой $M$, соединяющей две точки $\gamma_1$ и лежащей внутри $\gamma_1$, $D_1 = \{z : |z| < 1\}$. Кроме того, предположим, что нуль лежит вне $\overline{D}$. Обозначим

$$\alpha_k = a_{2k} + ia_{2k+1} = \int\limits_M \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $a_k$ — вещественные постоянные.

**Теорема 3.** *Если $\varphi \in C(M) \cap L^1(M)$, то для существования такой функции $W \in U_{p,2}(A, B, D) \cap C(D \cup M)$, что $W|_M = \varphi$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\alpha_k|} \le 1. \tag{13}$$

Доказательство. Необходимость. Обозначим $M_\varepsilon = M \cap \{z : |z| < 1 - \varepsilon\}$, где далее

$$a^\varepsilon_{2k} + ia^\varepsilon_{2k+1} = \int\limits_{M_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k+1}}.$$

Пусть указанная в формулировке теоремы функция $W$ существует. Тогда в силу обобщенной интегральной формулы Коши [1] имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_\varepsilon \cup \gamma_{1-\varepsilon}} \Omega_1(\zeta, z)W(\zeta)d\zeta - \Omega_2(\zeta, z)\overline{W}(\zeta)d\bar{\zeta} = 0, \quad \gamma_{1-\varepsilon} = \{z : |z| = 1 - \varepsilon\}. \tag{14}$$

Разлагая интеграл (14) в обобщенный степенной ряд, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} C^\varepsilon_k W_k(z, 0, \rho) = 0,$$

где

$$C^\varepsilon_{2k} + iC^\varepsilon_{2k+1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_\varepsilon \cup \gamma_{1-\varepsilon}} \frac{W(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta.$$

В силу единственности разложения в степенной ряд

$$C^\varepsilon_{2k} + iC^\varepsilon_{2k+1} = 0.$$

Отсюда $a^\varepsilon_{2k} + ia^\varepsilon_{2k+1}$ равны соответствующим интегралам по части окружности $\gamma_{1-\varepsilon}$ от $W\zeta^{-k-1}$, поэтому

$$\alpha_k = a^\varepsilon_{2k} + ia^\varepsilon_{2k+1} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M \setminus M_\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{k+1}}.$$

Кроме того,

$$|\alpha_k| \le \frac{C_1(\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^{k+1}} + \frac{C_2(\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^{k+1}},$$

где

$$C_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_M |W(\zeta)||d\zeta|, \quad C_2(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{M \setminus M_\varepsilon} \varphi(\zeta)||d\zeta|.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\left(a_{2k}^{\varepsilon}\right)^2+\left(a_{2k+1}^{\varepsilon}\right)^2}\le C(\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-k-1},\quad C(\varepsilon)=\max(C_1(\varepsilon),C_2(\varepsilon)),$$

откуда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\alpha_k|}\le\frac{1}{1-\varepsilon}$$

и при $\varepsilon\to 0$ приходим к (13).

Достаточность. Рассмотрим обобщенный интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_M \Omega_1(\zeta,z)\varphi(\zeta)\,d\zeta-\Omega_2(\zeta,z)\overline{\varphi}(\zeta)\,d\bar{\zeta}, \tag{15}$$

который задает функции $W_+\in U_{p,2}(A,B,D)$ и $W_-\in U_{p,2}(A,B,D_1\setminus D)$ такие, что разность их предельных значений на $M$ равна $\varphi(\zeta)$ (см. [1, с. 198]):

$$W_+(\zeta)-W_-(\zeta)=\varphi(\zeta),\quad \zeta\in M, \tag{16}$$

причем если одна из функций $W_+$ или $W_-$ непрерывна в соответствующей области вплоть до $M$, то другая тоже обладает этим свойством.

Разлагая (15) в обобщенный степенной ряд в окрестности нуля, получаем, что коэффициенты этого ряда равны $\frac{\alpha_k}{2\pi i}$. Отсюда и из (13) следует, что $W_-\in U_{p,2}(A,B,D_1\setminus D)$. Тогда $(W_+-W_-)\in U_{p,2}(A,B,D)\cap C(D\cup M)$ и в силу (16) можно положить $W=W_+-W_-$.

**Следствие.** *Пусть $\varphi\in C(M)$. Для того чтобы существовала функция $W\in U_{p,2}(A,B,D)\cap C(D\cup M)$ такая, что $W|_M=\varphi$, необходимо, чтобы для $\varepsilon$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0<1$, имело место неравенство*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[2k]{\left(a_{2k}^{\varepsilon}\right)^2+\left(a_{2k+1}^{\varepsilon}\right)^2}\le\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда область $D=D_\rho$ ограничена отрезками лучей $|\arg z|=\pi/2\rho$ и гладкой дугой $M=M_\rho$, лежащей внутри угла. В этом случае возьмем

$$G_\sigma(\zeta,z)=\frac{\exp[\sigma(\zeta^\rho-z^\rho]}{\zeta-z}$$

и определим

$$I(z,\sigma)=\int\limits_{M_\tau}\widetilde{\Omega}_1^\sigma(\zeta,z)\varphi(\zeta)d\zeta-\widetilde{\Omega}_2^\sigma(\zeta,z)\overline{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta},$$

где $\widetilde{\Omega}_j^\sigma$ определяется равенствами (3)–(5) и (8).

**Теорема 4.** *Пусть $\varphi\in L(M_\rho)\cap C(M_\rho)$. Для существования функции $W\in U_{p,2}(A,B,D_\rho)\cap C(D_\rho\cup M_\rho)$, сужение которой на $M_\rho$ совпадает с $\varphi$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left|\int\limits_0^\infty I(z,\sigma)\,d\sigma\right|<\infty$$

*равномерно на каждом компакте $K\subset D_\rho$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2, поэтому приводить его не будем.

Формула (6) является аналогом классической формулы Карлемана для обобщенных аналитических функций. Формула восстановления аналитической функции одного комплексного переменного по ее известным значениям на части границы получена Т. Карлеманом [3] в 1926 г. Идея Карлемана была развита и обобщена Г. М. Голузиным и В. И. Крыловым [4]. Формулы Карлемана — Голузина — Крылова обобщены в многомерном пространстве М. М. Лаврентьевым [5].

Из теоремы 2 при $A(z) \equiv 0$, $B(z) \equiv 0$ следует

**Теорема 5** (Фока — Куни). *Пусть* $\varphi(\zeta) \in C(M)$. *Для существования функции* $W \in U(D) \cap C(D \cup M)$, *для которой* $W(\zeta) = \varphi(\zeta)$, $\zeta \in M$, *необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\tau > 0$ *существовала* $C = C(\tau)$ *такая, что для всех* $\sigma > 0$

$$\left| \int_M \varphi(\zeta) \exp(-i\sigma\zeta)\, d\zeta \right| \leq Ce^{\tau\sigma}.$$

Теорема 5, доказанная в [6], имела продолжение в многочисленных публикациях [7–9].

В случае $A(z) \equiv 0$, $B(z) \equiv 0$ из теоремы 3 следует теорема Л. А. Айзенберга [8].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Ишанкулов Т.* Одна задача аналитического продолжения для обобщенно-аналитических функций // Исследование корректности обратных задач и некоторых операторных уравнений. Новосибирск, 1981. С. 37–43.
3. *Carleman T.* Les fonctions quasi analytiques. Paris: Gauthier-Villars et Cie., 1926.
4. *Голузин Г. М., Крылов В. И.* Обобщенная функция Carleman'а и приложение ее к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
5. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
6. *Фок В. А., Куни Ф. М.* О введении «гасящей» функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 6. С. 1195–1198.
7. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1990.
8. *Айзенберг Л. А., Кытманов А. М.* О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 490–507.
9. *Ярмухамедов Ш.* Интегральное представление $CR$-функции и голоморфное продолжение // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 5. С. 600–602.

*Статья поступила 27 января 1999 г.*

*г. Самарканд*
*Самаркандский гос. университет*
Univg@samuni.silk.org