Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 512.554.5

О ШПЕХТОВОСТИ МНОГООБРАЗИЙ КОММУТАТИВНЫХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 3 И КОММУТАТИВНЫХ ЛУП МУФАНГ

А. В. Бадеев

Аннотация: Многообразие алгебр называется *шпехтовым*, если каждое его подмногообразие конечно базируемо. Указаны шпехтовы и нешпехтовы многообразия коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3. Построена бесконечная независимая система тождеств коммутативных луп Муфанг. Для получения результата о коммутативных лупах Муфанг используется их связь с коммутативными альтернативными алгебрами. Библиогр. 13.

Введение

Многообразие алгебр называется *шпехтовым*, если каждое его подмногообразие конечно базируемо. Проблема шпехтовости многообразия разрешимых альтернативных алгебр сформулирована А. М. Слинько в «Днестровской тетради» [1, вопрос 129]. Эта проблема получила положительное решение в случае поля характеристики, не равной 2, 3. Для разрешимых индекса 2 алгебр это следует из результатов работы Ю. А. Медведева [2]. Кроме того, им [3] указано многообразие разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики 2, не имеющее конечного базиса тождеств. Далее, пусть N_k и A соответственно многообразия альтернативных алгебр класса нильпотентности не выше k и алгебр с нулевым умножением. С. В. Пчелинцев [4] доказал, что всякая разрешимая альтернативная алгебра A над полем характеристики, не равной 2, 3, принадлежит многообразию $N_kA \cap N_3N_m$, т. е.

$$(A^2)^k = (A^m)^3 = 0$$

для подходящих k, m. Затем У. У. Умирбаевым [5] показана шпехтовость этого многообразия, что является аналогом результатов Брайнта, Воон-Ли [6], Г. В. Шеиной [7] для алгебр Ли. Недавно С. В. Пчелинцевым построен пример бесконечной системы тождеств, неприводимой в многообразии центрально-метабелевых (некоммутативных) альтернативных алгебр над полем характеристики 3. В настоящей работе изучаются многообразия коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3. В § 1 получен следующий результат.

Теорема 1. *Многообразие $N_kA \cap N_3N_m$ коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 шпехтово.*

В частности, при $k = 3$, $m = 2$ шпехтовым является многообразие алгебр с тождеством

$$[(x_1x_2)(x_3x_4)](x_5x_6) = 0.$$

Во § 2, 3 строятся бесконечные независимые системы тождеств коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 и коммутативных луп Муфанг (КЛМ). Другой пример бесконечной независимой системы тождеств КЛМ построен Н. И. Санду в работе [8]. Приведенная в настоящей работе система тождеств более проста, а идея ее построения заключается в использовании связи КЛМ с коммутативными альтернативными алгебрами. Результаты сформулированы в следующих теоремах. Обозначим через $R(x)$ оператор умножения справа на элемент x.

Теорема 2. *Пусть M — многообразие коммутативных альтернативных алгебр над полем Φ характеристики 3 с тождествами*

$$x^3 = 0, \quad [(x_1x_2 \cdot x_3x_4)(x_5x_6)]x_7 = 0.$$

Система одночленов

$$f_{18n+3} := (xx_1 \dots x_{6n-2} \cdot xy_1 \dots y_{6n-2}) \cdot xz_1 \dots z_{6n+3}x$$

неприводима в многообразии M.

В многообразии КЛМ определим индуктивно ассоциатор

$$[x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}] = [[x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}], x_{2n}, x_{2n+1}].$$

Теорема 3. *В многообразии* КЛМ *с тождеством $x^3 = 1$ система тождеств*

$$h_{18n+3} := [[x, x_1, \dots, x_{6n+2}], [x, y_1, \dots, y_{6n-2}], [x, z_1, \dots, z_{6n-1}, x]]$$

является неприводимой.

Всюду далее Φ — поле характеристики 3. Под словом алгебра будем подразумевать коммутативную альтернативную алгебру над Φ. Линеаризуя тождество правой альтернативности

$$(x, y, y) = 0,$$

учитывая, что $\operatorname{char} \Phi = 3$, и коммутативность, получим эквивалентное условию альтернативности соотношение

$$J(x, y, z) := (x \cdot y) \cdot z + (x \cdot z) \cdot y + x \cdot (y \cdot z) = 0.$$

При нумерации формул первая позиция указывает параграф, а вторая — номер формулы в этом параграфе. При ссылке на формулу в пределах параграфа условимся указывать только номер формулы, т. е. при ссылке на формулу (1.1) будем в пределах первого параграфа отмечать ее как формулу (1).

§ 1. Шпехтовость многообразия $N_kA \cap N_3N_m$

Некоторые эндоморфизмы разрешимой индекса 2 алгебры. Изучим сначала некоторые эндоморфизмы метабелевой (по-другому, разрешимой индекса 2) алгебры. Рассмотрим свободную разрешимую индекса 2 алгебру F над полем Φ от множества свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Алгебра F удовлетворяет тождеству

$$(xy) \cdot (zt) = 0.$$

Специализация $x \to uv$ приводит линеаризованное тождество альтернативности $J(x, y, z) = 0$ к соотношению

$$uvyz = -uvzy.$$

Имеем также в силу линеаризованного тождества альтернативности

$$(x_i x_j)x_1 = -(x_i x_1)x_j - (x_j x_1)x_i.$$

Применяя теперь два последних соотношения, можно заметить, что всякий элемент из F^2 представляется как линейная комбинация элементов вида

$$x_j x_{i_1} \dots x_{i_t}, \quad \text{где } j \geq i_1, \quad i_1 \leq i_2 < \dots < i_t, \quad t \geq 1. \tag{1.1}$$

Далее, для конечного подмножества $\alpha = \{i_1 < i_2 < \dots < i_n\}$ множества натуральных чисел N пусть $R_\alpha = R(x_{i_1})R(x_{i_2})\dots R(x_{i_n})$ — операторное слово длины n, где $R(x)$ — оператор умножения справа на элемент x.

Пусть $\theta = \{t_1 < t_2 < t_3 < t_4\} \subseteq N$. Тогда эндоморфизм $\varphi = \varphi_\theta$ определим на порождающих формулой

$$\varphi_\theta : x_i \to x_i + x_i R_\theta$$

для всех $i \in N$. Покажем, что если u — слово вида (1), то $u\varphi = u + uR_\theta$. Выполняя преобразования с помощью указанных выше соотношений, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}(x_i x_j)\varphi - x_i x_j &= (x_j R_\theta)x_i + (x_i R_\theta)x_j \\ &= \{-(x_j x_{t_1})x_i - (x_i x_{t_1})x_j\}x_{t_2}x_{t_3}x_{t_4} = (x_i x_j)R_\theta.\end{aligned}$$

Отсюда

$$u\varphi = u + (x_j x_{i_1})R_\theta x_{i_2} \dots x_{i_2} = u + uR_\theta.$$

Доказательство теоремы. Пусть F — свободная алгебра многообразия $N_{k+1}A \cap N_3 N_m$ от множества порождающих X. Пусть S — множество всех неассоциативных слов $s = s(s_1, s_2, \dots, s_k)$, полученных всевозможными расстановками скобок от ассоциативного слова $s_1 s_2 \dots s_k$. Через ΦR обозначим линейное пространство над полем Φ, порожденное множеством $R \subseteq F$. Для $s \in S$, $n_1, n_2, \dots, n_k \in N$, где $n_i \geq 2$, положим, что

$$F^s(n_1, n_2, \dots, n_k) = \Phi\{s(u_1, u_2, \dots, u_k)/u_i \in A^{n_i}\}.$$

Далее, зафиксируем s и условимся опускать индекс s в записи $F^s(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Для $p, q \in N$, $1 \leq p < q \leq k$, положим, что

$$Q_{p,q} = Q_{p,q}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \sum_{i \neq p,q} F(n_1, n_2, \dots, n_{i+1}, \dots, n_k),$$
$$R_{p,q} = R_{p,q}(n_1, n_2, \dots, n_k) = F(n_1, n_2, \dots, n_k)/Q_{p,q}.$$

Сформулируем теперь леммы 3 и 4 из работы [5] применительно к нашему случаю.

Лемма 1.1. *$R_{p,q}(n_1, n_2, \dots, n_k)$ как линейное пространство над полем Φ порождается элементами вида*

$$s(u_1, \dots, u_p, \dots, u_q R_\alpha, \dots, u_k)R_\beta, \tag{1.2}$$

где u_i — слова вида (1), $d(u_i) = n_i$ при $i \neq p$; $d(u_i) = n_i$, n_{i+1} при $i = p$;

$$\alpha = \{j_1 < j_2 < \dots < j_r\}, \quad \beta = \{k_1 < k_2 < \dots < k_l\}.$$

Доказательство. Пусть $a \in (F^2)^t$, $b \in (F^2)^m$ и $t, m \geq 1$. В любой правоальтернативной алгебре выполняется тождество [9]

$$(x\omega, y, z) = (x, y, z)\omega + x(\omega, y, z) - (x, \omega, [y, z]).$$

Отсюда получаем, что

$$abyz \equiv (ayz)b + a(byz)(\mathrm{mod}(F^2)^{t+m+1}).$$

Используя это сравнение как свойство дифференцирования, имеем

$$s(u_1, \dots, u_p xy, \dots, u_q, \dots, uk) + s(u_1, \dots, u_p, \dots, u_q xy, \dots, u_k) \\ \equiv s(u_1, \dots, u_p, \dots, u_q, \dots, u_k)xy(\mathrm{mod}\, Q_{p,q}), \quad (1.3)$$

где $d(u_i) \geq 2$. В алгебре F выполняется также тождество

$$s(u_1, u_2, \dots, u_k)xy = -s(u_1, u_2, \dots, u_k)yx. \quad (1.4)$$

Теперь, рассматривая слова вида $s(u_1, u_2, \dots, u_k)$, где $d(u_i) \geq 2$, можно считать, что u_i являются словами вида (1), так как элементы u_i представляются как линейная комбинация элементов вида (1) по модулю $(A^2)^2$. Далее, можно считать, что подслово u_p имеет вид $u'_p x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_t}$, где u'_p — слово вида (1) длины n_p или n_{p+1}, t — четное число. С помощью (3) переносим x_{k_i}, где $1 \leq i \leq t$, на другие множители и, учитывая (4), получаем элементы вида (2). Лемма доказана.

Следующее понятие веса определим так же, как в работе [5]. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k$, где $n_i \geq 2$ фиксированы, u — слово вида (2). Тогда положим

$$\sigma(u) = (\delta(u_1), \delta(u_2), \dots, \delta(u_k)) \in (N')^{n+k},$$

где N' — множество натуральных чисел с нулем, $\delta(u_r)$ — кортеж длины $n_r + 1$, определенный следующим образом:

$$\delta(u_r) = (j, i_1, \dots, i_{n_r - 1}, i_{n_r + 1}).$$

В определении $\delta(u_r)$ если $d(u_r) = n_r$, то полагаем $i_{n_r+1} = 0$.

Если $\alpha \subseteq N$ — конечное подмножество натуральных чисел, то

$$\bar{\alpha} = (\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n), \dots),$$

где $\alpha(t) = 1$ при $t \in \alpha$, $\alpha(t) = 0$ при $t \notin \alpha$. Для слова u вида (2) положим

$$\pi(u) = (\sigma(u), \overline{\alpha(u)}, \overline{\beta(u)}),$$

где $\alpha(u) = \{j_1 < j_2 < \dots < j_r\}$, $\beta(u) = \{k_1 < k_2 < \dots < k_l\}$. Назовем $\pi(u)$ *весом* элемента u.

Пусть P — множество весов всех слов вида (2). Множество P вполне упорядочено относительно лексикографического порядка $\leq$.

Замечание. Если $\pi \in P$, то слово u вида (2), для которого $\pi(u) = \pi$, определяется однозначно.

Для $\pi = (\sigma, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\pi' = (\sigma', \bar{\alpha'}, \bar{\beta'}) \in P$ положим $\pi \ll \pi'$, если существует $\gamma : N' \to N'$, $\gamma(0) = 0$, — инъективное отображение, сохраняющее обычный порядок на N', такое, что

$$\gamma(\sigma) = \sigma', \quad \gamma(\alpha) \subseteq \alpha', \quad |\alpha'| - |\alpha| = 4t, \quad t \in N', \quad \gamma(\beta) \subseteq \beta'.$$

Множество P частично вполне упорядочено относительно $\ll$ [10]. Запишем элемент $h \in R_{p,q}$ в виде

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n,$$

где g_i — элементы вида (2). Можно считать, что $\pi(g_1) > \pi(g_2) > \dots > (g_n)$, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\bar{h} = g_1$ назовем *старшим членом* h. Справедлива следующая

Лемма 1.2. *Пусть h — элемент $R_{p,q}$ и $\pi(\bar{h}) \ll \pi'$, где $\pi' \in P$. Тогда существует $h' \in T(h)$ такой, что $\pi(\overline{h'}) = \pi'$.*

Доказательство. Пусть $\pi(\bar{h}) = (\sigma, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\pi' = (\sigma', \bar{\alpha'}, \bar{\beta'})$. Достаточно найти такой элемент $h' \in T(h)$, что $\pi(\overline{h'}) = \pi'' = (\sigma, \overline{\alpha \cup \theta}, \bar{\beta})$, где $\theta = \{t_1 < t_2 < t_3 < t_4\} \subseteq \alpha' \setminus \alpha$ (см. [5, лемма 4]).

Пусть $\bar{h} = g_1 = s(u_1, \dots, u_p, \dots, u_q R_\alpha, \dots, u_k) R_\beta$, $\varphi = \varphi_\theta$. В силу (3)

$$\begin{aligned} g_1\varphi - g_1 = s(u_1, \dots, u_p R_\theta, \dots, u_q R_\alpha, \dots, u_k) R_\beta \\ + s(u_1, \dots, u_p, \dots, u_q R_\alpha R_\theta, \dots, u_k) R_\beta + s(u_1, \dots, u_p R_\theta, \dots, u_q R_\alpha R_\theta, \dots, u_k) R_\beta \\ = 2s(u_1, \dots, u_p, \dots, u_q R_\alpha R_\theta, \dots, u_k) R_\beta \\ + s(u_1, \dots, u_p, \dots, u_q R_\alpha R_\theta, \dots, u_k) R_\beta R_\theta + g, \end{aligned}$$

где $\pi(\bar{q}) < \pi''$. Положим $g_i\psi - g_i = g_i\varphi - g_i + (g_i\varphi - g_i)R_\theta$. Тогда

$$g_1\psi = 2s(u_1, \dots, u_p, \dots, u_q R_\alpha R_\theta, \dots, u_k) R_\beta + g + gR_\theta.$$

Отсюда $\pi(\overline{g_1\psi}) = \pi''$. Аналогично доказывается, что при $i \neq 1$

$$\pi(\overline{g_i\psi}) = (\sigma(g_i), \overline{\alpha(g_i) \cup \theta}, \overline{\beta(g_i)}).$$

Таким образом, для элемента $h = (h\varphi - h) + (h\varphi - h)R_\theta$ выполняется

$$\pi(\bar{h}') = \pi(\overline{g_1\psi}) = \pi''.$$

Лемма доказана.

С помощью леммы 2 стандартным способом доказывается

Лемма 1.3. *Для T-идеалов, лежащих в $R_{p,q}$, выполняется условие максимальности.*

Теперь доказательство основной теоремы этого параграфа проводится так же, как в [7].

Теорема 1.1. *Многообразие $N_k A \cap N_3 N_m$ коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 шпехтово.*

§ 2. Бесконечная независимая система тождеств коммутативных альтернативных алгебр

Вспомогательная супералгебра. Пусть M — многообразие коммутативных альтернативных алгебр над полем Φ характеристики 3 с тождествами

$$x^3 = 0, \quad [(x_1x_2 \cdot x_3x_4)(x_5x_6)]x_7 = 0.$$

Построим вспомогательную конечномерную M-супералгебру $A = A_0 + A_1$. Разнообразные возможности применения супералгебр для построения контрпримеров продемонстрированы И. П. Шестаковым [11]. Рассмотрим сначала элементы вида $(i)_e$, $(i,j)_e$, где $i, j \in Z_{36}$. Положим, что супералгебра A имеет следующие базисные элементы (обозначим эту систему символом E):

$$h, w, (i)_e, \quad \text{где } i \in \{0, 1, \dots, 17\};$$

$$(i + 6s, j)_e, \quad \text{где } i, j \in \{0, 1, \dots, 5\},\ s \in \{0, 1, 2\},\ i \geq j \ (\text{кроме } i = j \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)).$$

Пусть в A выполнены соотношения

e1) $(i+18)_e = -(i)_e$, $(i+18, j)_e = (i, j+18)_e = -(i,j)_e$,

e2) $(i,j)_e = 0$, если $i = j \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$,

e3) $(i,j)_e = (-1)^{ij}(j,i)_e$,

e4) $(i+6, j)_e = (i, j+6)_e$.

Назовем *четными* базисный элемент w, базисные элементы вида $(i)_e$, где $i \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$, и базисные элементы вида $(i,j)_e$, где $i+j \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$. *Нечетными* назовем остальные элементы, т. е. базисный элемент h, базисные элементы вида $(i)_e$, где $i \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$, а также базисные элементы вида $(i,j)_e$, где $i+j \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$. Символом $|x|$ будем обозначать индекс четности элемента x алгебры A.

Умножение в супералгебре A определяется правилами умножения базисных элементов в системе E следующим образом:

1) умножение суперкоммутативно, т. е. для любых базисных элементов $x, y \in E$

$$x \cdot y = (-1)^{|x|\,|y|} y \cdot x,$$

2) $h \cdot h = 0$,

3) $(i)_e \cdot h = (i+1)_e$,

4) $(i)_e \cdot (j)_e = (i,j)_e$ суперкоммутативно ввиду e3,

5) $(i,j)_e \cdot h = (-1)^{j+1}(i+1, j)_e - (i, j+1)_e$,

6) $(4+12, 2)_e \cdot (0)_e = w$,

$(i,j)_e \cdot (0)_e = 0$ для остальных базисных элементов.

Следующее произведение определено индуктивно:

7) $(i,j)_e \cdot (k)_e = (-1)^k (i,j)_e R(h) \cdot (k-1)_e$.

Остальные произведения, не определенные в пп. 1–7, считаем нулевыми. Таким образом,

8) $(i,j)_e \cdot (k,l)_e = 0$,

9) $w \in \mathrm{Ann}\, A$.

Из правил умножения следует, что

$$A \setminus A^2 = \Phi\{h\}, \quad A^2 \setminus A^{(2)} = \Phi\{(i)_e \in E\},$$
$$A^{(2)} \setminus (A^2)^3 = \Phi\{(i,j)_e \in E\}, \quad (A^2)^3 = \Phi\{w\}, \quad A^{(2)} = 0, \quad (A^2)^3 \cdot A = 0.$$

Легко проверить, что алгебра A порождается нечетным элементом h и четным элементом $(0)_e$. Определим понятие степени $d(x)$ произвольного базисного элемента x относительно h как число из Z_{18} следующим образом:

$$d(h) = 1, \quad d((i)_e) = i, d((i,j)_e) = i+j, d(w) = 0.$$

Тогда в A можно ввести понятие однородности элементов по степени d.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Супералгебра A альтернативна.*

Доказательство. Покажем, что в A на однородных элементах выполнено соотношение

$$J_s(x,y,z) := (x \cdot y) \cdot z + (-1)^{|y|\,|z|}(x \cdot z) \cdot y + x \cdot (y \cdot z) = 0.$$

Заметим, что если для однородных элементов $x \cdot z \neq 0$, то $|x \cdot z| = |x| + |z|$. Нетрудно тогда проверить, что в силу суперкоммутативности выполняются соотношения

$$J_s(x,y,z) = (-1)^{|x|\,|y|} J_s(y,x,z), \quad J_s(x,y,z) = (-1)^{|y|\,|z|} J_s(x,z,y). \tag{2.1}$$

Отсюда

$$J_s(x,y,z) = \pm J_s(\sigma(x),\sigma(y),\sigma(z)),$$

где σ — перестановка элементов $\{x,y,z\}$. Таким образом, достаточно проверить соотношение на упорядоченных тройках базисных элементов. Рассмотрим последовательно все возможные случаи.

(а) Имеем $J_s(x,y,y) = -J_s(x,y,y) = 0$, если $|y| = 1$, в силу (1). В частности, $J_s(x,h,h) = 0$ для произвольного базисного элемента x.

(б) $J_s((i,j)_e,(k)_e,(l)_e), J_s((i,j)_e,(k,l)_e,x) \in (A^2)^4 + A^{(2)} \cdot A^{(2)} = 0$ для базисных элементов.

Остается рассмотреть следующие тройки:

$$\{(i)_e,(j)_e,h\}, \quad \{(i,j)_e,(k)_e,h\}, \quad \{(i)_e,(j)_e,(k)_e\}.$$

(в) Покажем, что $J_s((i)_e,(j)_e,h) = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} J_s((i)_e,(j)_e,h) &= [(i)_e \cdot (j)_e] \cdot h + (-1)^j (i)_e R(h) \cdot (j)_e + (i)_e \cdot (j)_e R(h) \\ &= (i,j)_e \cdot h + (-1)^j (i+1,j)_e + (i,j+1)_e. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Отсюда ввиду e4

$$J_s((i)_e,(j+6)_e,h) = J_s((i+6)_e,(j)_e,h). \tag{2.3}$$

Таким образом, можно считать, что в соотношении (2) $j < 6$, а элемент $(i,j)_e$ либо базисный, либо нулевой. Если $(i,j)_e$ базисный, то требуемое соотношение выполнено ввиду п. 5, если нулевой, то $i = j + 6s$ ввиду e2, где $j \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$. Но тогда в силу (3), (1)

$$J_s((j+6s)_e,(j)_e,h) = J_s((j)_e,(j+6s)_e,h) = -J_s((j+6s)_e,(j)_e,h) = 0.$$

Соотношение (в) доказано. Установим следующие соотношения, которые далее нам понадобятся:

r1) $(i,j)_e R^2(h) = (i+2,j)_e + (i,j+2)_e$,

r2) $(i,j)_e R^4(h) = (i+4,j)_e + (i,j+4)_e - (i+2,j+2)_e$,

r3) $(i,j)_e R^6(h) = -(i+6,j)_e$,

r4) $(i,j)_e \cdot (k)_e = (-1)^{\delta(k)} (i,j)_e R^k(h) \cdot (0)_e$, где $\delta(k)$ равно 0, если $k \equiv 0; 3 (\operatorname{mod} 4)$, и 1, если $k \equiv 1; 2 (\operatorname{mod} 4)$.

Доказательство r1–r4. r1. Ввиду (в) имеем

$$\begin{aligned} (i,j)_e R^2(h) &= [(i)_e \cdot (j)_e] R^2(h) = -[(-1)^j (i+1,j)_e + (i,j+1)_e] \cdot h \\ &= (i+2,j)_e + (-1)^j (i+1,j+1)_e + (-1)^{j+1} (i+1,j+1)_e + (i,j+2)_e \\ &= (i+2,j)_e + (i,j+2)_e. \end{aligned}$$

r2. В силу r1

$$(i,j)_e R^4(h) = [(i+2,j)_e + (i,j+2)_e] R^2(h) = (i+4,j)_e + (i,j+4)_e - (i+2,j+2)_e.$$

r3. В силу r2, r1, e4

$$\begin{aligned} (i,j)_e R^6(h) &= [(i+4,j)_e + (i,j+4)_e - (i+2,j+2)_e] R^2(h) \\ &= (i+6,j)_e + (i+4,j+2)_e + (i+2,j+4)_e + (i,j+6)_e \\ &\quad - (i+4,j+2)_e - (i+2,j+4)_e = -(i+6,j)_e. \end{aligned}$$

r4. Легко получить из п. 7.

Свойства r1–r4 доказаны.

(г) $J_s((i,j)_e,(k)_e,h)=0$.

Первый член многочлена $J_s((i,j)_e,(k)_e,h)$ нулевой, так как $(i,j)_e\cdot(k)_e\in A^{(2)}A^2\in \operatorname{Ann}A$. Тогда

$$J_s((i,j)_e,(k)_e,h)=(i,j)_e\cdot(k+1)_e+(-1)^k(i,j)_eR(h)(k)_e.$$

Если $k+1>0$, то требуемое соотношение выполнено ввиду п. 7. Если $k+1=0$, то $k=35$. В этом случае в силу r4, r3 имеем

$$(i,j)_eR(h)\cdot(35)_e=(i,j)_eR^{36}(h)\cdot(0)_e=(i+36,j)_e\cdot(0)_e=(i,j)_e\cdot(0)_e.$$

Таким образом, $J_s=(i,j)_e\cdot(0)_e-(i,j)_eR(h)\cdot(35)_e=0$. Теперь можем обосновать следующие четыре соотношения:

r5) $(i,j)_e\cdot(k+2)_e=[-(i+2,j)_e-(i,j+2)_e]\cdot(k)_e$,

r6) $(i,j)_e\cdot(k+4)_e=[(i+4,j)_e+(i,j+4)_e-(i+2,j+2)_e]\cdot(k)_e$,

r7) $(i,j)_e\cdot(k+6)_e=(i+6,j)_e\cdot(k)_e$,

r8) $J_s((i)_e,(j)_e,(k+2)_e)=-J_s((i+2)_e,(j)_e,(k)_e)-J_s((i)_e,(j+2)_e,(k)_e)$.

Равенства r5–r7 легко получить из п.7 и r1–r4. Равенство r8 справедливо ввиду r5.

(д) Если $J_s(x,y,z)\in\Phi w, d(x)+d(y)+d(z)\neq 18$, то $J_s(x,y,z)=0$ (ввиду того, что $d(w)=18$).

(е) $J_s((i+6s)_e,(j+6t)_e,(0)_e)=0$, где $i+j\equiv 0(\operatorname{mod}6)$. Нетрудно заметить, что в силу e4 и r7

$$J_s((i)_e,(j+6)_e,(0)_e)=J_s((i+6)_e,(j)_e,(0)_e). \tag{2.4}$$

Кроме того,

$$J_s((i+6s)_e,(j+6t)_e,(0)_e)=(i+6q,j)_e\cdot(0)_e+(i+6q,0)_e\cdot(j)_e+(-1)^{ij}(j+6q,0)_e\cdot(i), \tag{2.5}$$

где $q=s+t$. Рассмотрим все возможные случаи. Проверим (е) для $i=4$, $j=2$, т. е. покажем, что $J_s((4+6s)_e,(2+6t)_e,(0)_e)=0$. Для этого вычислим выражение (5). В силу r5, r6

$$(4+6q,0)_e\cdot(2)_e=[-(6+6q,0)_e-(4+6q,2)_e]\cdot(0)_e=-(4+6q,2)_e\cdot(0)_e,$$

$$(2+6q,0)_e\cdot(4)_e=[(6+6q,0)_e+(2+6q,4)_e-(4+6q,2)_e]\cdot(0)_e=0.$$

Сложив значения слагаемых из (5), получим требуемое. Далее, для $i=j=3$ в силу (4), (1)

$$\begin{aligned}J_s((3+6s)_e,(3+6t)_e,(0)_e)&=J_s((3+6t)_e,(3+6s)_e,(0)_e)\\&=-J_s((3+6s)_e,(3+6t)e,(0)_e)=0.\end{aligned}$$

Остается показать для $i=5$, $j=1$, т. е. что $J_s((5+6s)_e,(1+6t)_e,(0)_e)=0$. Вычислим (5):

$$(5+6q,1)_e\cdot(0)_e=0,$$

$$(5+6q,0)_e\cdot(1)_e=-(5+6q,0)_eR(h)\cdot(0)_e=[(6+6q,0)_e+(5+6q,1)_e]\cdot 0)_e=0,$$

$$\begin{aligned}(1+6q,0)_e\cdot(5)_e&=-(1+6q,0)_eR(h)\cdot(4)_e=(2+6q,0)_e\cdot(4)_e\\&=[(6+6q,0)_e+(2+6q,4)_e-(4+6q,2)_e]\cdot(0)_e=0.\end{aligned}$$

(ж) $J_s((i+6s)_e, (j+6t)_e, (k+6r)_e) = 0$, где $i+j+k \equiv 0(\bmod 6)$. Здесь можно полагать, что $k \equiv 0(\bmod 2)$. Тогда, применяя соотношение г8 достаточное число раз, придем к случаю (е). Все возможные случаи рассмотрены. Соотношение доказано. Пусть $G(A) = A_0 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1$ — грассманова оболочка супералгебры A, где $G = G_0 + G_1$ — алгебра Грассмана с единицей. Ввиду соотношения $J_s(x, y, z) = 0$ в алгебре $G(A)$ выполнено равенство

$$J(x, y, z) = 0.$$

Кроме того, $G(A)$ коммутативна ввиду суперкоммутативности A. Это равносильно альтернативности $G(A)$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *На базисных элементах супералгебры A выполнено соотношение $x^3 = 0$.*

Доказательство. Квадраты базисных элементов h, w, $(i, j)_e$ обращаются в нуль. Для базисных элементов вида $(i + 6s)_e$, где $i < 6$, имеем $(i + 6s)_e^3 = (i + 18s, i)_e \cdot (i)e = \pm(i, i)_e \cdot (i)_e \in \Phi\{w\}$. Так как $d(w) = 18$, то достаточно положить $i \equiv 0(\bmod 6)$. Тогда $i = 0$, и в этом случае $(0+6s)_e^3 = \pm(0, 0)_e \cdot (0)_e = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *В супералгебре A справедливы соотношения*

$$(u_1\xi_6 \cdot u_2) \cdot u_3 = (u_1 \cdot u_2\xi_6) \cdot u_3 = (u_1 \cdot u_2) \cdot u_3\xi_6,$$

где $u_i \in A^2$, ξ_6 — оператор умножения длины 6 вида $R(x_1) \dots R(x_6)$.

Доказательство. Достаточно показать справедливость этих соотношений на базисных элементах алгебры A. Заметим, что h — единственный базисный элемент, не принадлежащий A^2. Следовательно, если $x_i \neq h$, то требуемые одночлены принадлежат идеалу $A^{(2)} \cdot A^{(2)} + (A^2)^3 \cdot A$ и равны нулю. Таким образом, достаточно положить $\xi_6 = R^6(h)$. Легко заметить, что на элементах u_i вида $(i, j)_e, w$ соотношения тривиальны. Если же $u_1 = (i)_e$, $u_2 = (j)_e$, $u_3 = (k)_e$, то соотношения примут вид

$$[(i + 6)_e \cdot (j)_e] \cdot (k)_e = [(i)_e \cdot (j + 6)_e] \cdot (k)_e = [(i)_e \cdot (j)_e] \cdot (k + 6)_e,$$

и окажутся справедливыми ввиду е4 и г7. Лемма доказана.

Некоторые тождества M-алгебр. Пусть $F = F(M)$ — свободная алгебра многообразия M от множества свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Обозначим $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Выведем некоторые соотношения алгебры F. Для $u \in F^2$ и произвольного оператора умножения ξ ввиду альтернативности имеем

$$uzz\xi = uz^2\xi \equiv 0(\bmod F^{(2)}). \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что одночлены вида $uR(x_1) \dots R(x_n)$ кососимметричны по переменным $x_1, \dots, x_n$.

Далее, пусть $w, w_1, w_2, w_3 \in F^2$, $x, y, z \in F$. По теореме Артина

$$wy \cdot wy = w^2y^2.$$

Линеаризовав по w, получим $w_1y \cdot w_2y = (w_1 \cdot w_2) \cdot y^2$. Отсюда в силу соотношения $(F^2)^4 = 0$

$$(w_1y \cdot w_2y) \cdot w_3 = (w_1w_2 \cdot y^2) \cdot w_3 = 0. \tag{2.7}$$

Выполняя в следующем одночлене преобразования с помощью линеаризованного тождества альтернативности и учитывая (7), получим

$$\begin{aligned}(w_1y\cdot w_2)\cdot w_3y &= -((w_1y\cdot w_2)\cdot y)\cdot w_3 - ((w_1y\cdot w_2)\cdot w_3)\cdot y\\ &= -((w_1y\cdot w_2)\cdot y)\cdot w_3 = ((w_1\cdot y^2)\cdot w_2)\cdot w_3 + (w_1y\cdot w_2y)\cdot w_3 = 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Перерабатывая сомножитель $xy\xi x$ в следующем одночлене, как по модулю $F^{(2)}$, получим ввиду (8)

$$(w_1y\cdot w_2)\cdot xy\xi x = \pm(w_1y\cdot w_2)\cdot x^2\xi y = 0.\tag{2.9}$$

Всюду далее будем обозначать через $\{\xi_k, \eta_l, \theta_m, \pi_s\}$ четверку операторов умножения, определенных следующим образом:

$$\xi_k = R(x_l)\dots R(x_k),\quad \eta_l = R(x_{k+1})\dots R(x_{k+l}),$$
$$\theta_m = R(x_{k+1+l})\dots R(x_{k+l+m}),\quad \pi_s = R(x_{k+l+m+1})\dots R(x_{k+l+m+s}).$$

Лемма 2.4. *Одночлен от переменных x, x_i, где $x_i\in X_{k+l+m}$,*

$$(x\xi_k\cdot x\eta_l)\cdot x\theta_m x,\ \text{при } k,l,m>1$$

кососимметричен по переменным x_i.

Доказательство. Заметим, что в силу равенств $F^{(2)}\cdot F^{(2)}=0$, $(F^2)^4=0$ сомножители $x\xi_k$, $x\eta_l$, $x\theta_m x$ данного одночлена перерабатываются по модулю $F^{(2)}$. Отсюда требуемый одночлен кососимметричен по переменным $x_2,\dots,x_k$, входящим в состав оператора ξ_k. Далее, в силу альтернативности и формул (6), (8) для операторов умножения ξ, η, θ длины больше 1 имеем

$$(xyy\xi)\cdot x\theta x = (y^2x\xi\cdot x\eta)\cdot x\theta x = \pm(y^2\xi x\cdot x\eta)\cdot x\theta x = 0.$$

Следовательно, требуемый одночлен кососимметричен по x_1, x_2, а значит, кососимметричен и по всем $x_1,\dots,x_k$. Аналогично устанавливается кососимметричность одночлена по переменным, входящим в η_l и θ_m. Тогда с учетом соотношений (7) и (8) требуемый одночлен кососимметричен по всем своим переменным $x_i\in X_{k+l+m}$. Лемма доказана.

Заметим, что ввиду леммы 4 и соотношений (7), (8) полистепень одночлена вида $(x\xi_k\cdot x\eta_l)\cdot x\theta_m x$ максимальна для одночленов в $F(M)$.

Грассманова оболочка $G(A)$. Пусть $G(A)=A_0\otimes G_0 + A_1\otimes G_1$ — грассманова оболочка супералгебры A, где $G=G_0+G_1$ — алгебра Грассмана с единицей. Из леммы 3 следует

Лемма 2.5. *В алгебре $G(A)$ выполнены соотношения*

$$(u_1\xi_6\cdot u_2)\cdot u_3 = (u_1\cdot u_2\xi_6)\cdot u_3 = (u_1\cdot u_2)\cdot u_3\xi_6,$$

где $u_i\in G^2(A)$.

Лемма 2.6. *Пусть ξ, η, θ — операторы умножения длины больше 1 от переменных $x_i\in X$. Функция вида $(x\xi\cdot y\eta)\cdot z\theta t$ кососимметрична на алгебре $G(A)$ по переменной t и всем своим переменным x_i, если x_i принимают значения вида $h\otimes\lambda\in G(A)$, где λ — произвольный элемент алгебры G.*

Доказательство. Пусть x_i принимают значения вида $h\otimes\lambda$. Заметим, что тогда $x_i\cdot x_j=0$. Отсюда в силу линеаризованного тождества альтернативности

$$0 = J(x,x_i,x_j) = xx_i\cdot x_j + xx_j\cdot x_i.$$

Следовательно, одночлены $x\xi$, $y\eta$, $z\theta$ кососимметричны по x_i. Учитывая соотношения (7) и (8), легко заметить, что требуемая функция кососимметрична по переменной t и всем своим переменным вида x_i. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Многочлен*

$$\sum_{\sigma}(\sigma(x)\xi_{2n}\cdot\sigma(y)\eta_{2n})\cdot\sigma(z)\theta_{2n}\pi_{6s},\ \text{где } s=0,1,$$

в котором суммирование происходит по всем перестановкам σ элементов x, y, z, обращается в нуль на элементах алгебры $G(A)$, если на этих элементах каждый член суммы симметричен относительно перестановок операторов ξ_{2n}, η_{2n}, θ_{2n}.

Доказательство. Пусть на некоторых элементах алгебры $G(A)$ каждый член суммы симметричен относительно перестановок операторов ξ_{2n}, η_{2n}, θ_{2n}. Тогда, учитывая симметричность одночленов, лемму 5 и альтернативность алгебры $G(A)$, получим для таких элементов

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma}(\sigma(x)\xi_{2n}\cdot\sigma(y)\eta_{2n})\cdot\sigma(z)\theta_{2n}\pi_{6s} &= \sum_{\sigma}(\sigma'(x)\xi_{2n}\cdot\sigma'(y\eta_{2n}))\cdot\sigma'(z\theta_{2n})\pi_{6s}\\ &= \sum_{\sigma}(\sigma''(x\xi_{2n})\cdot\sigma''(y\eta_{2n}))\cdot\sigma''(z\theta_{2n}\pi_{6s})\\ &= J(x\xi_{2n},y\eta_{2n},z\theta_{2n}\pi_{6s})+J(z\theta_{2n}\pi_{6s},y\eta_{2n},x\xi_{2n})=0,\end{aligned}$$

где σ' — перестановка сомножителей $x\xi_{2n}$, $y\eta_{2n}$, $z\theta_{2n}$, σ'' — перестановка сомножителей $x\xi_{2n}$, $y\eta_{2n}$, $z\theta_{2n}\pi_{6s}$. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Многочлен от переменных x, y, z, t, x_i, где $x_i\in X_{6n-1+6s}$,*

$$\sum_{\sigma}(\sigma(x)\xi_{2n}\cdot\sigma(y)\eta_{2n})\cdot\sigma(z)\theta_{2n-1}t\pi_{6s},\ \text{где } s=0,1,$$

в котором суммирование происходит по всем перестановкам σ элементов x, y, z, обращается в нуль на алгебре $G(A)$, если переменные x_i принимают значения вида $h\otimes\lambda$.

Доказательство. Заметим, что в силу леммы 6 на данных значениях переменных каждый член $(\sigma(x)\xi_{2n}\cdot\sigma(y)\eta_{2n})\cdot\sigma(z)\theta_{2n-1}t\pi_{6s}$ кососимметричен по переменной t и переменным x_i, следовательно, симметричен относительно перестановок операторов ξ_{2n}, η_{2n}, $\theta_{2n-1}R(t)$, и ввиду леммы 7 сумма обращается в нуль. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Следующие условия равносильны:*

(i) одночлен $(x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-1}\pi_{6s}x$, где $s=0,1$, обращается в нуль на алгебре $G(A)$,

(ii) одночлен $(x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n}\pi_{6s}$ обращается в нуль на порождающих алгебры $G(A)$, если переменные x_i принимают значения вида $h\otimes\lambda_i$.

Доказательство. Заметим, что в силу соотношений $A^{(2)}\cdot A^{(2)}=0$, $(A^2)^3\cdot A=0$ одночлены (i) обращаются в нуль на алгебре $G(A)$, если одна из переменных x_i принимает значение вида $u\otimes\lambda$ где $u\in A^2$. Так как $h\in E$ — единственный базисный элемент супералгебры A, не принадлежащий идеалу A^2, достаточно полагать в (i), что переменные x_i принимают значения вида $h\otimes\lambda_i$. Легко заметить, что при этом одночлены (i) обращаются в нуль на порождающих. Линеаризовав (i), получим

$$(x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-1}z\pi_{6s}+\sum_{\sigma}(\sigma(x)\xi_{2n}\cdot\sigma(x)\eta_{2n})\cdot\sigma(z)\theta_{2n-1}x\pi_{6s},$$

где σ — перестановка переменных $\{x,x,z\}$.

В силу леммы 8 получим

$$\sum_{\sigma}(\sigma(x)\xi_{2n}\cdot\sigma(x)\eta_{2n})\cdot\sigma(z)\theta_{2n-1}x\pi_{6s}=0.$$

Оставшийся одночлен $(x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-1}z\pi_{6s}$ обращается в нуль на z, отличных от $h\otimes\lambda$. Таким образом, условие (i) равносильно условию (ii) для произвольных элементов x. Осталось показать, что линеаризации одночленов (ii) обращаются в нуль. В силу того, что $\operatorname{char}\Phi=3$, достаточно рассмотреть полную линеаризацию. Линеаризовав (ii), получим многочлен

$$\sum_{\sigma}(\sigma(x)\xi_{2n}\cdot\sigma(y)\eta_{2n})\cdot\sigma(z)\theta_{2n}\pi_{6s},$$

который равен нулю в силу леммы 8.

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Грассманова оболочка $G(A)$ супералгебры A является M-алгеброй с тождеством*

$$(x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-1}x=0. \tag{2.10}$$

Доказательство. Ввиду леммы 1 и соотношений $A^{(2)}\cdot A^{(2)}=0$, $(A^2)^3\cdot A=0$, справедливых в супералгебре A, ясно, что $G(A)$ — коммутативная альтернативная алгебра с соотношением

$$[G^2(A)]^3\cdot G(A)=0.$$

Покажем справедливость соотношений

$$x^3=0,\quad (x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-1}x=0.$$

На порождающих алгебры $G(A)$ соотношение $x^3=0$ верно в силу леммы 2. Для произвольных элементов это следует из соотношения $(x+y)^3=x^3+y^3$, справедливого в коммутативных альтернативных алгебрах над Φ. Проверим второе соотношение. В силу леммы 9 достаточно показать, что одночлены $(x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n}$ обращаются в нуль на порождающих элементах $x\in G(A)$ и элементах x_i вида $h\otimes\lambda$. Если x — порождающий вида $e\otimes\lambda$, где $e=h,(i,j)_e,w$, то требуемое очевидно. Если же x вида $(i)_e\otimes\lambda$, то соотношение принимает вид $(i+2n)_e^3\oplus\lambda=0$. Теорема доказана.

Бесконечная неприводимая система тождеств коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3. Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.2. *Система одночленов*

$$f_{18n+3}:=(x\xi_{6n-2}\cdot x\eta_{6n-2})\cdot x\theta_{6n+3x}$$

независима в многообразии M.

Доказательство. Покажем, что f_{18n+3} не имеет на алгебре $G(A)$ следствий высших степеней. В силу леммы 9 достаточно показать, что специализация $x\to xy$ приводит к нулю одночлен $(x\xi\cdot x\eta)\cdot x\theta$, где ξ, η, θ — операторы умножения длины больше 0, т. е. достаточно показать, что

$$(xy\xi\cdot xy\eta)\cdot xy\theta=0.$$

Действительно, для произвольного оператора умножения в силу линеаризованного тождества альтернативности, применяя соотношение (6), получим

$$xy\varphi \equiv \pm x\varphi y \pm y\varphi x (\operatorname{mod} F^{(2)}).$$

Перерабатывая таким образом каждый сомножитель требуемого одночлена, выводим многочлен

$$(xy\xi \cdot xy\eta) \cdot xy\theta = \pm(x\xi y \cdot x\eta y \pm x\xi y \cdot y\eta x \pm y\xi x \cdot x\eta y \pm y\xi x \cdot y\eta x) \cdot (x\theta y \pm y\theta x) = 0,$$

равный нулю в силу (7) и (8). Покажем теперь, что $f_{18n+3} \notin T(M)$. Имеем

$$f_{18n+3}((0)_e \otimes 1, h \otimes \lambda_1, \dots, h \otimes \lambda_{18n}) = [(6n-2)_e \cdot (6n-2)_e] \cdot (6n+4)_e \otimes \lambda_1 \dots \lambda_{18n}.$$

Последнее отлично от нуля. В самом деле,

$$\begin{aligned}
[(6n-2)_e \cdot (6n-2)_e] \cdot (6n+4)_e &= \pm(4+6,4)_e \cdot (4)_e \\
&= \pm[(8+6,4)_e + (4+6,8)_e - (6+6,6)_e] \cdot (0)_e \\
&= \pm(4+6,8)_e \cdot (0)_e = \pm(4+12,2)_e (0)_e = \pm w.
\end{aligned}$$

Таким образом, система тождеств f_{18n+3} неприводима в многообразии M. Теорема доказана.

Определим индуктивно ассоциатор

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) = ((x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}), x_{2n}, x_{2n+1}).$$

Следствие. *В многообразии коммутативных альтернативных алгебр с единицей над полем характеристики 3 система тождеств*

$$g_{18n+3} := ((x, x_1, \dots, x_{6n+2}), (x, x_{6n+3}, \dots, x_{12n}), (x, x_{12n+1}, \dots, x_{18n-1}, x))$$

является независимой.

Доказательство. Покажем, что тождества f_{18n+3}, g_{18n+3} совпадают на $G(A)$. Для этого докажем сначала следующие соотношения, справедливые в $G(A)$.

s1. $(x\xi_k \cdot x\eta_l) \cdot x\theta_{m+2}x = -(x\xi_{k+2} \cdot x\eta_l) \cdot x\theta_m x - (x\xi_k \cdot x\eta_{l+2}) \cdot x\theta_m x$.

s2. $(x\xi_{2n+2} \cdot x\eta_{2n}) \cdot x\theta_{2n}x = 0$.

Доказательство s1. В любой правоальтернативной алгебре выполняется тождество (см. [9])

$$(xw, y, z) = (x, y, z)w + x(w, y, z) - (x, w, [y, z]).$$

Отсюда для $u, v \in F^2(M)$ имеем

$$uvyz = uyz \cdot v + v \cdot uyz.$$

Применяя это соотношение, получаем

$$\begin{aligned}
&(x\xi_k \cdot x\eta_l) \cdot x\theta_m R(y_{m+1}) R(z_{m+2}) x \\
&\quad = (x\xi_k \cdot x\eta_l) \cdot x\theta_m x R(y_{m+1}) R(z_{m+2}) = -(x\xi_k \cdot x\eta_l) R(y_{m+1}) R(z_{m+2}) \cdot x\theta_m x \\
&\quad = -(x\xi_k R(y_{m+1}) R(z_{m+2}) \cdot x\eta_l) \cdot x\theta_m x - (x\xi_k \cdot x\eta_l R(y_{m+1}) R(z_{m+2})) \cdot x\theta_m x
\end{aligned}$$

для операторов умножения ξ, η, θ длины больше 0. Отсюда в силу кососимметричности по x_i, y_i, z_i одночленов из последнего соотношения приходим к требуемому.

Доказательство s2. Имеем в силу s1, (10) и кососимметричности по x_i

$$(x\xi_{2n+2}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-3}x = -(x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n+2})\cdot x\theta_{2n-3}x - (x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-1}x$$
$$= -(x\eta_{2n+2}\cdot x\xi_{2n})\cdot x\theta_{2n-3}x = -(x\xi_{2n+2}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-3}x.$$

Отсюда $(x\xi_{2n+2}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-3}x = 0$. Свойства s1 и s2 доказаны.

Заметим, что

$$(x, x_1, \dots, x_{2k}) \equiv (x, x_1, x_2)x_3\dots x_{2k} \equiv x\xi_{2k} - x_1x_2\dots x_{2k}x (\operatorname{mod} F^{(2)}).$$

Перерабатывая таким образом каждый из ассоциаторов

$$(x, x_1, \dots, x_{6n+2}), (x, x_{6n+3}, \dots, x_{12n}), (x, x_{12n+1}, \dots, x_{18n-1}, x)$$

в составе g_{18n+3}, получим в силу (7) и (8)

$$g_{18n+3} = (x\xi_{6n+2}, x\eta_{6n-2}, x\theta_{6n-1}x).$$

Ввиду s1, s2

$$(x\xi_{6n+2}\cdot x\eta_{6n-2})\cdot x\theta_{6n-1}x = -(x\xi_{6n+4}\cdot x\eta_{6n-2})\cdot x\theta_{6n-3}x$$
$$- (x\xi_{6n+2}\cdot x\eta_{6n})\cdot x\theta_{6n-3}x = -(x\xi_{6n+4}\cdot x\eta_{6n-2})\cdot x\theta_{6n-3}x.$$

Отсюда согласно кососимметричности по x_i и x, $s1$, $s2$

$$(x\eta_{6n-2}\cdot x\theta_{6n-1}x)\cdot x\xi_{6n+2} = (x\xi_{6n-2}\cdot x\eta_{6n})\cdot x\theta_{6n+1}x$$
$$= -(x\xi_{6n}\cdot x\eta_{6n})\cdot x\theta_{6n-1}x - (x\xi_{6n-2}\cdot x\eta_{6n+2})\cdot x\theta_{6n-1}x = -(x\xi_{6n-2}\cdot x\eta_{6n+2})\cdot x\theta_{6n-1}x$$
$$= -(x\xi_{6n+2}\cdot x\eta_{6n-2})\cdot x\theta_{6n-1}x = (x\xi_{6n+4}\cdot x\eta_{6n-2})\cdot x\theta_{6n-3}x.$$

Следовательно, с учетом леммы 5

$$g_{18n+3} = (x\xi_{6n+2}, x\eta_{6n-2}, x\theta_{6n-1}x)$$
$$= (x\xi_{6n+2}\cdot x\eta_{6n-2})\cdot x\theta_{6n-1}x - (x\eta_{6n-2}\cdot x\theta_{6n-1}x)\cdot x\xi_{6n+2}$$
$$= (x\xi_{6n+4}\cdot x\eta_{6n-2})\cdot x\theta_{6n-3}x = (x\xi_{6n-2}\cdot x\eta_{6n-2})\cdot x\theta_{6n+3}x = f_{18n+3}.$$

Теперь достаточно заметить, что тождества являются собственными, т. е. обращаются в нуль при подстановке вместо одной из переменных единицы. Значит, указанная система тождеств независима на алгебре $G(A)''$, полученной из $G(A)$ внешним присоединением единицы. Следствие доказано.

Еще один пример бесконечной независимой системы тождеств коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3. Если ограничиться только целью построения бесконечной независимой системы тождеств коммутативных альтернативных алгебр, то в качестве такой системы можно взять следующую:

$$q_{6n+3} := (x\xi_{2n}\cdot x\eta_{2n})\cdot x\theta_{2n-1}x = 0,$$

где $n = 1, 2, \dots$. Для такой системы существует более простая вспомогательная супералгебра и более просто доказывается независимость. В отличие от построенной ранее вспомогательной супералгебры в качестве базисных элементов новой супералгебры рассмотрим элементы вида h, w, $(i)_e$, $(i,j)_e$, где $i, j \in Z_2$, $i \geq j$ (кроме $i = j \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$), т. е. $E = \{h, (0)_e, (1)_e, (0,0)_e, (1,0)_e, w\}$. Положим, что $(1,1)_e = 0, (i,j)_e = (-1)^{ij}(j,i)_e$. В таблице умножения изменим только п. 6. Таким образом, умножение в системе E задается следующим образом:

1) умножение суперкоммутативно, т. е. для любых базисных элементов $x, y \in E$
$$x \cdot y = (-1)^{|x|\,|y|} y \cdot x,$$
2) $h \cdot h = 0$,
3) $(i)_e \cdot h = (i+1)_e$,
4) $(i)_e \cdot (j)_e = (i, j)_e$,
5) $(i, j)_e \cdot h = (-1)^{j+1}(i+1, j)_e - (i, j+1)_e$,
6) $(0,0)_e \cdot (0)_e = w$, $(i, j)_e \cdot (0)_e = 0$,
7) $(i, j)_e \cdot (k)_e = (-1)^k (i, j)_e R(h) \cdot (k-1)_e$,
8) $(i, j)_e \cdot (k, l)_e = 0$,
9) $w \in \operatorname{Ann} A$.

Из правил умножения следует, что
$$A \setminus A^2 = \Phi\{h\}, \quad A^2 \setminus A^{(2)} = \Phi\{(0)_e, (1)_e\}, \quad A^{(2)} \setminus (A^2)^3 = \Phi\{(0,0)_e, (1,0)_e\},$$
$$(A^2)^3 = \Phi\{w\}, \quad A^{(2)} \cdot A^{(2)} = 0, \quad (A^2)^3 \cdot A = 0.$$
Нетрудно проверить, что супералгебра альтернативна, а ее грассманова оболочка является M-алгеброй. Кроме того, $q_{6n+3} \notin T(M)$.

Покажем, что одночлен q_{6n+3} не имеет в $F(M)$ следствий высших степеней. Покажем сначала, что специализации типа $y \to uv$ приводят q_{6n+3} к нулю. В силу кососимметричности по переменным x_i достаточно рассмотреть специализации $x_{2n} \to uv$, $x \to uv$. В первом случае получим
$$q_{6n+3}(x, x_1, \dots, uv, \dots, x_{6n-1}) \in (F^2)^4 = 0.$$
Во втором случае
$$q_{6n+3}(uv, x_1, \dots, x_{6n-1}) \in F^{(2)} \cdot F^{(2)} = 0.$$
Через q'_{6n+3} обозначим линеаризацию одночлена q_{6n+3} по переменной x:
$$q'_{6n+3}(x, y, x_1, \dots, x_{6n-1}) = (x\xi_{2n} \cdot x\eta_{2n}) \cdot x\theta_{2n-1}y + (x\xi_{2n} \cdot x\eta_{2n}) \cdot y\theta_{2n-1}x$$
$$+ (y\xi_{2n} \cdot x\eta_{2n}) \cdot x\theta_{2n-1}x + (x\xi_{2n} \cdot y\eta_{2n}) \cdot x\theta_{2n-1}x.$$
Рассмотрим специализацию $y \to uv$ применительно к многочлену q_{6n+3}:
$$q'_{6n+3}(x, uv, x_1, \dots, x_{6n-1})$$
$$= (x\xi_{2n} \cdot x\eta_{2n}) \cdot uv\theta_{2n-1}x + (uv\xi_{2n} \cdot x\eta_{2n}) \cdot x\theta_{2n-1}x + (x\xi_{2n} \cdot uv\eta_{2n}) \cdot x\theta_{2n-1}x.$$
Заметим, что каждое слагаемое кососимметрично по переменным x_i. Получим тогда
$$q'_{6n+3}(x, uv, x_1, \dots, x_{6n-1}) = (x\xi_{2n} \cdot x\eta_{2n}) \cdot uv\theta_{2n-1}x + (uv\theta_{2n-1}x \cdot x\eta_{2n}) \cdot x\xi_{2n}$$
$$+ (x\xi_{2n} \cdot uv\theta_{2n-1}x) \cdot x\eta_{2n} = J(x\xi_{2n}, x\eta_{2n}, uv\theta_{2n-1}x) = 0.$$
Таким образом, функция q_{6n+3} обращается в нуль на переменных из F^2. Кроме того,
$$q_{6n+3} \in (F^2)^3 \subseteq \operatorname{Ann} F.$$
Теперь можно заключить, что одночлены q_{6n+3}, где $n = 1, 2, \dots$, не имеют следствий высшего порядка, следовательно, образуют независимую систему. Каждый из одночленов q_{6n+3} не приводится к ассоциаторному виду типа g_{18n+3}, как это было сделано для одночленов f_{18n+3}. Поэтому для системы $\{q_{6n+3}\}$ переход к КЛМ способом, предложенным в § 3, не может быть осуществлен.

§ 3. Бесконечная независимая система тождеств коммутативных луп Муфанг

Следующие обозначения и определения можно найти, например, в [12, 13].

Определение. Лупа, в которой выполняются тождества

$$x^2 \cdot yz = xy \cdot xz,$$

называется *коммутативной лупой Муфанг* (КЛМ).

Ассоциатор $[x_1, x_2, x_3]$ элементов x_1, x_2, x_3 КЛМ определяется равенством

$$x_1x_2 \cdot x_3 = x_1[x_1, x_2, x_3] \cdot x_2x_3.$$

Индуктивно определяется ассоциатор

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}], x_{2n}, x_{2n+1}].$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.1. *В многообразии* КЛМ *с тождеством* $x^3 = 1$ *следующая система тождеств:*

$$h_{18n+3} := [[x, x_1, \ldots, x_{6n+2}], [x, x_{6n+3}, \ldots, x_{12n}], [x, x_{12n+1}, \ldots, x_{18n-1}, x]],$$

является независимой.

Доказательство. Легко проверяется, что множество обратимых элементов коммутативной альтернативной алгебры с единицей образует КЛМ относительно операции умножения в этой алгебре. Рассмотрим алгебру с присоединенной единицей $G(A)''$, где $G(A)$ — построенная ранее вспомогательная коммутативная альтернативная алгебра. Пусть $G(A)^*$ — множество элементов алгебры $G(A)''$ вида $b+1$, где $b \in G(A)$. Ясно, что $G(A)^*$ замкнута относительно операции умножения. Кроме того, $(b+1)^3 = b^3 + 1 = 1$ поскольку $\operatorname{char}\Phi = 3$, а $G(A)$ — ниль-алгебра индекса 3, т. е. каждый элемент множества $G(A)^*$ обратим. Следовательно, $G(A)^*$ является КЛМ относительно умножения в $G(A)''$ с тождеством $x^3 = 1$. Покажем, что система тождеств $\{h_{18n+3}\}$ независима в лупе $G(A)^*$. Для этого достаточно показать, что тождества g_{18n+3}, $h_{18n+3} + 1$ совпадают на $G(A)^*$ как на подмножестве алгебры $G(A)''$. Тогда ввиду следствия теоремы 2 будет справедлива теорема 3. Как было показано, обратными для элементов множества $G(A)^*$ являются их квадраты. Тогда в $G(A)''$

$$\begin{aligned}[x, y, z] &= (xyz \cdot (yz)^{-1}) \cdot x^{-1} = (xyz \cdot (yz)^2) \cdot x^2 \\ &= (xyz \cdot y^2z^2) \cdot x^2 = -xyzy^2z^2x^2 - xyzz^2y^2x^2 = -xyzy^2z^2x^2 - 1.\end{aligned}$$

Отсюда для $x, y, z \in G(A)$ имеем

$$\begin{aligned}[x+1, y+1, z+1] &= -(x+1)(y+1)(z+1)(y+1)^2(z+1)^2(x+1)^2 - 1 \\ &= -(x+1)(y+1)(z+1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1)(x^2 - x + 1) - 1 \\ = -xyz + xzy + yzx - zyx + 1 + \Delta_1 &= (z, x, y) + 1 + \Delta_1 = (x+1, y+1, z+1) + 1 + \Delta_1,\end{aligned}$$

где Δ_1 — многочлен полистепени, большей чем полистепень (x, y, z). Используя последнее, для элементов из $G(A)^*$ получим

$$\begin{aligned}h_{18n+3} &:= [[x, x_1, \ldots, x_{6n+2}], [x, x_{6n+3}, \ldots, x_{12n}], [x, x_{12n+1}, \ldots, x_{18n-1}, x]] \\ &= ((x, x_1, \ldots, x_{6n+2}), (x, x_{6n+3}, \ldots, x_{12n}), (x, x_{12n+1}, \ldots, x_{18n-1}, x)) + 1 + \Delta_2 \\ &= g_{18n+3} + 1 + \Delta_2,\end{aligned}$$

где Δ_2 — многочлен, определенный на $G(A)$, полистепени, большей чем полистепень g_{18n+3}. Многочлен g_{18n+3} совпадает на $G(A)$ с одночленом f_{18n+3}. Ввиду максимальности полистепени одночлена f_{18n+3} в M имеем $\Delta_2 = 0$ и, следовательно, на $G(A)^*$ выполняется $h_{18n+3} = g_{18n+3} + 1$. Теорема доказана.

Автор благодарит своего научного руководителя С. В. Пчелинцева за постановку задачи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Днестровская тетрадь.* Нерешенные задачи теории колец и модулей. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1993.

2. *Медведев Ю. А.* Конечная базируемость многообразий с двучленным тождеством // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 6. С. 705–726.

3. *Медведев Ю. А.* Пример многообразия разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики 2, не имеющего конечного базиса тождеств // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 3. С. 300–313.

4. *Пчелинцев С. В.* Разрешимость и нильпотентность альтернативных алгебр и алгебр типа $(-1, 1)$ // Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности. Новосибирск: Наука, 1984. С. 81–101.

5. *Умирбаев У. У.* Шпехтовость многообразия разрешимых альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 2. С. 226–239.

6. *Bryant R. M., Vaughan-Lee M. R.* Soluble varieties of Lie algebras // Quart. J. Math. 1972. V. 89, N 23. P. 107–112.

7. *Шеина Г. В.* О некоторых многообразиях лиевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 1. С. 194–199.

8. *Санду Н. И.* Бесконечные неприводимые системы тождеств коммутативных луп Муфанг и дистрибутивных квазигрупп Штейнера // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, № 1. С. 171–188.

9. *Kleinfeld E.* Right alternative rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4, N 6. P. 939–944.

10. *Higman G.* Ordering by divisibility in abstract algebras // Proc. London Math. Soc. 1952. V. 7, N 2. P. 326–336.

11. *Шестаков И. П.* Супералгебры и контрпримеры // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 187–196.

12. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1972.

13. *Bruck R. H.* A survey of binary systems. Berlin: Springer Verl., 1958.

Статья поступила 22 декабря 1998 г.

г. Улан-Удэ
Бурятский гос. университет, кафедра алгебры
badeev@bsu.burnet.ru