Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 517.444

ВЕСОВАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МАТРИЦ

Л. Б. Вертгейм

Аннотация: Рассматривается задача интегральной геометрии матриц в плоской ограниченной области с матричными весами вдоль регулярного семейства кривых в области. При некоторых ограничениях на веса доказывается теорема единственности и устойчивости восстановления матриц. Полученный результат применяется к изучению нелинейной задачи реконструкции матричнозначной функции в плоской области по известным граничным значениям фундаментальных матриц линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль кривых из некоторого регулярного семейства, матрицы которых являются значениями искомой матричнозначной функции в соответствующих точках кривых. При априорных ограничениях малости на искомую функцию доказывается теорема единственности реконструкции и ее устойчивости. Библиогр. 5.

Статья представляет собой детальный и несколько модифицированный вариант работы автора [1]. В [2, 3] установлена однозначная и устойчивая разрешимость задачи интегральной геометрии с весом вдоль достаточно общего семейства кривых в плоской области. В данной работе этот результат распространяется с использованием методов из [2, 3] на матрицы и затем применяется к одной задаче восстановления матриц, зависящих от точки области.

1. Интегральная геометрия с матричным весом

Пусть D — ограниченная односвязная плоская область с C^1-гладкой границей Γ, параметризованной длиной дуги: $x = \xi(l)$, $y = \eta(l)$, $l \in [0, L]$.

Определение. Семейство кривых K в области $\overline{D}$ называется *регулярным*, если выполнены следующие условия.

1. Через любую внутреннюю точку D в любом направлении проходит единственная кривая семейства, а для граничных точек — единственная кривая в произвольном направлении внутрь области. Для любых двух различных точек замкнутой области $\overline{D}$ существует единственная кривая семейства, проходящая через них. Кривая семейства $K(l_1, l_2)$ пересекает Γ в точках $(\xi(l_1), \eta(l_1))$ и $(\xi(l_2), \eta(l_2))$, другие точки кривой лежат внутри D. Множество длин кривых ограничено в совокупности.

2. Пусть уравнение кривой, выходящей из (x_0, y_0) под углом θ к оси OX, имеет вид

$$x = \varphi(x_0, y_0, s, \theta), \quad y = \psi(x_0, y_0, s, \theta).$$

Здесь s — параметр длины дуги, а область изменения аргументов

$$\overline{G} = \{(x_0, y_0, s, \theta) \mid (x_0, y_0) \in \overline{D}, 0 \le \theta \le 2\pi, -S^-(x_0, y_0, \theta) \le s \le S^+(x_0, y_0, \theta)\}.$$

Предполагаем, что функции S^+, S^- связаны естественным соотношением

$$S^+(x_0, y_0, \theta + \pi) = S^-(x_0, y_0, \theta)$$

и 2π-периодичны по θ. Функции φ, ψ дважды дифференцируемы внутри $\overline{G}$, и их производные до второго порядка включительно непрерывны в $\overline{G}$. При этом φ, ψ 2π-периодичны по θ вместе со своими производными до второго порядка.

3. Выполнена следующая оценка для якобиана:

$$\frac{1}{s}\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(s,\theta)}\right| \geq C > 0$$

для некоторой постоянной C.

Замечание 1.1. Условие 2 означает по определению, что $\varphi, \psi \in C^2(\overline{G})$ (см. [4, с. 192]).

Замечание 1.2. В работе [3] в условии 2 регулярности сформулированы требования: φ, ψ принадлежат $C^3(G)$ и имеют ограниченные производные, а в работе [2] φ, ψ дважды непрерывно дифференцируемы по аргументам x_0, y_0, $s\cos\theta$, $s\sin\theta$. Приведенное выше условие 2 является наиболее слабым требованием и достаточно для последующих рассуждений.

Пусть имеются известные матричнозначные функции

$$P(x,y,l) \in C^1(\overline{\Omega}, M_{nn}), \quad Q(x,y,l) \in C^1(\overline{\Omega}, M_{mm}),$$

где $\Omega = D \times [0,L]$ и введено обозначение $C^1(\overline{\Omega}, M_{kl})$ для совокупности матриц размера $k \times l$ в области $\overline{\Omega}$, элементы которых принадлежат $C^1(\overline{\Omega})$.

Задача 1. *Определить матрицу $U(x,y) \in C^2(\overline{D}, M_{nm})$ размера $n \times m$ по всевозможным интегралам*

$$\int\limits_{K(l_1,l_2)} P(x,y,l_1)U(x,y)Q(x,y,l_1)\,ds = V(l_1,l_2), \tag{1.1}$$

где $K(l_1,l_2)$ — кривая семейства, соединяющая точки границы $(\xi(l_1),\eta(l_1))$ и $(\xi(l_2),\eta(l_2))$.

Обозначим

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad \|A\| = \|A\|_\infty + \|A^t\|_\infty.$$

Норма $\|\cdot\|_\infty$ является операторной нормой в $\mathbb{R}^n$, соответствующей норме векторов $\|v\|_\infty = \max\limits_j |v_j|$.

Теорема 1.1. *Пусть семейство кривых K в области D регулярно и веса P, Q удовлетворяют условиям*

$$\det P \neq 0, \quad \det Q \neq 0, \tag{1.2}$$

$$\|P_l P^{-1}\| + \|Q^{-1}Q_l\| < \frac{1}{\sqrt{2}+1}\theta_l \tag{1.3}$$

всюду в Ω, где $\theta(x,y,l)$ — угол между осью OX и касательной в точке (x,y) к кривой семейства, проходящей через точки $(\xi(l),\eta(l))$ и (x,y). Тогда задача 1 имеет не более одного решения и выполнена оценка устойчивости

$$\iint\limits_D \sum_{ij} u_{ij}^2(x,y)\,dxdy \leq \widetilde{C} \int\limits_0^L \int\limits_0^L \operatorname{tr}\left(\frac{\partial V^t}{\partial l_1}\frac{\partial V}{\partial l_2}\right) dl_1 dl_2 \tag{1.4}$$

с константой $\widetilde{C}$, зависящей от семейства кривых, области D и весов P, Q.

Замечание 1.3. Уменьшение коэффициента в условии (1.3) по сравнению с работой автора [1] связано с некоторым изменением в способе доказательства.

Доказательство. Проведем редукцию нашей задачи к обратной задаче для матрицы:

$$W(x,y,l) = \int\limits_{K(x,y,l)} P(x,y,l)U(x,y)Q(x,y,l)ds, \tag{1.5}$$

где $K(x,y,l)$ — часть кривой семейства, проходящей через $(\xi(l),\eta(l))$ и (x,y), расположенная между этими точками. Предположим вначале, что веса P,Q C^2-гладкие. Обозначим

$$\Omega' = \overline{\Omega} \setminus \{(\xi(l),\eta(l),l) \mid l \in [0,L]\},\ \Omega_\varepsilon = \{(x,y,l) \in \overline{\Omega} \mid \operatorname{dist}((x,y),(\xi(l),\eta(l))) \geq \varepsilon\}.$$

Лемма 1.1. *Функция W принадлежит $C(\overline{\Omega})$, имеет равномерно ограниченные на Ω' производные W_x, W_y, W_l и для любого ε имеет непрерывные на $\overline{\Omega}_\varepsilon$ производные W_{xy}, W_{xl}, W_{yl}.*

Доказательство. Пусть $S(x,y,l)$ обозначает длину кривой $K(x,y,l)$. Тогда

$$W(x,y,l) = \int\limits_{-S(x,y,l)}^{0} P(\tilde{x},\tilde{y},l)U(\tilde{x},\tilde{y})Q(\tilde{x},\tilde{y},l)ds, \tag{1.6}$$

где в правой части обозначено

$$\tilde{x} = \varphi(x,y,s,\theta(x,y,l)), \quad \tilde{y} = \psi(x,y,s,\theta(x,y,l)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} W_x(x,y,l) = {} & S_x(x,y,l)P(\xi(l),\eta(l),l)U(\xi(l),\eta(l))Q(\xi(l),\eta(l),l) \\ & + \int\limits_{-S(x,y,l)}^{0} [F_1(x,y,s,l) + \theta_x(x,y,l)F_2(x,y,s,l)]\, ds, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где F_1, F_2 — функции класса C^1, получающиеся соответствующим образом из функций P,U,Q, производных P_x, P_y, P_l, U_x, U_y, Q_x, Q_y, Q_l и производных φ_x, φ_θ, ψ_x, ψ_θ (в F_1 участвуют слагаемые вида $P_x(\tilde{x},\tilde{y},l) \cdot \varphi_x \cdot U(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot Q(\tilde{x},\tilde{y},l)$, а в F_2 — слагаемые вида $P_x(\tilde{x},\tilde{y},l) \cdot \varphi_\theta \cdot U(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot Q(\tilde{x},\tilde{y},l)$).

Оценим теперь S_x и θ_x. Утверждаем, что S_x ограничено в Ω', а θ_x оценивается в Ω' сверху, как

$$|\theta_x(x,y,l)| \leq \frac{B_0}{S(x,y,l)}$$

для некоторой постоянной B_0. В самом деле, функции $S(x,y,l)$ и $\theta(x,y,l)$ находятся из системы

$$\begin{cases} \varphi(x,y,-S(x,y,l),\theta(x,y,l)) = \xi(l), \\ \psi(x,y,-S(x,y,l),\theta(x,y,l)) = \eta(l). \end{cases}$$

Дифференцируя ее, получаем следующие соотношения (при соответствующих значениях аргументов):

$$\begin{cases} -\varphi_s \cdot S_x + \varphi_\theta \cdot \theta_x = -\varphi_x, \\ -\psi_s \cdot S_x + \psi_\theta \cdot \theta_x = -\psi_x. \end{cases}$$

Отсюда

$$S_x(x,y,l) = \left(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(s,\theta)}\right)^{-1} \begin{vmatrix} \varphi_x \varphi_\theta \\ \psi_x \psi_\theta \end{vmatrix}, \quad \theta_x(x,y,l) = -\left(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(s,\theta)}\right)^{-1} \begin{vmatrix} \varphi_s \varphi_x \\ \psi_s \psi_x \end{vmatrix}.$$

(Функции в правых частях берутся при значениях аргументов $(x, y, -S(x,y,l), \theta(x,y,l))$. Это имеет смысл в силу $\varphi,\psi \in C^2(\overline{G})$.)

Отметим, что

$$\varphi_\theta(x,y,0,\theta) = 0, \quad \psi_\theta(x,y,0,\theta) = 0.$$

Ввиду того, что $\varphi,\psi \in C^2(\overline{G})$, получим

$$|\varphi_\theta(x,y,s,\theta)| \le B_1 s, \quad |\psi_\theta(x,y,s,\theta)| \le B_2 s$$

с постоянными B_1, B_2, определенными равенствами

$$B_1 = \max_{\overline{G}} |\varphi_{s\theta}(x,y,s,\theta)|, \quad B_2 = \max_{\overline{G}} |\psi_{s\theta}(x,y,s,\theta)|.$$

Используя условие регулярности

$$\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(s,\theta)}\right| \ge Cs$$

и ограниченность функций φ_x, ψ_x, φ_s, ψ_s, в силу условия C^2-гладкости φ и ψ получим ограниченность $S_x(x,y,l)$ и неравенство

$$|\theta_x(x,y,l)| \le \frac{B_0}{S(x,y,l)}.$$

Из формулы (1.7) для W_x следует ограниченность W_x на Ω'. Аналогичные рассуждения проводятся для W_y и W_l.

Дифференцируя выражение для W_x и соответствующее равенство для W_y (с использованием формул для $S_x, \theta_x, S_y, \theta_y, S_l, \theta_l$), получаем существование и непрерывность производных W_{xy}, W_{xl}, W_{yl} в области $\overline{\Omega}_\varepsilon$ для любого ε. Заметим, что при дифференцировании по l используются существование и непрерывность в $\overline{\Omega}_\varepsilon$ производных S_l и θ_l, вытекающие из C^1-гладкости функций $\xi(l), \eta(l)$. Непрерывность W на $\overline{\Omega}$ очевидна. Лемма доказана.

Подставим в формулу (1.6) значение

$$(x,y,l) = (\varphi(x,y,s_1,\theta(x,y,l)), \psi(x,y,s_1,\theta(x,y,l)), l).$$

Тогда

$$W(\varphi(x,y,s_1,\theta(x,y,l)), \psi(x,y,s_1,\theta(x,y,l)), l) - W(x,y,l) = \int_0^{s_1} P(\tilde{x},\tilde{y},l) U(\tilde{x},\tilde{y}) Q(\tilde{x},\tilde{y},l)\, ds \quad (1.8)$$

(поскольку интегрирование ведется вдоль одной и той же кривой семейства, проходящей через $(\xi(l), \eta(l))$ и (x,y)).

Дифференцируя (1.8) по s_1 при $s_1 = 0$ и учитывая, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(x,y,0,\theta) = \cos\theta, \quad \frac{\partial\psi}{\partial s}(x,y,0,\theta) = \sin\theta,$$

$$\varphi(x,y,0,\theta)=x, \quad \psi(x,y,0,\theta)=y,$$

приходим в области Ω' к уравнению

$$\cos\theta(x,y,l)W_x(x,y,l)+\sin\theta(x,y,l)W_y(x,y,l)=P(x,y,l)U(x,y)Q(x,y,l)$$

или

$$\mathscr{H}W\equiv\cos\theta W_x+\sin\theta W_y=PUQ. \tag{1.9}$$

Домножая слева на P^{-1} и справа на Q^{-1} и используя то, что U не зависит от l, получаем

$$\mathscr{L}W\equiv\frac{\partial}{\partial l}[P^{-1}(\mathscr{H}W)Q^{-1}]=0. \tag{1.10}$$

Функция W удовлетворяет граничному условию

$$W(\xi(l_2),\eta(l_2),l_1)=V(l_1,l_2).$$

Обозначим $\mathscr{S}W\equiv-\sin\theta W_x+\cos\theta W_y$ и применим основное тождество, справедливое для любых матриц W,P,Q размеров $n\times m$, $n\times n$, $m\times m$, достаточно гладко зависящих от x,y,l, где P,Q невырожденные:

$$\begin{aligned}2(\mathscr{S}W)^t\cdot P\cdot(\mathscr{L}W)\cdot Q&\equiv\theta_l\big(W_x^tW_x+W_y^tW_y\big)\\&+\big(W_{xl}^tW_x-W_x^tW_{xl}+W_y^tW_{yl}-W_{yl}^tW_y\big)\cos\theta\sin\theta\\&+\big(W_y^tW_{xl}-W_{yl}^tW_x\big)\cos^2\theta+\big(W_{xl}^tW_y-W_x^tW_{yl}\big)\sin^2\theta\\&+\frac{\partial}{\partial l}[(\mathscr{S}W)^t\mathscr{H}W]-2(\mathscr{S}W)^tP_lP^{-1}\mathscr{H}W-2(\mathscr{S}W)^t(\mathscr{H}W)Q^{-1}Q_l.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Это тождество доказывается простым раскрытием скобок и приведением подобных слагаемых.

Применим (1.11) к матрице (1.5) и возьмем след получившегося равенства. В силу (1.10) левая часть обратится в 0. Используя очевидное соотношение $\operatorname{tr}(A^tB)=\operatorname{tr}(B^tA)$, найдем, что след выражения во второй строке (1.11) нулевой, и получим

$$\Phi(W_x,W_y)=\operatorname{tr}\left[\frac{\partial}{\partial y}\big(W_l^tW_x\big)-\frac{\partial}{\partial x}\big(W_l^tW_y\big)-\frac{\partial}{\partial l}(\mathscr{S}W^t\mathscr{H}W)\right], \tag{1.12}$$

где Φ есть квадратичная форма от $2nm$ переменных с коэффициентами, зависящими от x,y,l. Ее можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Phi(W_x,W_y)&=\theta_l\operatorname{tr}\big[W_x^tW_x+W_y^tW_y\big]\\&\quad-2\operatorname{tr}[(\mathscr{S}W)^tP_lP^{-1}(\mathscr{H}W)]-2\operatorname{tr}[(\mathscr{S}W)^t(\mathscr{H}W)Q^{-1}Q_l].\end{aligned}$$

Вспоминая определение операторов $\mathscr{S}$ и $\mathscr{H}$, перепишем ее в виде

$$\begin{aligned}\Phi(W_x,W_y)&=\theta_l\operatorname{tr}\big[W_x^tW_x+W_y^tW_y\big]+2\sin\theta\cos\theta\operatorname{tr}\big[W_x^t\overline{P}W_x\big]\\&-2\cos^2\theta\operatorname{tr}\big[W_y^t\overline{P}W_x\big]+2\sin^2\theta\operatorname{tr}\big[W_x^t\overline{P}W_y\big]-2\sin\theta\cos\theta\operatorname{tr}\big[W_y^t\overline{P}W_y\big]\\&+2\sin\theta\cos\theta\operatorname{tr}\big[W_x^tW_x\overline{Q}\,\big]-2\cos^2\theta\operatorname{tr}\big[W_y^tW_x\overline{Q}\,\big]\\&+2\sin^2\theta\operatorname{tr}\big[W_x^tW_y\overline{Q}\,\big]-2\sin\theta\cos\theta\operatorname{tr}\big[W_y^tW_y\overline{Q}\,\big]\\&=\sum_{ij,kl}\Phi^{xx}_{ij,kl}w_{ij,x}w_{kl,x}+2\sum_{ij,kl}\Phi^{xy}_{ij,kl}w_{ij,x}w_{kl,y}+\sum_{ij,kl}\Phi^{yy}_{ij,kl}w_{ij,y}w_{kl,y},\end{aligned}$$

где обозначено $\overline{P} = P_l P^{-1}$, $\overline{Q} = Q^{-1} Q_l$. Коэффициенты квадратичной формы могут быть представлены в следующем виде (остальные коэффициенты нулевые):

$$\Phi^{xx}_{ij,ij} = \theta_l + 2\sin\theta\cos\theta\bar{p}_{ii} + 2\sin\theta\cos\theta\bar{q}_{jj},$$
$$\Phi^{xx}_{ij,kj} = \sin\theta\cos\theta(\bar{p}_{ik} + \bar{p}_{ki})\ (i \neq k), \quad \Phi^{xx}_{ij,ik} = \sin\theta\cos\theta(\bar{q}_{kj} + \bar{q}_{jk})\ (j \neq k),$$
$$\Phi^{xy}_{ij,kj} = -\cos^2\theta\bar{p}_{ki} + \sin^2\theta\bar{p}_{ik}\ (i \neq k), \quad \Phi^{xy}_{ij,ik} = -\cos^2\theta\bar{q}_{jk} + \sin^2\theta\bar{q}_{kj}\ (j \neq k),$$
$$\Phi^{xy}_{ij,ij} = (-\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\bar{p}_{ii} + \bar{q}_{jj}), \quad \Phi^{yy}_{ij,ij} = \theta_l - 2\sin\theta\cos\theta\bar{p}_{ii} - 2\sin\theta\cos\theta\bar{q}_{jj},$$
$$\Phi^{yy}_{ij,kj} = -\sin\theta\cos\theta(\bar{p}_{ik} + \bar{p}_{ki})\ (i \neq k), \quad \Phi^{yy}_{ij,ik} = -\sin\theta\cos\theta(\bar{q}_{kj} + \bar{q}_{jk})\ (j \neq k).$$

Докажем, что Φ — строго положительно определенная квадратичная форма. Для этого рассмотрим ее матрицу и используем теорему Гершгорина о локализации спектра матрицы (все собственные числа λ матрицы $B = \|b_{ij}\|$ лежат в объединении кругов $\big\{\lambda \in C : |\lambda - b_{ii}| < \sum\limits_{j\neq i} |b_{ij}|\big\}$ по всем диагональным элементам b_{ii} (см. [5, с. 26])). Таким образом, надо показать, что справедливы следующие неравенства:

$$\Phi^{xx}_{ij,ij} > \sum_{k\neq i,k=1}^{n} \big|\Phi^{xx}_{ij,kj}\big| + \sum_{k\neq j,k=1}^{m} \big|\Phi^{xx}_{ij,ik}\big| + \sum_{k\neq i,k=1}^{n} \big|\Phi^{xy}_{ij,kj}\big| + \sum_{k\neq j,k=1}^{m} \big|\Phi^{xy}_{ij,ik}\big| + \big|\Phi^{xy}_{ij,ij}\big|,$$

$$\Phi^{yy}_{ij,ij} > \sum_{k\neq i,k=1}^{n} \big|\Phi^{yy}_{ij,kj}\big| + \sum_{k\neq j,k=1}^{m} \big|\Phi^{yy}_{ij,ik}\big| + \sum_{k\neq i,k=1}^{n} \big|\Phi^{xy}_{ij,kj}\big| + \sum_{k\neq j,k=1}^{m} \big|\Phi^{xy}_{ij,ik}\big| + \big|\Phi^{xy}_{ij,ij}\big| \tag{1.13}$$

(тогда все собственные числа матрицы квадратичной формы Φ будут положительными).

В самом деле, прибавляя к правой части первого неравенства величину $|2\sin\theta\cos\theta\bar{p}_{ii} + 2\sin\theta\cos\theta\bar{q}_{jj}|$, получившееся выражение можно оценить сверху через

$$\begin{aligned}
&2|\sin\theta\cos\theta||\bar{p}_{ii}| + 2|\sin\theta\cos\theta||\bar{q}_{jj}| \\
&\quad + |\sin\theta\cos\theta| \sum_{k\neq i,k=1}^{n} (|\bar{p}_{ik}| + |\bar{p}_{ki}|) + |\sin\theta\cos\theta| \sum_{k\neq j,k=1}^{m} (|\bar{q}_{kj}| + |\bar{q}_{jk}|) \\
&\quad + \sum_{k\neq i,k=1}^{n} (\cos^2\theta|\bar{p}_{ki}| + \sin^2\theta|\bar{p}_{ik}|) + \sum_{k\neq j,k=1}^{m} (\cos^2\theta|\bar{q}_{jk}| + \sin^2\theta|\bar{q}_{kj}|) \\
&+ (|\bar{p}_{ii}| + |\bar{q}_{jj}|) = (|\sin\theta\cos\theta| + \sin^2\theta) \sum_{k=1}^{n} |\bar{p}_{ik}| + (|\sin\theta\cos\theta| + \cos^2\theta) \sum_{k=1}^{n} |\bar{p}_{ki}| \\
&\quad + (|\sin\theta\cos\theta| + \cos^2\theta) \sum_{k=1}^{m} |\bar{q}_{jk}| + (|\sin\theta\cos\theta| + \sin^2\theta) \sum_{k=1}^{m} |\bar{q}_{kj}| \\
&\qquad \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}(\|\overline{P}\| + \|\overline{Q}\|) < \frac{1}{2}\theta_l
\end{aligned} \tag{1.14}$$

в силу элементарных неравенств

$$|\sin\theta\cos\theta| + \sin^2\theta \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \quad |\sin\theta\cos\theta| + \cos^2\theta \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

и условия (1.3).

Для второго неравенства рассуждения аналогичны. Используя теорему Гершгорина и замечая, что разность левой и правой частей неравенства (1.13) не меньше $\frac{1}{2}\theta_l$, получим

$$\Phi(W_x, W_y) \geq \frac{1}{2}\theta_l \sum_{ij} \big(w_{ij,x}^2 + w_{ij,y}^2\big). \tag{1.15}$$

С помощью тождества

$$W_x^t W_x + W_y^t W_y \equiv (\mathscr{H} W)^t \mathscr{H} W + (\mathscr{S} W)^t \mathscr{S} W,$$

равенства (1.9), невырожденности P, Q и соображений компактности найдется такая $\overline{C} > 0$, что

$$\sum_{ij} \big(w_{ij,x}^2 + w_{ij,y}^2\big) \geq \operatorname{tr}[(PUQ)^t PUQ] \geq \overline{C} \sum_{ij} u_{ij}^2. \tag{1.16}$$

Используем (1.15), (1.16) в (1.12) и интегрируем полученные неравенства по области Ω_ε. Применяя формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$\overline{C} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{2}\theta_l(x,y,l) \sum_{ij} u_{ij}^2(x,y)\, dxdydl \leq \operatorname{tr} \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \big[\bar{n}_2(x,y,l) W_l^t W_x \\ - \bar{n}_1(x,y,l) W_l^t W_y - \bar{n}_3(x,y,l) \mathscr{S} W^t \mathscr{H} W\big]\, dS, \tag{1.17}$$

где $\bar{n}(x,y,l)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_\varepsilon$.

Разбивая

$$\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon \cup \Gamma_3^\varepsilon,$$

где $\Gamma_1^\varepsilon = \{(x,y,l) \in \partial\Omega_\varepsilon \mid \operatorname{dist}((x,y),(\xi(l),\eta(l))) = \varepsilon\}$, $\Gamma_2^\varepsilon = \{(x,y,l) \mid (x,y) \in \overline{D}, l = 0$ или $l = L\}$, Γ_3^ε — остальная часть $\partial\Omega_\varepsilon$, убеждаемся, что соответствующий интеграл по Γ_1^ε стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу ограниченности W_x, W_y, W_l, а интеграл по Γ_2^ε нулевой ввиду того, что $\bar{n}(x,y,0) = -\bar{n}(x,y,L)$, а все остальные функции совпадают при $l = 0$ и $l = L$. Поэтому в неравенстве (1.17) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить (интеграл в правой части сходится, поскольку производные W_x, W_y, W_l ограниченные):

$$\overline{C} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}\theta_l \sum_{ij} u_{ij}^2(x,y)\, dxdydl = \frac{1}{2}\overline{C} \iint\limits_{D} \sum_{ij} u_{ij}^2(x,y) \left(\int\limits_0^{2\pi} \theta_l(x,y,l)\, dl \right) dxdy \\ = \pi\overline{C} \iint\limits_{D} \sum_{ij} u_{ij}^2(x,y) dxdy \leq \int\limits_0^L \int\limits_0^L \operatorname{tr}\big[W_l^t(x,y,l_1) \\ \times (\bar{n}_2(x,y,l_1) W_x(x,y,l_1) - \bar{n}_1(x,y,l_1) W_y(x,y,l_1))\big]_{(x,y)=(\xi(l_2),\eta(l_2))} dl_1 dl_2 \\ = \int\limits_0^L \int\limits_0^L \operatorname{tr}\left[\frac{\partial}{\partial l_1} V^t(l_1,l_2) \left(-\frac{\partial}{\partial l_2} V(l_1,l_2)\right)\right] dl_1 dl_2 \tag{1.18}$$

в силу граничных условий и того, что $(\bar{n}_2(\xi(l_2),\eta(l_2),l_1), -\bar{n}_1(\xi(l_2),\eta(l_2),l_1))$ — касательный к границе Γ вектор в точке $(\xi(l_2),\eta(l_2))$, направленный против ее ориентации.

Итак, имеем

$$\iint\limits_D \sum_{ij} u_{ij}^2(x,y)\,dxdy \le \widetilde{C} \int\limits_0^L \int\limits_0^L \operatorname{tr}\left(\frac{\partial V^t}{\partial l_1}\frac{\partial V}{\partial l_2}\right) dl_1 dl_2,$$

где $\widetilde{C} = -(\pi\overline{C})^{-1}, \widetilde{C} < 0$ (заметим, что двойной интеграл в правой части неравенства отрицателен).

Наконец, если весовые матрицы P, Q класса C^1, то их можно сколь угодно точно приблизить по норме пространства $C^1(\overline{\Omega})$ матрицами $P^{(s)}, Q^{(s)} \in C^2(\overline{\Omega})$, для которых можно провести все вышеизложенные рассуждения. При этом получаем неравенство (1.18) с константой $\overline{C}_s$, определенной из (1.16) весами $P^{(s)}$ и $Q^{(s)}$, и с соответствующими $W^{(s)}$ и $V^{(s)}$. Поскольку в неравенстве участвуют лишь первые производные, при переходе к пределу получаем искомое неравенство для U и V.

2. Нелинейная задача восстановления матриц

Пусть теперь в области D задана матричнозначная функция $A(x,y) \in C^2(\overline{D}, M_{nn})$. Рассмотрим кривую $K(l_1,l_2)$ семейства, ее параметризацию $x = x(t)$, $y = y(t)$ длиной дуги такую, что $x(0) = \xi(l_1)$, $y(0) = \eta(l_1)$, и систему дифференциальных уравнений вдоль нее для n-мерного столбца u:

$$\frac{du}{dt} = A(x(t),y(t))u, u(0) = u_0. \tag{2.1}$$

Обозначим $v(l_1,l_2,u_0) = u(T)$, где $T = T(l_1,l_2)$ — длина кривой $K(l_1,l_2)$.

Задача 2. *Восстановить матрицу $A(x,y)$ в области $\overline{D}$, зная решения $v(l_1,l_2,u_0)$ системы (2.1) для всевозможных (ориентированных) кривых $K(l_1,l_2)$ и начальных данных u_0.*

Удобно переформулировать эту задачу, рассмотрев вместо (2.1) уравнение для матрицы U размера $n \times n$:

$$\frac{dU}{dt} = A(x(t),y(t))U, U(0) = E \tag{2.2}$$

(зависимость U от l_1, l_2 явно не указывается). Тогда, обозначая $F(l_1,l_2) = U(T)$, приходим к эквивалентной задаче восстановления матрицы A по известной матричнозначной функции $F(l_1,l_2)$ на $[0,L] \times [0,L]$.

Наложим дополнительное ограничение на семейство K и границу Γ:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta} S^-(x,y,\theta)\right| \le C_0. \tag{2.3}$$

Напомним, что $S^-(x,y,\theta)$ — длина той кривой $K(x,y,l)$, которая начинается в точке границы $(\xi(l),\eta(l))$ и приходит в точку (x,y) под углом θ к оси OX. Далее, из условия 2 регулярности для семейства K вытекает наличие такой константы C_1, что

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 \le C_1^2.$$

Заметим, что в случае семейства прямолинейных отрезков и C^2-гладкости границы области в качестве C_0 можно взять удвоенный максимальный радиус кривизны границы (это значение наименьшее из возможных), а в качестве C_1 — диаметр области. Определим множество $M \subset C^2(\overline{D}, M_{nn})$, зависящее от параметров M_1, M_2, M_3, следующими условиями: $A \in M$ тогда и только тогда, когда

$$\|A(x,y)\| < M_1, \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{2.4}$$

$$\int\limits_{K(l_1,l_2)} \|A(x,y)\|\, ds < M_2, \tag{2.5}$$

$$\int\limits_{K(l_1,l_2)} \|\,|\nabla| A(x,y)\|\, ds < M_3 \tag{2.6}$$

для любой кривой $K(l_1,l_2)$, где $(|\nabla|A)_{ij} = |\nabla a_{ij}|$.

Теорема 2.1. *Пусть семейство кривых K регулярно и удовлетворяет дополнительному ограничению (2.3), а параметры M_1, M_2, M_3 удовлетворяют соотношению*

$$C_0 M_1 + e^{2M_2} C_1 M_3 < \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}. \tag{2.7}$$

Тогда задача 2 имеет в классе M не более одного решения, и при этом если $A_1, A_2 \in M$ и F_1, F_2 — соответствующие матричные функции, то справедливо неравенство

$$\iint\limits_D \sum_{ij} (a_{1,ij} - a_{2,ij})^2\, dxdy \le C_2 \int\limits_0^L \int\limits_0^L \operatorname{tr}\left(\frac{\partial R^t}{\partial l_1} \frac{\partial R}{\partial l_2}\right) dl_1 dl_2 \tag{2.8}$$

с некоторой постоянной C_2, не зависящей от A_1 и A_2. Здесь введено обозначение $R = F_1^{-1} F_2 - E$.

Доказательство. Пусть U_1, U_2 — решения уравнения (2.2) вдоль кривой $K(l_1,l_2)$ для матриц A_1, A_2 соответственно. Тогда они невырожденны как фундаментальные матрицы линейных систем дифференциальных уравнений. Для них справедливо следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt}\left[U_1^{-1} U_2\right] = -U_1^{-1} A_1 U_2 + U_1^{-1} A_2 U_2 = U_1^{-1}(A_2 - A_1) U_2. \tag{2.9}$$

(Напомним формулу для производной U^{-1}: $\frac{d}{dt} U^{-1} = -U^{-1} \cdot \frac{d}{dt} U \cdot U^{-1}$.)

Интегрируем соотношение (2.9) вдоль кривой $K(l_1,l_2)$. В результате получаем

$$F_1^{-1}(l_1,l_2) F_2(l_1,l_2) - E = \int\limits_0^T U_1^{-1}(t)[A_2(x(t),y(t)) - A_1(x(t),y(t))] U_2(t)\, dt. \tag{2.10}$$

Рассмотрим (2.10) как задачу интегральной геометрии с $m = n$ относительно $(A_2 - A_1)$ с матричными весами U_1^{-1} и U_2, которые, по существу, зависят от x, y, l_1. Используя ограничения (2.4)–(2.6), покажем, что эти веса удовлетворяют требованиям теоремы 1.1. Действительно, невырожденность U_1, U_2 уже была отмечена. Далее, необходимо оценить

$$\left\| U_2^{-1}(x,y,l_1) \frac{\partial}{\partial l_1} U_2(x,y,l_1) \right\|.$$

(Заметим, что соответствующее выражение для веса U_1^{-1} имеет вид

$$\left\|\frac{\partial}{\partial l_1}\big(U_1^{-1}(x,y,l_1)\big)U_1(x,y,l_1)\right\| = \left\|U_1^{-1}(x,y,l_1)\frac{\partial}{\partial l_1}U_1(x,y,l_1)\right\|,$$

поэтому отдельно его оценивать не надо.)

Поскольку нам предстоит сравнивать норму с величиной θ_l, удобно рассмотреть U как функцию x, y, θ. Далее нас будет интересовать производная U_θ (так как для выполнения неравенства из условий теоремы 1.1 достаточно показать, что $\|U^{-1}U_\theta\| < \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$). Поэтому фиксируем $(x_0, y_0) \in D$ и рассмотрим кривые семейства, проходящие через нее. Напомним, что они имеют параметризацию

$$x = \varphi(x_0, y_0, s, \theta), \quad y = \psi(x_0, y_0, s, \theta).$$

Тогда $U(x_0, y_0, \theta)$ получается решением уравнения (2.2) вдоль этих кривых. А именно, $U(x_0, y_0, \theta) = V(\theta, 0)$, где

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}V(\theta,s) = A(\varphi(x_0,y_0,s,\theta), \psi(x_0,y_0,s,\theta))V(\theta,s), \\ V(\theta, -S^-(x_0,y_0,\theta)) = E. \end{cases} \tag{2.11}$$

Для оценки выражения $\|V^{-1}(\theta,0)V_\theta(\theta,0)\|$ напишем уравнение вариаций для системы (2.11):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}V_\theta(\theta,s) = A(\varphi,\psi)V_\theta(\theta,s) + (\varphi_\theta A_x(\varphi,\psi) + \psi_\theta A_y(\varphi,\psi))V(\theta,s), \\ V_\theta(\theta, -S^-(x_0,y_0,\theta)) = S^-_\theta(x_0,y_0,\theta)A(\xi(l_1),\eta(l_1)), \end{cases} \tag{2.12}$$

где $(\xi(l_1), \eta(l_1)) = (\varphi(x_0, y_0, -S^-(x_0,y_0,\theta),\theta),\ \psi(x_0,y_0,-S^-(x_0,y_0,\theta),\theta))$ — соответствующая точка пересечения кривой семейства с границей Г. Тогда находим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left[V^{-1}(\theta,s)V_\theta(\theta,s)\right] = V^{-1}(\theta,s)(\varphi_\theta A_x(\varphi,\psi) + \psi_\theta A_y(\varphi,\psi))V(\theta,s), \\ V^{-1}(\theta,-S^-(x_0,y_0,\theta))V_\theta(\theta,-S^-(x_0,y_0,\theta)) = S^-_\theta(x_0,y_0,\theta)A(\xi(l_1),\eta(l_1)). \end{cases} \tag{2.13}$$

Тем самым

$$\begin{aligned} V^{-1}(\theta,0)V_\theta(\theta,0) &= S^-_\theta(x_0,y_0,\theta)A(\xi(l_1),\eta(l_1)) \\ &+ \int\limits_{-S^-(x_0,y_0,\theta)}^{0} V^{-1}(\theta,s)(\varphi_\theta A_x(\varphi,\psi) + \psi_\theta A_y(\varphi,\psi))V(\theta,s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Для оценки $\|V(\theta,s)\|_\infty$ необходимо установить следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть матричнозначные функции $V(s)$ и $A(s)$ удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{d}{ds}V(s) = A(s)V(s), \quad V(s_0) = E.$$

Тогда

$$\|V(s)\|_\infty \le \exp\left(\int\limits_{s_0}^{s}\|A(\rho)\|_\infty d\rho\right).$$

Доказательство. Имеем

$$V(s) = E + \int\limits_{s_0}^{s} A(\rho)V(\rho)d\rho.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|V(s)\|_\infty \le 1 + \int\limits_{s_0}^{s} \|A(\rho)\|_\infty \|V(\rho)\|_\infty d\rho$$

в силу субмультипликативности $\|\cdot\|_\infty$, являющейся операторной нормой. Используя эту же оценку для $\|V(\rho)\|_\infty$, находим

$$\|V(s)\|_\infty \le 1 + \int\limits_{s_0}^{s} \|A(\rho)\|_\infty d\rho + \int\limits_{s_0}^{s} \|A(\rho)\|_\infty \int\limits_{s_0}^{\rho} \|A(\rho_1)\|_\infty \|V(\rho_1)\|_\infty d\rho_1 d\rho. \quad (2.15)$$

Повторяя этот прием, получаем ряд Неймана для экспоненты, а именно

$$\|V(s)\|_\infty \le 1 + \int\limits_{s_0}^{s} \|A(\rho)\|_\infty d\rho + \int\limits_{s_0}^{s} \|A(\rho)\|_\infty \int\limits_{s_0}^{\rho} \|A(\rho_1)\|_\infty \, d\rho_1 d\rho + \ldots$$
$$= \exp\left(\int\limits_{s_0}^{s} \|A(\rho)\|_\infty \, d\rho \right). \quad (2.16)$$

Лемма доказана.

Заметим, что для $\|V^{-1}(s)\|_\infty$ справедлива аналогичная лемма с той же оценкой. Далее, применяя покомпонентно неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$\|\varphi_\theta A_x(\varphi,\psi) + \psi_\theta A_y(\varphi,\psi)\|_\infty \le \sqrt{\varphi_\theta^2 + \psi_\theta^2} \cdot \ \||\nabla|A(\varphi,\psi)\|_\infty \le C_1 \ \||\nabla|A(\varphi,\psi)\|_\infty. \quad (2.17)$$

В итоге в (2.14), используя (2.3), (2.17) и лемму 2.1, получаем

$$\|V^{-1}(\theta,0)V_\theta(\theta,0)\|_\infty \le C_0\|A(\xi(l_1),\eta(l_1))\|_\infty$$
$$+ \exp\left(2 \int\limits_{-S(x_0,y_0,\theta)}^{0} \|A(\varphi,\psi)\|_\infty \, ds \right) \int\limits_{-S(x_0,y_0,\theta)}^{0} C_1 \| \, |\nabla|A(\varphi,\psi)\|_\infty \, ds$$
$$\le C_0\|A(\xi(l_1),\eta(l_1))\|_\infty + \exp\left(2 \int\limits_{K(l_1,l_2)} \|A(x,y)\| \, ds \right) \int\limits_{K(l_1,l_2)} C_1 \| \, |\nabla|A(x,y)\|_\infty \, ds,$$

где $K(l_1,l_2)$ — соответствующая кривая семейства. Полностью аналогичным рассуждением выводим подобную оценку для $\|(V^{-1}(\theta,0)V_\theta(\theta,0))^t\|_\infty$ с заменой A на A^t, складывая которые, найдем

$$\|V^{-1}(\theta,0)V_\theta(\theta,0)\| \le C_0\|A(\xi(l_1),\eta(l_1))\| + \exp\left(2 \int\limits_{K(l_1,l_2)} \|A(x,y)\| \, ds \right)$$
$$\times \int\limits_{K(l_1,l_2)} C_1 \| \, |\nabla|A(x,y)\| \, ds \le C_0 M_1 + e^{2M_2} C_1 M_3 < \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} \quad (2.18)$$

в силу (2.7). Таким образом, к совокупности равенств (2.10), рассмотренных как уравнения интегральной геометрии с матричным весом, применима теорема 1.1, из которой получается неравенство (1.4), где коэффициент $\widetilde{C}$, вообще говоря, зависит от матричных весов U_1^{-1} и U_2 и тем самым от матриц A_1 и A_2. Покажем, что если выбирать A_1, A_2 из множества M, то коэффициент $\widetilde{C}$ можно выбрать универсально.

В самом деле, если обратиться к доказательству теоремы 1.1, то видно, что $\widetilde{C}$ получается из постоянной $\overline{C}$ следующим образом: $\widetilde{C} = -(\pi\overline{C})^{-1}$.

Теперь необходима оценка величины $\overline{C}$ из неравенства

$$\operatorname{tr}[(PXQ)^t PXQ] \geq \overline{C} \sum_{ij} x_{ij}^2. \tag{2.19}$$

Для произвольной матрицы X размера $n \times n$ введем следующую норму: $|X|^2 = \sum\limits_{ij} x_{ij}^2$.

Лемма 2.2. *Введенная норма субмультипликативна:* $|X \cdot Y| \leq |X| \cdot |Y|$ *для любых* $n \times n$ *матриц* X *и* Y.

Доказательство. Имеем

$$|X \cdot Y|^2 = \sum_{ij} \Big(\sum_k x_{ik} y_{kj} \Big)^2 \leq \sum_{ij} \Big(\sum_k x_{ik}^2 \Big) \Big(\sum_l y_{lj}^2 \Big)$$
$$= \sum_{ijkl} x_{ik}^2 y_{lj}^2 = \sum_{ik} x_{ik}^2 \cdot \sum_{lj} y_{lj}^2 = |X|^2 \cdot |Y|^2.$$

Лемма доказана.

Обозначим $Y = PXQ$. Тогда $X = P^{-1} Y Q^{-1}$ и в силу леммы 2.2

$$|X| \leq |P^{-1}| \cdot |Q^{-1}| \cdot |Y|. \tag{2.20}$$

Таким образом, для того чтобы показать, что постоянную $\overline{C}$ можно выбрать универсально для всех A_1, A_2 из рассматриваемого класса M, достаточно найти универсальные оценки сверху для $|P^{-1}|$ и $|Q^{-1}|$. Рассмотрим сначала первую из этих величин. Напишем для $P^{-1} = U_1$ уравнение (2.2) вдоль кривой $K(l_1, l_2)$ и применим для оценки $|U_1|$ метод леммы 2.1 (используя свойство субмультипликативности). Учитывая нормировку $|E| = \sqrt{n}$, имеем

$$|U_1(t)| \leq \sqrt{n} \exp\left(\int_0^t |A_1(x(\tau), y(\tau))|\, d\tau \right) \leq \sqrt{n} \exp\Big(\int_{K(l_1,l_2)} |A_1(x,y)|\, ds \Big). \tag{2.21}$$

В силу очевидных оценок

$$\sum_{ij} a_{ij}^2 \leq n \Big(\max_i \sum_j |a_{ij}| \Big)^2 = n\|A\|_\infty^2, \quad \sum_{ij} a_{ij}^2 \leq n \Big(\max_j \sum_i |a_{ij}| \Big)^2 = n\|A^t\|_\infty^2$$

получим $|A| \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}\|A\|$ для любой матрицы A размера $n \times n$.

Продолжая (2.21) и используя условие (2.5), приходим к оценке

$$|U_1(t)| \leq \sqrt{n} \exp\Big(\int_{K(l_1,l_2)} |A_1(x,y)|\, ds \Big) \leq \sqrt{n} \exp\Big(\frac{1}{2}\sqrt{n} M_2 \Big). \tag{2.22}$$

Заметим, что для $Q^{-1} = U_2^{-1}$ выполнено следующее уравнение вдоль кривой $K(l_1, l_2)$:

$$\frac{d}{dt}U_2^{-1} = -U_2^{-1}A_2(x(t), y(t)), \quad U_2^{-1}(0) = E,$$

и поэтому, рассуждая полностью аналогично, получим

$$\left|U_2^{-1}\right| \le \sqrt{n}\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{n}M_2\right). \tag{2.23}$$

В силу неравенства (2.20) и оценок (2.22), (2.23) находим, что в качестве $\overline{C}$ можно взять величину $\frac{1}{n^2}\exp(-2\sqrt{n}M_2)$, универсальную в классе M. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вертгейм Л. Б.* Интегральная геометрия с матричным весом и одна нелинейная задача восстановления матриц // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 3. С. 531–534.
2. *Мухометов Р. Г.* Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 32–35.
3. *Мухометов Р. Г.* О задаче интегральной геометрии // Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1975. Вып. 6, ч. 2. С. 212–242.
4. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
5. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 25 ноября 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
vert@math.nsc.ru