Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 510.5

О СВОДИМОСТЯХ ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Н. Дегтев, Е. С. Сакунова

Аннотация: Рассматриваются m-, p- и e-сводимости частично-рекурсивных функций (ЧРФ). Доказывается, что верхняя полурешетка L e-степеней ЧРФ изоморфна прямому произведению верхней полурешетки T-степеней на полурешетку рекурсивно-перечислимых множеств (РПМ). Вводятся две сводимости попарно не пересекающихся n-ок РПМ и показывается, что при $n \geq 2$ p-сводимость строго сильнее их mp-сводимости. Доказывается, что $\mathrm{Th}(L_p^s) \neq \mathrm{Th}(L_p^t)$ при $s \neq t$, где L_p^n — верхняя полурешетка n-ок РПМ относительно p-сводимости. Библиогр. 5.

В статье [1] определена e-сводимость нумерации ν_0 множества S_0 к нумерации ν_1 множества S_1, где $S_0 \subseteq S_1$. Именно, $\nu_0 \leq_e \nu_1$, если существует оператор перечисления Φ такой, что

$$(\forall_s \in S_0)\big(\eta_0^{-1}(s) = \Phi\big(\nu_1^{-1}(s)\big)\big).$$

Напомним, что отображение Φ множества $\{X : X \subseteq N\}$, $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, в себя называется *оператором перечисления* (*e-оператором*), если существует рекурсивно перечислимое множество (РПМ) W такое, что для всех $X \subseteq N$

$$\Phi(X) = \{x : (\exists y)(\langle x, y\rangle \in W \wedge D_y \subseteq X)\},$$

где $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер пары (xy), $x, y \in N$, а D_y — конечное множество с каноническим номером y. Ниже будем отождествлять Φ с РПМ W, его определяющим. В частности, Φ называется m- или p-оператором, если существует общерекурсивная функция (ОРФ) f такая, что

$$(\forall X \subseteq N)(\Phi(X) = \{x : f(x \in X\}),$$

соответственно

$$(\forall X \subseteq N)(\Phi(X) = \{x : (\exists y \in D_{f(x)})(D_y \subseteq X)\}).$$

Если ограничиться только m- или p-операторами, то придем к определению m- (обычной) и p- (позитивной) сводимостям нумераций, являющимся частными случаями e-сводимости.

Взглянем теперь на производную ЧРФ α как на вычислимую нумерацию некоторого подмножества $\{\varnothing, 0, 1, \dots\}$, полагая

$$\alpha(x) = \begin{cases} n, & \text{если } \alpha(x) = n, \\ \varnothing, & \text{если } \alpha(x) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Это позволяет для любых двух ЧРФ α и β определить как их m-сводимость, которая рассматривалась в [2, 3], так и сводимость. Точнее, $\alpha \leq_p \beta$, если существует ОРФ f такая, что

$$(\forall z \in R(\alpha))(\alpha^{-1}(z) = \{x : (\exists y \in D_{f(x)})(D_y \subseteq \beta^{-1}(z))\}),$$

где $R(\alpha) = \rho(\alpha) \cup \{\varnothing\}$, $\rho(\alpha)$ — обычная область значений α. В этом случае (и если $\alpha(x) = \beta f(x)$) полагаем, что $\alpha \leq_p \beta$ ($\alpha \leq_m \beta$) посредством ОРФ f. Аналогично $\alpha \leq_e \beta$, если найдется РПМ W такое, что

$$(\forall z \in R(\alpha))(\alpha^{-1}(z) = \{x : (\exists y)(\langle x, y\rangle \in W \wedge D_y \subseteq \beta^{-1}(z))\}).$$

Нетрудно проверить, что отношения $\leq_m$, $\leq_p$, и $\leq_e$ на множестве всех ЧРФ являются предпорядками. Поэтому обычным образом можно определить m-, p- и e-степени ЧРФ и их верхние полурешетки. В частности, точной верхней гранью двух m- (p- или m-) степеней, содержащих ЧРФ α и β, будет m- (p- или m-) степени, содержащие ЧРФ $\alpha \oplus \beta$, где

$$(\alpha \oplus \beta)(x) = \begin{cases} \alpha(y), & \text{если } x = 2y, \\ \beta(y), & \text{если } x = 2y + 1. \end{cases}$$

Договоримся, что если $\mathscr{T} = \langle T; \leq\rangle$ и $\mathscr{E} = \langle E; \subseteq\rangle$ — два частично упорядоченных множества, то пусть

$$\mathscr{T} \times \mathscr{E} = \langle \mathscr{E} \times E; \lhd\rangle,$$

где $T \times E = \{(t, e) : t \in T \wedge e \in E\}$, причем

$$(t_1, e_1) \lhd (t_2, e_2) \risingdotseq t_1 \leq t_2 \wedge e_1 \leq e_2.$$

Обозначим через $\mathscr{L}$ ($\mathscr{T}$, $\mathscr{E}$) верхнюю полурешетку e-степеней всех ЧРФ, не являющихся ОРФ (всех рекурсивно перечислимых T-степеней и всех РПМ относительно $\subseteq$).

Предложение 1. *Полурешетки $\mathscr{L}$ и $\mathscr{T} \times \mathscr{E}$ изоморфны.*

Доказательство. Будем обозначать через $\delta(\alpha)$, $\delta(\beta)$ области определения ЧРФ α, β, а $\overline{X} = N \setminus X$ для $X \subseteq N$. Для любых ЧРФ α и β, $\delta(\alpha), \delta(\beta) \neq N$, достаточно показать, что

$$\alpha \leq_e \beta \Leftrightarrow \delta(\alpha) \leq_T \delta(\beta) \wedge \rho(\alpha) \subseteq \rho(\beta).$$

Если $\alpha \leq_e \beta$, то $\rho(\alpha) \subseteq \rho(\beta)$, $\overline{\delta(\alpha)} \leq_e \overline{\delta(\beta)}$. Но e- сводимость дополнений РПМ равносильна их T-сводимости.

Обратно, если $\rho(\alpha) \subseteq \rho(\beta)$, $\delta(\alpha) \leq_+ \delta(\beta)$, то существует e-оператор Φ такой, что $\overline{\delta(\alpha)} = \Phi(\overline{\delta(\beta)})$. Пусть $b = \min\{x \in \delta(\beta)\}$ и

$$\Psi = \{\langle x, y\rangle : (\exists z)(\langle x, z\rangle \in \Phi \wedge D_y = D_z \cup \{b\})\}$$
$$\vee \{\langle x, y\rangle : x \in \delta(\alpha) \wedge D_y = \{x\} \wedge z \in \delta(\beta) \wedge \alpha(x) = \beta(z)\}.$$

Легко проверить, что $\alpha \leq_e \beta$ посредством e-оператора Ψ. $\square$

Следствие 1. *Верхняя полурешетка всех e-степеней* ЧРФ, *не являющихся* ОРФ, *T-степени областей определения которых равны, изоморфна решетке $\mathscr{E}$.*

Следствие 2. *Верхняя полурешетка всех e-степеней* ЧРФ, *не являющихся* ОРФ, *с равными областями значений изоморфна полурешетке $\mathscr{T}$.*

Пусть теперь $R(\alpha) = R(\beta) = \{\varnothing, 0, 1, \dots, n-1\}$ и $\alpha \leq_p \beta$. Это означает существование p-оператора Φ такого, что

$$(\forall z \in R(\alpha)(\alpha^{-1}(z) = \Phi(\beta^{-1}(z))).$$

Положим $A_i = \alpha^{-1}(i)(B_i = \beta^{-1}(i))$ для $i \in \rho(\alpha)$ ($\rho(\beta)$). Получим два набора непустых попарно не пересекающихся РПМ $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle$, $\langle B_1, \dots, B_{n-1}\rangle$, причем первый p-сводим ко второму в смысле

$$(\forall i < n)(A_i = \Phi(B_i)) \wedge \overline{\rho(\alpha)} = \Phi(\overline{\rho(\beta)}) \qquad (1)$$

посредством p-оператора Φ.

Лемма 1. *Соотношение* $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle \le_p \langle B_0, \dots, B_1\rangle$ *имеет место тогда и только тогда, когда существуют* p*-операторы* Φ_i, $i \le n$, *такие, что*

$$(\forall i < n)(A_i = \Phi_i(B_i)) \wedge \overline{\bigcup_{i<n} A_i} = \Phi_n\Bigl(\overline{\bigcup_{i<n} B_i}\Bigr). \tag{2}$$

Доказательство. В одну сторону утверждение следует из (1).

Обратно, пусть p-операторы Φ_i, $i \le n$, с условием (2) существуют. Для каждого $i \le n$ положим

$$\Psi_i\{\langle x, y\rangle : (\exists z)(\langle x, z\rangle \in \Phi_i \wedge D_y = D_z \cup \{b_i\})\},$$

где $b_i = \min\{x \in B_i\}$ для $i < n$ и $b_n = \min\{x \in \overline{\bigcup_{i<n} B_i}\}$. Легко понять, что $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle \le_p \langle B_0, \dots, B_{n-1}\rangle$ посредством p-оператора $\Psi = \bigcup_{i \le n} \Psi_i$. $\square$

Определим теперь кратную позитивную (mp-) сводимость наборов из n множеств так:

$$\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle \le_{mp} \langle B_0, \dots, B_{n-1}\rangle \leftrightharpoons (\forall i < n)(A_i = \Phi(B_i)) \tag{3}$$

для подходящего p-оператора Φ. Ясно, что p-сводимость наборов из m множеств влечет их mp-сводимость. Из доказательства леммы 1 получим также

Следствие 3. *Соотношение* $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle \le_{mp} \langle B_0, \dots, B_{n-1}\rangle$ *имеет место тогда и только тогда, когда существуют* p*-операторы* Φ_i, $i < n$, *такие, что* $(\forall i)(A_i = \Phi_i(B_i))$.

Лемма 2. $A \le_p B \Rightarrow \overline{A} \le_p \overline{B}$.

Доказательство. Предположим, что $A \le_p B$, т. е. существует ОРФ f такая, что

$$(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow (\exists y \in D_{f(x)}(D_y \subseteq B)).$$

Если $D_{f(x)} = \{y_0, \dots, y_m\}$, то пусть $D_{z(x)} = \{u_0, \dots, u_s\}$ состоит из номеров всех тех конечных множеств D_u, для которых $|D_u| = m + 1$ и

$$(\forall y)(y \in D_{f(x)} \Rightarrow |D_y \cap D_u| = 1).$$

Но $x \in \overline{A} \Leftrightarrow D_y \cap \overline{B} = \varnothing$ для всех $y \in D_{f(x)}$. Поэтому $D_u \subseteq \overline{B}$ для некоторого $u \in D_{z(x)}$. Так как $z(x)$ находится эффективно по x, то $z(x) = g(x)$ — ОРФ. Поэтому $\overline{A} \le_p \overline{B}$ посредством ОРФ g. $\square$

Из леммы 2 следует, что при $n = 1$ p-сводимость совпадает с mp-сводимостью.

Предложение 2. *При* $n \ge 2$ p*-сводимость наборов из* n *множеств строго сильнее их* mp*-сводимости.*

Доказательство. Проверим этот факт для $n = 2$. Пусть B — гиперпростое множество с ретрассируемым дополнением [4] и B_0, B_1 — его разбиение на два рекурсивно неотделимых РПМ и

$$A_0 = \{2x : x \in B_0\}, \quad A_1 = \{2x + 1 : x \in B_1\}.$$

В частности, $A_0 \oplus A_1 = A_0 \cup A_1$. Понятно, что $\langle A_0, A_1\rangle \le_{mp} \langle B_0, B_1\rangle$ посредством ОРФ h, где

$$D_{h(x)} = \begin{cases} \{u(x)\}, & \text{где } D_{u(x)} = \{b_0, y\}, \text{ если } x = 2y; \\ \{v(x)\}, & \text{где } D_{v(x)} = \{b_1, y\}, \text{ если } x = 2y + 1. \end{cases}$$

Здесь b_0 и b_1 — фиксированные элементы из B_0 и B_1. Предположим, что $\langle A_0, A_1\rangle \leq_p \langle B_0, B_1\rangle$. Так как $\overline{A_0 \cup A_1} \leq_p \overline{B_0 \cup B_1}$, то по лемме 2 $A_0 \cup A_1 \leq_p B_0 \cup B_1$. Поскольку $B_0 \cup B_1$ — полурекурсивное множество, то $A_0 \cup A_1 \leq_m B_0 \cup B_1$ [4]. Но РПМ $A_0 \cup A_1$ рекурсивно не отделимо от $A_1 \cup A_0$, а $B_0 \cup B_1$ — простое множество. Приходим к противоречию с m-сходимостью таких множеств. $\square$

Обозначим через L_p^n (L_{mp}^n) верхнюю полурешетку p-степеней всех ЧРФ с областью значений $R = \{\varnothing, 0, \dots, n-1\}$ (соответственно всех n-к непустых РПМ). В частности, $L_{mp}^1 = \mathscr{P}$ — верхняя полурешетка всех p-степеней непустых РПМ. Из (3) следует, что L_{mp}^n изоморфна $\mathscr{P}^n$, а в [5] доказано, что элементарные теории $\mathrm{Th}(L_{pm}^s)$ и $\mathrm{Th}(L_{pm}^t)$ различны при $s \neq t$.

Обратимся теперь к полурешеткам L_p^n и будем отождествлять ЧРФ α, $R(\alpha) = \{\varnothing, 0, \dots, n-1\}$, с соответствующими им наборами $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle$ попарно не пересекающихся непустых РПМ (такие наборы находятся во взаимно однозначном соответствии с указанными ЧРФ).

Из леммы 1 следует, что L_p^n имеет наименьший (наибольший) элемент p-степени таких $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle$, что каждое A_i, $i < n$, является рекурсивным (p-полным). Видимо, L_p^n устроены достаточно сложно, что углубляется еще и следующим фактом.

Предложение 3. $\mathrm{Th}(L_p^s) \neq \mathrm{Th}(L_p^t)$ *при* $t \neq s$.

Доказательство. Надо почти скопировать доказательство основной теоремы о $\mathrm{Th}(L_{mp}^n)$ из [5]. Поэтому ограничимся лишь частным случаем: $\mathrm{Th}(L_p^2) \neq \mathrm{Th}(L_p^3)$. Для этого покажем, что в L_p^2 истинно следующее утверждение: существуют два различных минимальных элемента a_1, a_2 таких, что

$$(\forall b)(b < a_1 \oplus a_2 \Rightarrow (b \leq a_1 \vee b \leq a_2)), \tag{4}$$

но для любого минимального элемента $b \neq a_1, a_2$

$$(\exists c)((c < a_1 \oplus b \wedge c \nleq a_1 \wedge c \nleq b) \vee (c < a_2 \oplus b \wedge c \nleq a_2 \wedge c \nleq b)). \tag{5}$$

Действительно, минимальными элементами L_p^n, как следует из леммы 1 и определения минимальности, будут наборы $\langle A_0, \dots, A_{n-1}\rangle$ такие, что некоторое РПМ A_i имеет минимальную P-степень, а остальные A_j — рекурсивные множества, скажем, $R = \{2x : x \in N\}$. Известно [5] существование РПМ A минимальной p-степени a, обладающей следующим свойством: для всякой минимальной p-степени b, $b \neq a$,

$$(\exists c)(c < a \oplus b \wedge c \nleq a \wedge c \nleq b).$$

Возьмем в качестве a_1, a_2 p-степени пар $\langle A, R\rangle$, $\langle R, A\rangle$. Так как $a_1 \oplus a_2$ будет p-степенью $\langle A, A\rangle$, то если $\langle B, R\rangle$ или $\langle R, B\rangle$ p-сводима к $\langle A, A\rangle$, то $B \leq_p A$ и поэтому $\langle B, R\rangle \leq_p \langle A, R\rangle$ или $\langle R, B\rangle \leq_p \langle R, A\rangle$. Пусть $b \in L_p^2$ тоже минимальный элемент, $b \neq a_1, a_2$. Тогда b будет p-степенью пары $\langle B, R\rangle$ (или $\langle R, B\rangle$). По выбору A найдется РПМ C такое, что

$$C <_p A \oplus B \wedge C \nleq A \wedge C \nleq B.$$

Понятно, что если c — p-степень $\langle C, R\rangle$, то

$$c < a_1 \oplus b \wedge c \nleq a_1 \wedge c \nleq b.$$

С другой стороны, пусть для двух минимальных элементов $a_1, a_2 \in L_p^3$ выполнено (4). Тогда a_1, a_2 являются p-степенями с точностью до перестановок множеств в них подходящих троек $\langle A_1, R, R\rangle$, $\langle A_2, A_3, R\rangle$, где одно из A_2, A_3 равно

R. Возьмем в качестве b p-степень множеств $\langle R, R, A\rangle$. Ясно, что $b \neq a_1, a_2$ и условие (5) оказывается ложным, так как для всякой $c \in L_p^3$

$$(c < a_1 \oplus b \Rightarrow c \leq a_1 \vee c \leq b) \vee (c < a_2 \oplus b \Rightarrow c \leq a_2 \vee c \leq b). \quad \square$$

Интересно было бы получить дополнительную информацию о строении L_p^n, $n \geq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дегтев А. Н.* О сводимостях нумераций // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 2. С. 207–219.
2. *Дегтев А. Н.* Сводимость частично рекурсивных функций. I // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 5. С. 970–988.
3. *Дегтев А. Н.* Сводимость частично-рекурсивных функций. II // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 17, № 4. С. 765–774.
4. *Jockusch C. G.* Semirecursive sets and positive reducibility // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131, N 2. P. 420–436.
5. *Дегтев А. Н.* О кратной позитивной сводимости // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 74–76.

Статья поступила 3 марта 1998 г.

г. Тюмень
Тюменский гос. университет