*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5*

*УДК Прошу указать индекс УДК!*

# ОЦЕНКИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММ И МАКСИМУМОВ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ НЕВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ КРАМЕРА

**А. А. Боровков**

**Аннотация:** Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(t)$,

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \quad \overline{S}_n(a) = \max_{k \le n}(S_k - ak).$$

Получены близкие к правильным оценки сверху и снизу для $\mathbf{P}(S_n > x)$, $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ при $x \to \infty$, $a \ge 0$, а также оценки для $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; B(v))$, где

$$B(v) = \bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \le y + vg(j)\}, \quad v \ge 0,$$

при подходящих функциях $g$. Относительно распределения $F$ предполагается, что «хвосты» $F(-t)$ и $1 - F(t)$, $t \to \infty$, мажорируются или минорируются правильно меняющимися функциями либо вида $x^{-\beta}L(x)$, где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция, либо вида $e^{-x^{\alpha}L(x)}$, $\alpha \in (0, 1)$. В качестве следствий установлены относительная равномерная сходимость распределений сумм к устойчивому закону и закон повторного логарифма для последовательности $\{S_n\}$ в случае $\mathbf{E}X_j^2 = \infty$. Библиогр. 26.

## § 1. Введение

**1.1.** Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(t) = \mathbf{P}(X_1 < t)$,

$$\begin{gathered} S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad \overline{S}_n(a) = \max_{k \le n}(S_k - ak), \quad \overline{S}_n = \overline{S}_n(0), \\ B_j(v) = \{X_j \le y + vg(j)\}, \quad B(v) = \bigcap_{j=1}^{n} B_j(v), \quad v \ge 0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где функция $g$ будет выбираться в зависимости от распределения $F$.

Основная цель настоящей работы состоит в оценке вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n > x), \quad \mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \ \text{ и } \ \mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; B(v)) \tag{1.2}$$

при $x \to \infty$. Вероятности $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; B(v))$ играют важную роль при отыскании точной асимптотики $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ (см., например, [1–4]).

Относительно распределения $X_j$ будет предполагаться, что «хвосты»

$$F(-t) = \mathbf{P}(X_j < -t), \quad 1 - F(t) = \mathbf{P}(X_j \ge t), \quad t > 0,$$

мажорируются или минорируются правильно меняющейся или семиэкспоненциальной функцией.

Функцию $V(t)$, $t > 0$, будем называть *правильно меняющейся* или *регулярной*, если

$$V(t) = t^{-\beta} L(t), \quad \beta > 0, \tag{1.3}$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция при $t \to \infty$.

Функцию $V(t)$ будем называть *семиэкспоненциальной*, если

$$V(t) = e^{-t^{\alpha} L(t)}, \quad \alpha \in (0,1), \tag{1.4}$$

где $L(t)$ имеет тот же смысл.

Мажоранты (или миноранты) для положительных хвостов $1 - F(t)$ будем обозначать через $V(t)$, для отрицательных $F(-t)$ — через $W(t)$. При этом $W(t)$ будет принадлежать классу (1.3):

$$W(t) = t^{-\alpha} L_W(t). \tag{1.5}$$

Использование здесь и в (1.4) для обозначения степени одного и того же символа $\alpha$ к недоразумению не приведет, так как соответствующие рассмотрения находятся в разных разделах.

В дальнейшем будут использоваться следующие условия:

$[M^+]$ $\quad 1 - F(t) \le V(t),\ t > 0;$

$[M_+]$ $\quad 1 - F(t) \ge V(t),\ t > 0;$

$[M^-]$ $\quad F(-t) \le W(t),\ t > 0;$

$[M_-]$ $\quad F(-t) \ge W(t),\ t > 0,$

где $V(t)$ имеет вид (1.3) или (1.4), $W(t)$ — вид (1.5).

В тех случаях, когда будет изучаться точная асимптотика $\mathbf{P}(S_n > x)$ и $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$, будет использоваться также условие регулярности хвостов:

$[R]$ $\quad 1 - F(t) = V(t), \quad t > 0,$

являющееся пересечением условий $[M^+]$ и $[M_+]$.

Так как мы будем изучать вероятности больших уклонений на *положительной* полуоси $t > 0$, основным параметром, по которому будет происходить классификация различных случаев, будет параметр $\beta$ мажорант $V(t)$ в (1.3) или наличие мажоранты вида (1.4).

В § 2–5 мы получим оценки сверху для изучаемых вероятностей в следующих четырех случаях:

$$\begin{array}{ll} 1) & \beta < 1 \text{ или } \alpha < 1; \\ 2) & \beta \in (1,2), \quad \mathbf{E}|X_j| < \infty; \\ 3) & \beta > 2, \quad \mathbf{E}X_j^2 < \infty; \\ 4) & \text{мажоранта } V(t) \text{ является семиэкспоненциальной, } \mathbf{E}X_j^2 < \infty. \end{array} \tag{1.6}$$

В § 6 будут получены оценки снизу и ряд следствий, относящихся к точной асимптотике $\mathbf{P}(S_n > x)$ и $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$.

В § 7 найдены условия равномерной относительной сходимости к устойчивому закону и установлен закон повторного логарифма для сумм $S_n$ в случае $\mathbf{E}X_j^2 = \infty$.

Неравенства для сумм случайных величин, близкие к неравенствам § 3, 4, получены в [5, 6] ($\mathbf{E}X_j^2 < \infty$ в [5]). Однако неравенства в [5, 6] имеют в известном смысле «менее окончательный» вид и требуют дополнительных усилий для получения простых явных оценок. Распространение некоторых из этих неравенств на максимумы последовательных сумм в случае $\mathbf{E}X_j^2 < \infty$ содержится в

[7–10]. Как сообщил нам Д. А. Коршунов, асимптотика $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ при $a > 0$ и весьма широких условиях получена в [11]. Таким образом, некоторые результаты работы известны (часто это касается следствий основных утверждений). Мы включили их в работу для полноты и систематичности изложения. Более точные библиографические комментарии будут даны по ходу изложения.

Результаты, установленные в настоящей работе, использовались и будут использоваться для отыскания приближений для $\mathbf{P}(S_n > x)$, $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$, включая асимптотические разложения, примерно так же, как это делается в [1–4]. Библиографические комментарии по поводу точных асимптотик, найденных в работе, см. в § 6.

Перейдем теперь к замечаниям, касающимся методов получения некоторых основных неравенств. Оценки сверху, полученные в § 2–5, существенно различны, но имеют и много общего. В частности, они используют неравенства одного и того же типа для срезанных случайных величин. Схема доказательства этих неравенств одна и та же (см. также [5, 7]) и состоит в следующем.

Рассмотрим «срезанные» на уровне $y > 0$ случайные величины $X_j^{(y)}$ с функцией распределения

$$\mathbf{P}\bigl(X_j^{(y)} < t\bigr) = \frac{F(t)}{F(y)}, \quad t \le y.$$

Обозначим через $S_n^{(y)}$, $\overline{S}_n^{(y)}$ суммы и максимумы этих сумм, соответствующие $X_j^{(y)}$. Тогда очевидно, что вероятность

$$P \equiv \mathbf{P}(\overline{S}_n > x, B(0)) \tag{1.7}$$

в (1.2) при $v = 0$ равна

$$P = F^n(y)\mathbf{P}(\overline{S}_n^{(y)} > x).$$

В силу [8, гл. 4, теорема 16] при любом $\mu \ge 0$ выполняется

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n^{(y)} > x) \le e^{-\mu x}[\max(1, \mathbf{E}e^{\mu X_1^{(y)}})]^n.$$

Так как

$$\mathbf{E}e^{\mu X_1^{(y)}} = F^{-1}(y)\int_{\infty}^{y} e^{\mu t}dF(t),$$

мы получаем неравенство, которое будет лежать в основе многих последующих рассмотрений:

$$P \le e^{-\mu x}[\max(F(y), R(\mu, y)]^n \le e^{-\mu x}\max(1, R^n(\mu, y)), \tag{1.8}$$

где

$$R(\mu, y) = \int_{-\infty}^{y} e^{\mu t}dF(t).$$

Задача, таким образом, состоит в оценке $R(\mu, y)$. Эти оценки в каждом из случаев (1.6) будут различны.

Везде в дальнейшем буквой $c$ с индексами или без будем обозначать постоянные, не всегда одни и те же, если они используются в разных местах. Соотношение $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$ будет означать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

## § 2. Оценки сверху в случаях $\beta < 1$ или $\alpha < 1$

В случае, когда $\beta < 1$ или $\alpha < 1$ (при выполнении $[M^+]$ и $[M_-]$ соответственно), оценки для вероятностей (1.2) могут существенно различаться в зависимости от соотношения отрицательного и положительного хвостов. В связи с этим мы выделим две возможности:

1) $\beta < 1$, хвост $F(-t)$, $t > 0$, произволен;

2) $\alpha < 1$, хвост $F(-t)$ существенно «тяжелее» хвоста $1 - F(t)$, $t > 0$.

Оценки в первом случае, по существу, являются оценками для сумм $S_n$, когда $X_n \geq 0$ ($F(0) = 0$).

**2.1. Случай, когда отрицательный хвост произволен,** $\beta < 1$. Как уже отмечалось, в основе этого и многих последующих разделов лежат оценки вероятности $P$, определенной в (1.7).

В § 2–5 уровень срезки $y$, присутствующий в (1.8), будем выбирать так, что $y \leq x$, а отношение

$$r = \frac{x}{y}$$

ограничено, так что скорость роста $x$ и $y$ при $y \to \infty$ одна и та же с точностью до ограниченного множителя.

**Теорема 2.1.** *Пусть выполнено условие* $[M^+]$, $\beta < 1$. *Тогда существует постоянная* $c$ *такая, что для вероятности* $P$, *определенной в* (1.7), *справедливо неравенство*

$$P \leq c[nV(y)]^r, \quad r = \frac{x}{y}. \tag{2.1}$$

*Постоянную* $c$ *в* (2.1) *можно заменить на* $\left(\frac{e}{r}\right)^r + \varepsilon(nV(y))$, *где* $\varepsilon(\cdot)$ — *ограниченная функция, такая, что* $\varepsilon(v) \downarrow 0$ *при* $v \downarrow 0$.

Отметим, что неравенство (2.1) имеет смысл лишь при ограниченных $nV(y)$, скажем, при $nV(y) < 1$, и мы будем предполагать, не ограничивая общности, что последнее неравенство всегда выполнено. Если $nV(y) \to 0$ ($nV(x) \to 0$), то мы имеем дело с *областью больших уклонений* $\overline{S}_n$. Это следует из того, что в силу следствия 2.1, приведенного ниже, $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \to 0$, если $nV(x) \to 0$. Область больших уклонений можно характеризовать и непосредственно в терминах неравенств для $x$. Для этого введем в рассмотрение функцию $V^{(-1)}$, обратную к $V$, и положим $N(n) = V^{(-1)}(1/n)$, так что $N = N(n)$ — решение уравнения $nV(x) = 1$. Положим теперь $x = sN(n)$ и заметим, что рост $s$ эквивалентен убыванию $nV(x)$. Действительно, положим для краткости

$$\Pi = \Pi(x) = nV(x).$$

Тогда при фиксированном $s$

$$\Pi(sN(n)) \sim s^{-\beta}\Pi(N(n)) = s^{-\beta}$$

и область $\Pi < \varepsilon$ эквивалентна области $s \gtrsim \varepsilon^{-1/\beta}$. При растущих $s$ в силу свойств медленно меняющихся функций значение $\Pi(x)$ заключено при любом фиксированном $\delta > 0$ в пределах

$$s^{-\beta-\delta} \leq \Pi(x) \leq s^{-\beta+\delta}.$$

Аналогичные «обратные» неравенства справедливы для $s$.

Итак, порядок больших уклонений в нашем случае определяется параметром $s = \frac{x}{N(n)}$ или значением $\Pi = nV(x)$.

**Следствие 2.1.** *Пусть выполнено* $[M^+]$, $\beta < 1$. *Тогда существует функция* $\varphi(t) \downarrow 0$ *при* $t \downarrow 0$ *такая, что*

$$\sup_{x:\Pi\le\varepsilon} \frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)}{\Pi} \le 1 + \varphi(\varepsilon), \quad \Pi = nV(x), \tag{2.2}$$

*или, что то же,*

$$\sup_{x:s\ge t} \frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)}{\Pi} \le 1 + \varphi\left(\frac{1}{t}\right).$$

Доказательство. Положим

$$y = x\biggl(1 + \frac{1}{\sqrt{|\ln\varepsilon|}}\biggr)^{-1}.$$

Тогда при $\Pi \le \varepsilon$

$$r = 1 + \frac{1}{\sqrt{|\ln\varepsilon|}}, \quad \Pi^{r-1} \le \exp\biggl\{\frac{\ln\varepsilon}{\sqrt{|\ln\varepsilon|}}\biggr\} = \exp\{-\sqrt{|\ln\varepsilon|}\} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Кроме того,

$$\frac{L(y)}{L(x)} \to 1, \quad x > (nV(x))^{-1/2\beta} \text{ при } x \to \infty,$$

и, стало быть, найдется функция $\varphi_1(t) \downarrow 0$, $t \downarrow 0$, такая, что при $\Pi \le \varepsilon$

$$\frac{L(y)}{L(x)} \le 1 + \varphi_1(\varepsilon), \quad \frac{V(y)}{V(x)} \le \biggl(1 + \frac{1}{\sqrt{|\ln\varepsilon|}}\biggr)^{\beta}(1 + \varphi_1(\varepsilon)) \equiv 1 + \varphi_2(\varepsilon).$$

Значит, в силу теоремы 2.1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\overline{S}_n > x) &\le \mathbf{P}(\overline{B}(0)) + P \le nV(y) + c[nV(y)]^r \\ &\le \Pi[1 + \varphi_2 + c\Pi^{r-1}(1+\varphi_2)^r] \le \Pi[1 + \varphi_2 + c_1 e^{-\sqrt{|\ln\varepsilon|}}]. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Доказательство теоремы 2.1. Нам надо оценить

$$P = \mathbf{P}(\overline{S}_n > x, B), \quad B = B(0) = \bigcap_{j=1}^{n} B_j, \quad B_j = \{X_j \le y\}$$

(ср. с (1.7)). Как уже отмечалось, в основе рассмотрений лежит неравенство (1.8). Чтобы им воспользоваться, надо оценить

$$R(\mu, y) = \int_{-\infty}^{y} e^{\mu t} dF(t) = I_1 + I_2 + I_3, \tag{2.3}$$

где при $\mu \ge 0$, $M = \frac{2\beta}{\mu} < y$

$$\begin{gathered} I_1 = \int_{-\infty}^{0} e^{\mu t}\, dF(t) \le F(0), \\ I_2 = \int_{0}^{M} e^{\mu t} dF(t) \le 1 - F(0) - e^{2\beta}F(M) + \mu\int_{0}^{M} V(t)e^{\mu t}\, dt. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Последний интеграл здесь неограниченно возрастает при $\beta < 1$, $\mu \to 0$, но не превосходит
$$\frac{e^{2\beta} MV(M)}{\beta+1}\bigl(1+o(1)\bigr) \le \frac{c}{\mu} V\left(\frac{1}{\mu}\right),$$
так что
$$I_2 \le 1 - F(0) + cV\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{2.5}$$
(Заметим, что при $\beta > 1$ будем иметь $I_2 \le 1 - F(0) + c\mu$ (см. ниже), так что оценка (2.5) будет при $\beta > 1$ неверной.)

Оценим теперь
$$I_3 = \int\limits_M^y e^{\mu t}\, dF(t) \le V(M)e^{2\beta} + \mu \int\limits_M^y V(t)e^{\mu t}\, dt \equiv V(M)e^{2\beta} + \mu I_3^0. \tag{2.6}$$
Для этого рассмотрим сначала отношение значений подынтегральной функции в $I_3^0$ в точках $t \in [M, y]$ и $t + 1/\mu$:
$$\frac{V(t)e^{\mu t}}{V(t+1/\mu)e^{\mu t+1}} \sim e^{-1}\left(1 + \frac{1}{\mu t}\right)^{\beta} \le e^{-1}\left(1+\frac{1}{2\beta}\right)^{\beta} < e^{-1/2} < 1.$$
Полученное неравенство означает, что интегралы $I_{3,k}$ вида $I_3^0$, но взятые по интервалам $\bigl(y - \frac{k}{\mu}, y - \frac{k+1}{\mu}\bigr)$, $k = 0, 1, \dots$, содержащимся в $[M, y]$, мажорируются геометрической прогрессией со знаменателем $e^{-1}$ и, стало быть, основной вклад в $I_3^0$ будут вносить лишь первые интегралы $I_{3,0}, I_{3,1}, \dots$.

В дальнейшем $\mu$ будет выбираться так, что $\lambda = \mu y \to \infty$ ($y \gg 1/\mu$). С помощью замены $(t - y)\mu = u$ получаем
$$\mu I_3^0 = e^{\mu y} \int\limits_0^{(y-M)\mu} V\left(y - \frac{u}{\mu}\right) e^{-u}\, du,$$
где $V(y - u/\mu) \sim V(y)$ при $u/\mu = o(y)$ (или $u = o(\lambda)$), и, стало быть, в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости
$$\mu I_3^0 \sim e^{\mu y} V(y);$$
при этом нетрудно указать функцию $\varphi(\lambda) \downarrow 0$, $\lambda \uparrow \infty$, такую, что
$$\mu I_3^0 \le e^{\mu y} V(y)(1 + \varphi(\lambda)). \tag{2.7}$$
Суммируя (2.4)–(2.7), получаем
$$R(\mu, y) \le 1 + cV\left(\frac{1}{\mu}\right) + e^{\mu y} V(y)(1 + \varphi(\lambda)). \tag{2.8}$$
Тем самым
$$R^n(\mu, y) \le \exp\left\{ncV\left(\frac{1}{\mu}\right) + nV(y)e^{\lambda}(1 + \varphi(\lambda))\right\}. \tag{2.9}$$
Выберем теперь $\mu$ (или $\lambda$) как значение, «почти минимизирующее»
$$-\mu x + \Pi(y)e^{\lambda} \quad (\Pi(y) = nV(y)).$$

Для этого положим
$$\lambda = \ln \frac{r}{\Pi(y)} \equiv \ln T, \tag{2.10}$$
где мы для краткости ввели обозначение
$$T = \frac{r}{\Pi(y)} = \frac{r}{nV(y)}.$$
Заметим, что при таком выборе $\lambda$ (или $\mu = \ln T/y$) и при $nV(y) \to 0$ выполняется $T \to \infty$, $\lambda = \mu y \to \infty$, и сделанное выше допущение $y \gg 1/\mu$ справедливо. Из (1.8), (2.9), (2.10) следует, что
$$\ln P \le -x\mu + cnV\left(\frac{1}{\mu}\right) + \Pi(y)e^{\lambda}(1+\varphi(\lambda)), \tag{2.11}$$
где $\Pi(y)e^{\lambda} = r$ и при любом $\delta > 0$ и достаточно больших $y$
$$nV\left(\frac{1}{\mu}\right) \le c_1 nV\left(\frac{y}{|\ln nV(y)|}\right) \le c_1 nV(y)|\ln nV(y)|^{\beta+\delta} \le c_2\frac{(\ln T)^{\beta+\delta}}{T}.$$
Поэтому из (2.11) вытекает, что
$$\ln P \le -r\ln T + r + \varphi_1(T),$$
где $\varphi_1(T) \downarrow 0$ при $T \to \infty$ и, не ограничивая общности, можно считать $\ln T \ge 1$. Это доказывает теорему.

Замечание 2.1. Если функция $L(t)$ дифференцируема, $L'(t) = o\bigl(\frac{L(t)}{t}\bigr)$ и $1 - F(t) = V(t)$, то оценку для $I_3$ в (2.6) можно улучшить:
$$I_3 \le \gamma\frac{V(y)}{\mu y}$$
при любом $\gamma > \beta$ и достаточно больших $y$. Это позволяет усилить утверждение теоремы 2.1 и получить оценку
$$P \le c\left[\frac{nV(y)}{|\ln nV(y)|}\right]^r.$$

**2.2. Случай, когда отрицательный хвост допускает миноранту с показателем $\alpha < 1$ и значительно «тяжелее» положительного.** Если в этом пункте вновь пользоваться неравенствами вида
$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le \mathbf{P}(\overline{B}) + P$$
для множеств $B = B(0)$ (ср. с доказательством следствия 2.1), то получить для $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ желаемые оценки с правой частью, не зависящей от $n$, не удастся. Поэтому мы перейдем к использованию названных неравенств, но для множеств $B(v)$ при $v > 0$ и при $g(j) = j^{1/\gamma}$, $\gamma \in (\alpha, \beta)$, (см. (1.1)).

В этом пункте для упрощения вычислений будем дополнительно предполагать, что в (1.3), (1.5)
$$L(t) = L + o(1), \quad L_W(t) = L_W + o(1) \tag{2.12}$$
при $t \to \infty$.

**Теорема 2.2.** *Пусть выполнены условия* $[M^+]$, $[M_-]$; $V(t)$, $W(t)$ *определены в* (1.3), (1.5) *при* $\alpha < \min(1, \beta)$ *и удовлетворяют* (2.12). *Тогда при подходящем* $v$, $y \to \infty$ *и всех* $n$

$$P(v) \equiv \mathbf{P}(\overline{S}_n > x, B(v)) \le cy^{(\gamma-\beta)r}, \quad r = \frac{x}{y}, \tag{2.13}$$

*где фиксированное* $\gamma \in (\alpha, \beta)$ *можно выбрать сколь угодно близким к* $\alpha$.

*Кроме того,*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cx^{-\beta}\min(n, x^\gamma) \tag{2.14}$$

*при любом фиксированном* $\gamma > \alpha$.

**Следствие 2.2.** *Если выполнены условия* $[M^+]$, $[M_-]$, $\alpha < \min(1, \beta)$ *и функции* $V(t)$ *и* $W(t)$ *имеют вид* (1.3) *и* (1.5) *соответственно, то* $\overline{S}_\infty$ — *собственная случайная величина.*

Утверждение следствия очевидным образом следует из (2.14).

Получим сначала оценки для вероятностей $P = P(0)$ в (1.7).

**Лемма 2.1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда при всех* $n$

$$P \le c(1 - V(y))^n y^{-r(\beta-\alpha)}(\ln y)^{-r\alpha} \le cy^{-r(\beta-\alpha)}(\ln y)^{-r\alpha}, \quad r = \frac{x}{y}. \tag{2.15}$$

Доказательство. В силу неравенств (1.8) задача опять сводится к оценке $R(\mu, y)$ в (2.3) при том же разбиении этого интеграла на подинтегралы $I_1$, $I_2$, $I_3$. Здесь при $\mu \to 0$, $\alpha < 1$

$$I_1 = F(0) - \mu \int_{-\infty}^{0} F(t)e^{\mu t}\,dt \le F(0) - \int_0^\infty e^{-u} W\left(\frac{u}{\mu}\right) du;$$

$$\int_0^\infty e^{-u} W\left(\frac{u}{\mu}\right) du \sim W\left(\frac{1}{\mu}\right)\int_0^\infty e^{-u}u^{-\alpha}\,du = \Gamma(1-\alpha)W\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

так что

$$I_1 \le F(0) - \Gamma(1-\alpha)W\left(\frac{1}{\mu}\right)(1 + o(1)), \tag{2.16}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — $\Gamma$-функция. Оценки интегралов $I_2$ и $I_3$ при $\beta < 1$ остаются теми же, что и в (2.5), (2.7). Поэтому

$$R(\mu, y) \le 1 - \Gamma(1-\alpha)W\left(\frac{1}{\mu}\right)(1 + o(1)) + cV\left(\frac{1}{\mu}\right) + V(y)e^{\mu y}(1 + \varphi(\mu y)), \tag{2.17}$$

где $V\big(\frac{1}{\mu}\big) = o\big(W\big(\frac{1}{\mu}\big)\big)$.

Если $\beta > 1$, то вместо слагаемого с $V\big(\frac{1}{\mu}\big)$ в (2.17) будет стоять $c\mu$ (см. замечание к (2.5)). Так как $\mu = o\big(W\big(\frac{1}{\mu}\big)\big)$, все последующее изложение, в котором использовалось (2.17), сохранится. При $\beta = 1$ вместо слагаемого с $V\big(\frac{1}{\mu}\big)$ в (2.17) будет $c\mu\ln\frac{1}{\mu}$ также при очевидном выполнении соотношения $\mu\ln\frac{1}{\mu} = o\big(W\big(\frac{1}{\mu}\big)\big)$ и сохранении всего последующего изложения.

Выберем теперь $\mu$ так, чтобы

$$\Gamma(1-\alpha)W\left(\frac{1}{\mu}\right) = V(y)e^{\mu y}. \tag{2.18}$$

Чтобы облегчить отыскание решения $\mu$, воспользуемся условиями (2.12). Тогда при $y \gg 1/\mu$ уравнение (2.18) примет вид

$$y^\beta \mu^\alpha = ce^{\mu y}(1 + o(1)). \tag{2.19}$$

Положим $\mu y = \lambda$. Тогда (2.19) можно записать в виде

$$\alpha \ln \lambda + (\beta - \alpha) \ln y = \lambda + c_1 + o(1).$$

Отсюда видно, что мы «почти удовлетворим» уравнение (2.19), если положим

$$\lambda = (\beta - \alpha) \ln y + \alpha \ln \ln y + c_2.$$

При таком выборе $\lambda$ (или $\mu$) $R(\mu, y) \le 1 + o\big(W\big(\frac{1}{\mu}\big)\big)$. Как нетрудно убедиться, $c_2$ всегда можно выбрать так, что

$$R(\mu, y) \le 1 - V\left(\frac{1}{\mu}\right) \le 1 - V(y).$$

Поэтому в силу (1.8)

$$P \le (1 - V(y))^n e^{-r[(\beta-\alpha)\ln y + \alpha \ln\ln y + c_2]} = c(1 - V(y))^n y^{-r(\beta-\alpha)} (\ln y)^{-r\alpha}.$$

Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Оценим сначала

$$P(v) \equiv \mathbf{P}(\overline{S}_n > x, B(v)). \tag{2.20}$$

Положим

$$\begin{gathered} m_1 = g^{(-1)}(x) = x^\gamma, \quad m_k = x^\gamma \rho^{k-1}, \quad \rho > 1, \quad M_0 = 0, \\ M_k = \sum_{j=1}^k m_j \equiv x^\gamma \rho_k, \quad \rho_k = \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} \ge \rho^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots ; \\ x_k = x + g(M_{k-1}) = x\big(1 + \rho_{k-1}^{1/\gamma}\big), \quad y_k = y + vg(M_k) = y\big(1 + vr\rho_k^{1/\gamma}\big). \end{gathered} \tag{2.21}$$

Тогда при $n > M_1$

$$\begin{aligned} P(v) \le \mathbf{P}\left(\overline{S}_{m_1} > x_1;\ \bigcap_{j=1}^{m_1}\{X_j \le y_1\}\right) + \mathbf{P}\left(S_{M_1} > -M_1^{1/\gamma};\ \bigcap_{j=1}^{M_1}\{X_j \le y_1\}\right) \\ + \mathbf{P}\big(\overline{S}_n > x,\ \overline{S}_{m_1} \le x,\ S_{M_1} \le -M_1^{1/\gamma};\ B(v)\big). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь последняя вероятность по тем же соображениям при $n > M_2$ не превосходит

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\overline{S}_{m_2} > x_2;\ \bigcap_{j=1}^{m_2}\{X_j \le y_2\}\right) + \mathbf{P}\left(S_{M_2} > -M_2^{1/\gamma};\ \bigcap_{j=1}^{M_2}\{X_j \le y_2\}\right) \\ + \mathbf{P}\big(\overline{S}_n > x,\ \overline{S}_{M_2} \le x,\ S_{M_2} \le -M_2^{1/\gamma};\ B(v)\big) \end{aligned}$$

и т. д. Таким образом, для оценки $P(v)$ надо при $\nu = \min\{k : M_k \ge n\}$ оценить

$$\sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{P}\left(\overline{S}_{m_k} > x_k;\ \bigcap_{j=1}^{m_k}\{X_j \le y_k\}\right) \tag{2.23}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{P}\Bigg(S_{M_k} > -M_k^{1/\gamma};\ \bigcap_{j=1}^{M_k}\{X_j \le y_k\}\Bigg). \tag{2.24}$$

В силу леммы 2.1 первая сумма при достаточно большом $y$ не превосходит

$$\sum_k y_k^{-r_k(\beta-\alpha)}, \tag{2.25}$$

где

$$r_k = \frac{x_k}{y_k} = \frac{x\big(1+\rho_{k-1}^{1/\gamma}\big)}{y\big(1+v\rho_k^{1/\gamma}\big)} \ge r-\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

при всех $k$ и подходящем $v = v(r,\rho,\varepsilon)$. Поэтому суммы (2.23), (2.25) не превосходят

$$\sum_k y_k^{-(r-\varepsilon)(\beta-\alpha)}. \tag{2.26}$$

Но $\rho_k$ возрастает быстрее, чем геометрическая прогрессия (см. (2.21)). То же можно сказать о последовательности $1 + rv\rho_k^{1/\gamma}$ (см. определение $y_k$). Поэтому суммы (2.23), (2.25), (2.26) не превосходят $cy^{-(r-\varepsilon)(\beta-\alpha)}$.

Оценим теперь сумму (2.24). Пусть для краткости $M_k^{1/\gamma} = z_k$. Обозначим через $\eta$ число событий $\{X_j \le 0\}$ в $M_k$ испытаниях. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Bigg(S_{M_k} > -z_k;\ \bigcap_{j=1}^{M_k}\{X_j \le y_k\}\Bigg) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{M_k} \mathbf{P}(\eta = i)\mathbf{P}\Bigg(S_{M_k} > -z_k;\ \bigcap_{j=1}^{M_k}\{X_j \le y_k\}/\eta = i\Bigg) \\
&\qquad\qquad = \sum_{i=[M_k p_1]}^{[M_k p_2]} + O\left(e^{-\delta M_k}\right),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где $p_1 = F(0) - \varphi$, $p_2 = F(0) + \varphi$, $\varphi > 0$, $\delta = \delta(\varphi) > 0$. Пусть, далее, $\eta = i \in [p_1 M_k, p_2 M_k]$ фиксировано. Тогда

$$S_{M_k} = S_i^- + S_{M_k - i}^+,$$

где $S_i^-$ — сумма независимых случайных величин $X_j^-$ с функцией распределения $\frac{F(t)}{F(0)}$, $t \le 0$; $S_{M_k-i}^+$ — аналогичная сумма случайных величин $X_j^+$ с функцией распределения $\frac{F(t)-F(0)}{1-F(0)}$, $t \ge 0$. Поэтому $i$-е слагаемое в (2.27) не будет превосходить

$$\mathbf{P}(S_i^- > -2z_k) + \mathbf{P}\Bigg(S_{M_k-i}^+ > z_k;\ \bigcap_{j=1}^{M_k-i}\{X_j^+ \le y_k\}\Bigg). \tag{2.28}$$

Здесь второе слагаемое в силу теоремы 2.1 не превосходит $[M_k V(y_k)]^{r_k^*}$, где (см. (2.21))

$$r_k^* = \frac{M_k^{1/\gamma}}{y_k} = \frac{x\rho_k^{1/\gamma}}{y(1+vr\rho_k^{1/\gamma})} \ge \frac{r}{1+vr} > r - \varepsilon$$

при $v < \frac{\varepsilon}{r}$. Следовательно, второе слагаемое в (2.28) не превосходит

$$[M_k V(y_k)]^{r-\varepsilon} \le c\big[x^\gamma \rho_k \big(y\rho_k^{1/\gamma}\big)^{-\beta}\big]^{r-\varepsilon} = c_1\big[y^{\gamma-\beta}\rho^{1-\beta/\gamma}\big]^{r-\varepsilon}$$

равномерно по $i$. Но $\rho_k \ge \rho^{k-1}$, $\rho > 1$, $\gamma < \beta$. Поэтому сумма по $k$ этих слагаемых (см. (2.27), (2.24)) не превосходит $c_2 y^{(\gamma-\beta)(r-\varepsilon)}$.

Оценим теперь первое слагаемое в (2.28), положив для краткости $M_k = n$, $i = np$, $p \in [p_1, p_2]$. Для события под знаком вероятности справедливо вложение

$$\big\{S_{np}^- > -2n^{1/\gamma}\big\} \subset \bigcap_{j=1}^{np} \big\{X_j > -2n^{1/\gamma}\big\},$$

так что

$$\mathbf{P}(S_{np}^- > -2n^{1/\gamma}) \le (1 - W(2n^{1/\gamma}))^{np} \le (1 - cn^{-\frac{\alpha}{\gamma}})^{np} < e^{-cp_1 n^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}} \qquad (2.29)$$

равномерно по $i \in [np_1, np_2]$. Учитывая вновь, что $n = M_k$ растут как геометрическая прогрессия, $M_1 = x^\gamma$ и что $1 - \alpha/\gamma > 0$, получим, что сумма в (2.24) не превосходит $e^{-cy^{\gamma-\alpha}}$.

Заметим теперь, что $(\gamma-\beta)(r-\varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon$ можно записать в виде $(\gamma'-\beta)r$, где $\gamma' > \alpha$, как и $\gamma$, можно выбрать сколь угодно близким к $\alpha$.

Соединяя полученные оценки, приходим к неравенству (2.13).

Чтобы получить второе утверждение теоремы 2.2, надо оценить

$$\mathbf{P}(\overline{B}(v)) \le \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(X_j > y + vj^{1/\gamma}) = \sum_{j=1}^{n} V(y + vj^{1/\gamma}) \le \int_0^n V(y + vt^{1/\gamma})\,dt. \quad (2.30)$$

Если $n \le y^\gamma$, то интеграл не превосходит $cny^{-\beta}$. Если $n \ge y^\gamma$, то интеграл в (2.30) следует представить в виде суммы $\int_0^{y^\gamma} + \int_{y^\gamma}^{n}$, где первый интеграл уже оценивался и не превосходит $cy^{\gamma-\beta}$. Второй интеграл не превосходит

$$c\int_{y^\gamma}^{\infty} t^{-\beta/\gamma}\,dt = c_1 y^{\gamma-\beta}.$$

Стало быть,

$$\mathbf{P}(\overline{B}(v)) \le cy^{-\beta}\min(y^\gamma, n). \qquad (2.31)$$

Полагая в (2.13) $r = \frac{\beta}{\beta-\gamma}$, получим для $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ ту же оценку, что в (2.31):

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cx^{-\beta}\min(x^\gamma, n).$$

Теорема доказана.

Замечание 2.2. Нетрудно убедиться, что ценой некоторого усложнения вычислений оценки (2.13), (2.14) могут быть сделаны более точными. Если положить $g(j) = j^{1/\alpha}\ln^{-b} j$, $m_1 = x^\alpha \ln^b x$, то параметр $\gamma$ в (2.13), (2.14) можно заменить на $\alpha$, но при этом в правых частях этих неравенств появится логарифмический множитель. Действительно, единственным местом в доказательстве теоремы 2.2, чувствительным относительно приближения параметра $\gamma$ к $\alpha$, является оценка первого слагаемого в (2.28). Но эта оценка экспоненциальна (см.

(2.29) и ниже). Поэтому степенного характера убывания оценки можно добиться выбором $b$ в определении функции $g$. Аналогичным образом изменятся и оценки $\mathbf{P}(\overline{B}(v))$. Таким образом, на самом деле справедлива оценка

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cx^{-\beta} \min(n, x^{\alpha} \ln^{b_1} x) \tag{2.32}$$

при подходящем $b_1 > 0$.

От условий (2.12) можно отказаться, но также ценой усложнения вычислений, при этом правые части в (2.13), (2.14), (2.32) несколько изменятся. Поскольку для получения в дальнейшем точной асимптотики $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ неравенств (2.13) оказывается достаточным, то мы не стали вносить названные усложнения в доказательство теоремы.

## § 3. Случай $\beta \in (1,2)$, $\mathbf{E}|X_j| < \infty$

Мы будем предполагать здесь, не ограничивая общности, что $\mathbf{E}X_j = 0$. Введем в рассмотрение «слабейшее» из условий $[M^-]$ при существовании $\mathbf{E}X_j$, соответствующее $\alpha = 1$:

$[M_1^-]$ $\quad W(t) = \frac{c_1}{t(\ln t)^2}$.

**3.1. Оценки для распределения $\overline{S}_n$.**

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия $[M^{\pm}]$ при $\beta \in (1,2)$, $\alpha > 1$ и*

$$W(t) \le cV(t). \tag{3.1}$$

*Тогда сохраняются неравенства* (2.1) *теоремы* 2.1 *и* (2.2) *следствия* 2.1.

*Если* (3.1) *не выполнено, то неравенство* (2.1) *сохранится при всех $n$ и $y$ таких, что*

$$nW\left(\frac{y}{|\ln nV(y)|}\right) < 1. \tag{3.2}$$

*Для выполнения* (3.2) *достаточно выполнения одного из следующих двух условий:*

$$nW(y) < 1, \quad |\ln nV(y)| < [nW(y)]^{-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}} \tag{3.3}$$

*при некоторых $\varepsilon > 0$; $c_2, c_3 < \infty$; или*

$$nW\left(\frac{y}{\ln y}\right) < 1. \tag{3.4}$$

*Если выполнены $[M^+]$, $[M_1^-]$, то неравенства* (2.1), (2.2) *справедливы при $n < cx$.*

В правых частях неравенств (3.2)–(3.4) вместо 1 можно было бы поставить любую фиксированную постоянную $c_1$. Однако для значений $y$ таких, что, скажем, $nW(y) > 1$, $nV(y) > 1$, неравенство (2.1) будет, как правило, тривиальным; постоянная $c$ в (2.1) при замене 1 в (3.2) на $c_1$ будет допускать представление $\left(\frac{e}{r}\right)^r e^{c_1} + \varepsilon(nV(y))$ (ср. с теоремой 2.1).

**Следствие 3.1.** *Если выполнены условия $[M^{\pm}]$, то аналог следствия* 2.1 *имеет следующий вид:*

$$\sup_{x:\Pi\le\varepsilon,\,\Pi_W\le 1} \frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)}{\Pi} \le 1 + \varphi(\varepsilon), \tag{3.5}$$

*где $\Pi = nV(x)$, $\Pi_W = nW\left(\frac{x}{|\ln nV(x)|}\right)$, $\varphi(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$.*

Доказательство повторяет с очевидными изменениями рассуждения в доказательстве следствия 2.1.

**Следствие 3.2.** *При условиях* $[M^{\pm}]$ *и* $n \le x^{\gamma}$, $1 < \gamma < \min(\alpha, \beta)$, *неравенства* (2.1), (2.2) *всегда выполнимы. Они выполнены также при условиях* $[M^{+}]$, $[M_1^{-}]$ *и* $n < cx$.

Следствие очевидно, так как при $y \to \infty$

$$y^{\gamma} V(y) \to 0, \quad y^{\gamma} W\left(\frac{y}{\ln y}\right) \to 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать $y > e$, так что неравенство (3.4), а стало быть, и (3.2), (3.5) выполнены.

Замечание 3.1. Условия (3.2)–(3.4), по-видимому, существенны для неравенств (2.1), (2.2), поскольку при $W(y) \gg V(y)$ и при выполнении условий регулярности вида $[R]$ уклонения $y$, для которых $nW(y) > 1$, даже в случае $nV(y) \to 0$ попадают в зону «нормальных уклонений», где для распределения нормированных сумм $S_n$ действует приближение предельным устойчивым законом с параметрами $(\alpha, -1)$.

Доказательство теоремы 3.1 во многом повторяет доказательство теоремы 2.1. Для того чтобы использовать (1.8), оценим опять $R(\mu, y)$ в (2.3), где в новых условиях

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\mu t}\, dF(t) = F(0) + \mu \int\limits_{-\infty}^{0} t\, dF(t) + \int\limits_{-\infty}^{0} (e^{\mu t} - 1 - \mu t)\, dF(t).$$

Здесь

$$\int\limits_{-\infty}^{0} (e^{\mu t} - 1 - \mu t)\, dF(t) = \mu \int\limits_{-\infty}^{0} (1 - e^{\mu t}) F(t)\, dt.$$

Так как подынтегральная функция в последнем интеграле при $\mu > 0$ неотрицательна, этот интеграл не превосходит

$$\mu \int\limits_{0}^{\infty} W(t)(1 - e^{-\mu t})\, dt = \mu^2 \int\limits_{0}^{\infty} \widetilde{W}(t) e^{-\mu t}\, dt,$$

где при $\alpha > 1$

$$\widetilde{W}(t) = \int\limits_{t}^{\infty} W(u)\, du \sim \frac{tW(t)}{\alpha - 1} \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$\mu^2 \int\limits_{0}^{\infty} \widetilde{W}(t) e^{-\mu t}\, dt \sim \mu \widetilde{W}\left(\frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{0}^{\infty} e^{-u} u^{-\alpha+1}\, du \sim \frac{W\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\alpha - 1} \Gamma(2 - \alpha) \ \text{ при } \mu \to 0.$$

Таким образом,

$$I_1 \le F(0) + \mu \int\limits_{-\infty}^{0} t dF(t) + \frac{W\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\alpha - 1} \Gamma(2 - \alpha)(1 + o(1)).$$

При том же выборе $M = \frac{2\beta}{\mu}$ имеет место оценка для интеграла

$$I_2 = \int\limits_{0}^{M} e^{\mu t}\, dF(t) \le 1 - F(0) + \mu \int\limits_{0}^{\infty} t\, dF(t) + \int\limits_{0}^{M} (e^{\mu t} - 1 - \mu t)\, dF(t),$$

где

$$+\int\limits_0^M (e^{\mu t}-1-\mu t)\,dF(t) \le \mu\int\limits_0^M (e^{\mu t}-1)V(t)\,dt \le \mu(e^{2\beta}-1)\widetilde{V}(M),$$

$$\widetilde{V}(t)=\int\limits_t^\infty V(u)\,du \sim \frac{V(t)t}{\beta-1}$$

Поэтому

$$I_2 \le 1-F(0)+\mu\int\limits_0^\infty t\,dF(t)+\frac{(e^{2\beta}-1)V\left(\frac{2\beta}{\mu}\right)}{\beta-1},$$

$$I_1+I_2 \le 1+c_1W\left(\frac{1}{\mu}\right)+c_2V\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{3.6}$$

Оценка $I_3$ (2.6), (2.7) здесь будет та же, что и в теореме 2.1. В итоге в условиях этого пункта получим

$$R(\mu,y) \le 1+c_1W\left(\frac{1}{\mu}\right)+c_2V\left(\frac{1}{\mu}\right)+V(y)e^{\mu y}(1+\varphi(\lambda)), \tag{3.7}$$

где $\lambda=\mu y$ (ср. с (2.8)). Выбор оптимального $\mu$ здесь также происходит аналогично предыдущему (см. (2.10)). Поэтому аналогично (2.11) получаем

$$\ln P \le -x\mu+c_1nW\left(\frac{1}{\mu}\right)+c_2nV\left(\frac{1}{\mu}\right)+e^\lambda\Pi(y)(1+\varphi(\lambda))$$
$$\le -r\ln T+r+\varphi_1(T)+c_3nW\left(\frac{y}{|\ln nV(y)|}\right).$$

Если выполнено (3.1), то последнее слагаемое в правой части можно исключить (включить в $\varphi_1(T)$). Если выполнено (3.2), то

$$\ln P \le -r\ln T+c.$$

Это доказывает (2.1), а стало быть, и (2.2).

Убедимся, что условия (3.3), (3.4) достаточны для (3.2). Пусть выполнено (3.3). Тогда

$$nW\left(\frac{y}{|\ln nV(y)|}\right) \le nW(y)|\ln nV(y)|^{\alpha+\varepsilon/2}$$
$$\le [nW(y)]^{1-\frac{\alpha+\varepsilon/2}{\alpha+\varepsilon}}=[nW(y)]^{\frac{\varepsilon}{2(\alpha+\varepsilon)}}<1.$$

Если выполнено (3.4), то

$$nW\left(\frac{y}{|\ln nV(y)|}\right) \le nW\left(\frac{y}{|\ln V(y)|}\right) \le cnW\left(\frac{y}{\ln y}\right)<c.$$

При этом, как уже отмечалось, все приведенные выше рассуждения при замене 1 в правой части (3.2) на $c$ остаются в силе.

Пусть теперь выполнено $[M_1^-]$ ($\alpha=1$). В этом случае в доказательстве изменится лишь оценка $I_1$,

$$\widetilde{W}(t)=\int\limits_t^\infty W(u)\,du=\frac{c_1}{\ln t}$$

и слагаемое $c_1 W(1/\mu)$ в (3.7) заменится на $\mu\widetilde{W}(1/\mu) = \frac{c_1\mu}{|\ln\mu|}$. При этом достаточные условия (3.2)–(3.4) перейдут в условие $n < cy$ $(n < cx)$.

Теорема доказана.

**3.2. Оценки для распределения $\overline{S}_n(a)$, $a > 0$.** Оценим теперь

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x, B(v)),$$

где, как и прежде, $\mathbf{E}X_j = 0$,

$$\overline{S}_n(a) = \max_{k\le n}(S_k - ak),\ a > 0, \quad B(v) = \bigcap_{j=1}^{n} B_j(v).$$

В условиях этого пункта положим $g(j) = j$, так что

$$B_j(v) = \{X_j \le y + vj\}, \quad v > 0.$$

Очевидно, $\overline{S}_n(a)$ есть не что иное, как значение $\overline{S}_n$ для слагаемых с отрицательным средним.

**Теорема 3.2.** *Пусть выполнено условие $[M^+]$. Тогда при всех $n$ и при $v \le \frac{a}{2r}$*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; \quad B(v)) \le c[mV(x)]^{r_1}, \tag{3.8}$$

*где $m = \min(n, x)$, $r_1 = \frac{r}{1+vr} \ge \frac{r}{1+a/2}$.*

**Следствие 3.3.** *Пусть выполнено условие $[M^+]$. Тогда при всех $n$*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le cmV(x). \tag{3.9}$$

Более точный результат получен в [11], где установлено, что для всех так называемых сильно субэкспоненциальных хвостов $1 - F(t) = V(t)$ при $x \to \infty$ и при всех $n$ выполняется

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \sim \frac{1}{a}\int_0^{an} V(x+u)\,du \tag{3.10}$$

(при $n = \infty$ это соотношение следует также из [12] и отчасти из [8]). С помощью достаточных условий, приведенных в [11], можно показать, что распределения (1.3) принадлежат классу сильно субэкспоненциальных распределений. Если учесть еще асимптотику интеграла в (3.10), то мы обнаружим. что утверждение (3.9) вытекает из (3.10).

Еще более точное асимптотическое представление для $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ получено в [4], где также была установлена теорема 3.2. Ниже мы приводим тем не менее доказательство этой теоремы для систематичности изложения.

Доказательство следствия 3.3. Неравенство (3.9) вытекает из (3.8) и соотношений

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le \mathbf{P}(\overline{B}(v)) + \mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; B(v)),$$

$$\mathbf{P}(\overline{B}(v)) \le \sum_{j=1}^{n} V(y + jv) \le \int_0^{nv} V(y+u)\,du \le cmV(x).$$

Доказательство теоремы 3.2. Отметим прежде всего, что при оценке $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ условие $[M^-]$ можно, не ограничивая общности, считать выполненным. Действительно, введем в рассмотрение случайные величины ${}^{(y)}X_j = \max(-y, X_j) + a_y$, $a_y = \mathbf{E}(X_j + y; X_j \le -y) < a$, являющиеся центрированными «срезами» $X_j$ на уровне $-y$, $y > 0$, и снабдим обозначения $\overline{S}_n(a)$, соответствующие величинам ${}^{(y)}X_j$, верхним левым индексом $(y)$. Тогда очевидно, что

$$\overline{S}_n(a) \le {}^{(y)}\overline{S}_n(a + a_y),$$

где $a_y \to 0$ при $y \to \infty$, и все условия вида $[M^-]$ для ${}^{(y)}X_j$ выполнены. Таким образом,мы получим требуемую оценку для $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$, если будем считать выполненным $[M^-]$ и «чуть уменьшим» значение $a$.

Обратимся теперь к доказательству теоремы. При $n \le x$ утверждение следует из теоремы 3.1 и следствия 3.2. Пусть теперь $x > n$. Будем считать, не ограничивая общности, что $x$ целочисленно. Тогда

$$\begin{aligned} P(x, y, n) \equiv \mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; B(v)) \le \mathbf{P}(\overline{S}_x(a) > x; B(v)) + \mathbf{P}\left(S_x > \frac{ax}{2}; B(v)\right) \\ + \mathbf{P}\left(\overline{S}_x(a) \le x,\ S_x \le \frac{ax}{2}, \overline{S}_n(a) > x;\ B(v)\right) \equiv p_1 + p_2 + p_3. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Здесь

$$B(v) \subset \bigcap_{j=1}^{x} \{X_j \le y + vx\} \equiv B^*$$

и, стало быть, по теореме 3.1

$$p_1 \equiv \mathbf{P}(\overline{S}_x(a) > x,\ B(v)) \le \mathbf{P}(\overline{S}_x > x, B^*) \le (xV(x))^{r_1}, \quad r_1 = \frac{x}{y_1}, \quad y_1 = y + vx.$$

Аналогично

$$p_2 \equiv \mathbf{P}\left(S_x > \frac{ax}{2},\ B(v)\right) \le \left(xV\left(\frac{ax}{2}\right)\right)^{r_1} \le c(xV(x))^{r_1}; \qquad (3.12)$$

$$p_3 \le \mathbf{P}(\overline{S}_{n-x}(a) > x_1;\ X_j \le y_1 + jv, j = 1, \dots, n - x) = P(x_1, y_1, n - x), \quad (3.13)$$

где $x_1 = x(1 + a/2) \equiv xA$, $y_1 = y + vx = y(1 + vr)$. Если $n < x + x_1$, то на этом оценки заканчиваются применением к $P(x_1, y_1, n - x)$ теоремы 3.1. Если $n > x + x_1$, то следует продолжить рекуррентное оценивание с помощью неравенств (здесь можно опять, не ограничивая общности, считать $x_1$ целочисленным)

$$P(x, y, n) \le (1 + c)(xV(x))^{r_1} + P(x_1, y_1, n - x),$$

вытекающих из (3.12), (3.13).

В результате при некотором $\nu > 1$ получим

$$P(x, y, n) \le (1 + c) \sum_{k=0}^{\nu} (x_k V(x_k))^{r_{k+1}},$$

где

$$x_k = xA^k,$$

$$y_k = y_{k-1} + vx_{k-1} = y + vx(A^{k-1} + A^{k-2} + \dots + 1) = y\left(1 + vr\frac{A^k - 1}{A - 1}\right),$$

$$r_k = \frac{x_{k-1}}{y_k} = \frac{xA^{k-1}(A - 1)}{y(A - 1 + rvA^k - vr)} = \frac{r(A - 1)}{vrA + (A - 1 - vr)A^{1-k}}.$$

Если $v \le \frac{a}{2r}$, то $r_k$ не убывают и $\min r_k$ совпадает с
$$r_1 = \frac{r}{1+vr} \ge \frac{r}{1+a/2} = \frac{r}{A}.$$
Так как при $x \to \infty$
$$1 > x_k V(x_k) \sim A^{k(1-\beta)} x V(x),$$
то
$$P(x,y,n) \le \frac{(1+c)(xV(x))^{r_1}}{1-A^{r_1(1-\beta)}}(1+o(1)).$$
Теорема доказана.

## § 4. Случай $\beta > 2$, $\mathbf{E}X_j^2 < \infty$

В условиях этого параграфа можно предполагать, не ограничивая общности, что
$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}X_1^2 = 1.$$
Условия на отрицательные хвосты в этом параграфе не нужны.

**4.1. Оценки для распределения $\overline{S}_n$.** В дальнейшем нам понадобятся значения $N = N(n)$, характеризующие зону уклонений $S_n$, где происходит смена асимптотик $\mathbf{P}(S_n > x)$ от «нормальной» $1 - \Phi\bigl(\frac{x}{\sqrt{n}}\bigr)$ к асимптотике $nV(x)$, описывающей $\mathbf{P}(S_n > x)$ при достаточно больших $x$. Точнее, мы определим $N$ как уклонение, при котором асимптотики $e^{-\frac{x^2}{2n}(1+o(1))}$ и $nV(x)$ «почти» совпадают, т. е. положим
$$N = \sqrt{(\beta-2)n\ln n},$$
где $N$ — главная часть решения уравнения $-\frac{x^2}{2n} = \ln n - \beta \ln x = \ln nV(x)$.

В условиях предыдущих параграфов роль уклонений $N$, при которых происходит смена аппроксимации устойчивым законом на аппроксимацию значением $nV(x)$, играли уклонения порядка $n^{1/\gamma}$, $\gamma = \min(\alpha,\beta)$ (решения уравнений $nV(x) = 1$ или $nW(x) = 1$). Отметим также, что в этом параграфе всегда будет предполагаться $x \to \infty$ ($y \to \infty$), при этом уклонения $x$ (или $y$) всегда будут превосходить $\sqrt{n}$, так что всегда будет выполняться
$$nV(x) \to 0 \quad (nV(y) \to 0)$$
при $x \to \infty$.

Замечание 4.1. Чтобы избежать недоразумений при $n = 1$, было бы удобнее полагать $N = \sqrt{(\beta-2)n\ln(n+1)}$ (значение $n = 1$ мы не исключаем). Поскольку $P_1 = 0$ при $n = 1$ в наиболее интересном случае $r \ge 1$, то в тех местах, где могут возникнуть недоразумения с $\ln n$, можно считать $n \ge 2$.

**Теорема 4.1.** *Пусть выполнено условие $[M^+]$, $\beta > 2$, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$. Тогда*

1) *при любом фиксированном $h > 1$ и достаточно больших $y = sN$, $s^2 \ge \frac{h}{2}$*
$$P \le T^{-r+\theta}, \tag{4.1}$$
*где*
$$T = \frac{r}{nV(y)}, \quad \theta = \frac{h}{4s^2}\left(1 + b\frac{\ln s}{\ln n}\right), \quad b = \frac{2\beta}{\beta-2}, \quad N = \sqrt{(\beta-2)n\ln n}, \quad r = \frac{x}{y};$$

2) *при любом фиксированном $h > 1$, $y = x$, $\frac{1}{\ln n} < s^2 < \frac{h}{2}$ и всех достаточно больших $n$*
$$P \le e^{-\frac{x^2}{2nh}}. \tag{4.2}$$

**Следствие 4.1.** (a) *Если $s \to \infty$, то при любом $\varepsilon > 0$*

$$P \le T^{-r+\varepsilon}. \tag{4.3}$$

(b) *Если $s^2 > \ln n$, то*

$$P \le cT^{-r}. \tag{4.4}$$

**Следствие 4.2.** (a) *Если $s \to \infty$, то при любом $\delta > 0$ и всех достаточно больших $x$*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le nV(x)(1+\delta). \tag{4.5}$$

(b) *Если $s^2 \ge h/2$, то*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cnV(x). \tag{4.6}$$

(c) *При любом фиксированном $h > 1$, $1/\ln n < s^2 < h/2$ и всех достаточно больших $n$*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le e^{-\frac{x^2}{2nh}}. \tag{4.7}$$

Замечание 4.2. Нетрудно убедиться, что, как и в следствии 2.1, здесь существует функция $\varphi(t) \downarrow 0$ при $t \uparrow \infty$ такая, что наряду с (4.5) справедливо соотношение

$$\sup_{x:s\ge t} \frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)}{nV(x)} \le 1 + \varphi(t).$$

Доказательство следствия 4.1. Первое утверждение очевидным образом следует из (4.1). Докажем второе утверждение. Так как $y = sN$, очевидны следующие оценки для $T$:

$$T < c_1 s^{\beta+\varepsilon} n^{\frac{\beta+\varepsilon}{2}-1}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Отсюда получаем

$$\ln T^\theta \le \frac{h}{4s^2}\left(1 + b\frac{\ln s}{\ln n}\right)\left[\ln c_1 + (\beta+\varepsilon)\ln s + \left(\frac{\beta+\varepsilon}{2} - 1\right)\ln n\right].$$

Очевидно, что при $s^2 > \ln n$ правая часть этого неравенства ограничена. Следствие 4.1 доказано.

Доказательство следствия 4.2. В основе доказательства опять лежит неравенство

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le nV(y) + P.$$

Утверждение (a) следует из (4.3), если положить $r = 1 + \varepsilon$.

Докажем (b). Если $s \to \infty$, то (b) вытекает из (a). Если $s$ ограничено, то с необходимостью $n \to \infty$ при $x \to \infty$ и $\theta \le \frac{h}{2s^2}$. Полагая $r = 1 + \frac{h}{2s^2}$, получаем

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le 2nV\left(\frac{x}{1 + h/2s^2}\right) \le cnV(x).$$

Утверждение (c) следует из неравенства (см. (4.2))

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le nV(x) + e^{-\frac{x^2}{2nh}}, \tag{4.8}$$

где при $s^2 < h/2$

$$e^{-\frac{x^2}{2nh}} > \exp\left\{-\frac{h}{2}\frac{(\beta-2)n\ln n}{2nh}\right\} = n^{-\frac{\beta-2}{4}}, \quad nV(x) \le cn^{1-\frac{\beta}{2}+\varepsilon}$$

при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $n$. Поэтому в правой части (4.8) доминирует второе слагаемое. Чуть изменив при необходимости $h$, мы получаем (c). Следствие 4.2 доказано.

Доказательство теоремы 4.1. Будем следовать тому же пути доказательства, что и в предыдущих теоремах. В основе опять лежит неравенство (1.8) и оценки для $R(\mu, y)$. Однако здесь разбиение $R(\mu, y)$ на подинтегралы будет иным (ср. с (2.3)). Положим $M(v) = \frac{v}{\mu}$, так что $M = M(2\beta)$ (ср. с (2.4)),

$$R(\mu, y) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{M(\varepsilon)} e^{\mu t}\, dF(t) = \int\limits_{\infty}^{M(\varepsilon)} \left(1 + \mu t + \frac{\mu^2 t^2}{2} e^{\mu\theta(t)}\right) dF(t), \quad 0 \le \frac{\theta(t)}{t} \le 1. \tag{4.9}$$

Здесь

$$\int\limits_{-\infty}^{M(\varepsilon)} dF(t) = 1 - V(M(\varepsilon)) \le 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{M(\varepsilon)} t\, dF(t) = -\int\limits_{M(\varepsilon)}^{\infty} t\, dF(t) \le 0, \tag{4.10}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{M(\varepsilon)} t^2 e^{\mu\theta(t)}\, dF(t) \le e^{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{M(\varepsilon)} t^2\, dF(t) \le e^{\varepsilon} \equiv h. \tag{4.11}$$

Следовательно,

$$I_1 \le 1 + \frac{\mu^2 h}{2}. \tag{4.12}$$

Оценим теперь

$$I_2 = -\int\limits_{M(\varepsilon)}^{y} e^{\mu t}\, dF(t) \le V(M(\varepsilon))e^{\varepsilon} + \mu \int\limits_{M(\varepsilon)}^{y} V(t) e^{\mu t}\, dt. \tag{4.13}$$

Рассмотрим сначала при $M(\varepsilon) < M < y$

$$I_{2,1} = \mu \int\limits_{M(\varepsilon)}^{M} V(t) e^{\mu t}\, dt.$$

При $t = \frac{v}{\mu}$ имеем

$$V(t)e^{\mu t} = V\left(\frac{v}{\mu}\right) e^{v} \sim V\left(\frac{1}{\mu}\right) g(v),$$

где функция $g(v) = v^{-\beta} e^{v}$ выпукла на $(0, \infty)$. Поэтому

$$I_{2,1} \le \frac{\mu}{2}(M - M(\varepsilon)) V\left(\frac{1}{\mu}\right) (g(\varepsilon) + g(2\beta)) \le cV\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{4.14}$$

Оценка

$$I_{2,2} = \mu \int\limits_M^y V(t) e^{\mu t}\, dt$$

происходит так же, как оценка $I_3^0$ в (2.6), (2.7), что дает нам

$$I_{2,2} \le V(y) e^{\mu y}(1 + \varphi(\lambda)), \quad \lambda = \mu y, \tag{4.15}$$

$\varphi(\lambda) \downarrow 0$ при $\lambda \uparrow \infty$. Суммируя (4.12)–(4.14), получаем

$$R(\mu, y) \le 1 + \frac{\mu^2 h}{2} + cV\left(\frac{1}{\mu}\right) + V(y) e^{\mu y}(1 + \varphi), \tag{4.16}$$

$$R^n(\mu, y) \le \exp\left\{\frac{n\mu^2 h}{2} + cnV\left(\frac{1}{\mu}\right) + nV(y) e^{\mu y}(1 + \varphi)\right\}. \tag{4.17}$$

В качестве $\mu$ выберем сначала значение (см. (2.10))

$$\mu = \frac{1}{y} \ln T,$$

где $T = \frac{r}{nV(y)}$. Тогда аналогично (2.9) получим

$$R^n(\mu, y) \le \exp\left\{\frac{n\mu^2 h}{2} + cnV\left(\frac{1}{\mu}\right) + r(1 + \varphi)\right\}, \tag{4.18}$$

где, как и прежде,

$$nV\left(\frac{1}{\mu}\right) \sim nV\left(\frac{y}{\ln T}\right) \sim cnV\left(\frac{y}{|\ln nV(y)|}\right) \le cnV(y) |\ln nV(y)|^{\beta+\varepsilon} \to 0,$$

поскольку $nV(y) \to 0$. Поэтому (ср. с (2.11))

$$\ln P \le -r \ln T + r + \frac{nh}{2y^2} \ln^2 T + \varphi_1(T) = \ln T\left[-r + \frac{nh}{2y^2} \ln T\right] + \varphi_1(T), \tag{4.19}$$

где $\varphi_1(T) \downarrow 0$ при $T \uparrow \infty$. При $y = sN$, $N = \sqrt{(2-\beta) n \ln n}$, имеем

$$\begin{aligned} \ln T = -\ln nV(y) + O(1) &= -\ln n + \beta \ln s + \frac{\beta}{2} \ln n + O(\ln L(sN)) + O(1) \\ &= \frac{\beta - 2}{2} \ln n \left[1 + b \frac{\ln s}{\ln n}\right](1 + o(1)), \end{aligned} \tag{4.20}$$

где $b = \frac{2\beta}{\beta - 2}$. Следовательно,

$$\frac{nh}{2y^2} \ln T = \frac{h}{4s^2}\left[1 + b\frac{\ln s}{\ln n}\right](1 + o(1)), \quad \ln P \le -\ln T\left[r - \frac{h'}{4s^2}\left(1 + b\frac{\ln s}{\ln n}\right)\right]$$

при любом $h' < h < 1$ и достаточно больших $y$. Это доказывает первое утверждение теоремы 4.1.

Рассмотрим теперь «небольшие» значения $s$, например, такие, что

$$\frac{1}{\ln n} \le s^2 < \frac{h}{2}.$$

Это соответствует диапазону значений $y$:

$$\frac{h(\beta - 2)}{2} n \ln n > y^2 > (\beta - 2) n.$$

Здесь мы выберем в качестве $\mu$ значение
$$\mu = \frac{x}{nh} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$
Тогда
$$\ln P \le -\mu x + \frac{n\mu^2 h}{2} + cnV\left(\frac{1}{\mu}\right) + nV(y)e^{\mu y}(1+\varphi). \tag{4.21}$$
Здесь при $x = y$, очевидно,
$$nV\left(\frac{1}{\mu}\right) \le cnV\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right) \to 0 \tag{4.22}$$
при $n \to \infty$. Далее, из (4.20) нетрудно извлечь, что
$$nV(y) \le n^{\frac{2-\beta}{2}}.$$
Кроме того,
$$\mu y = \frac{y^2}{nh} = \frac{s^2(\beta-2)\ln n}{h}.$$
Поэтому
$$\frac{\gamma nV(y)e^{\mu y}}{\mu y} \le cn^{1-\beta/2+\frac{s^2(\beta-2)}{h}} \to 0 \tag{4.23}$$
при $s^2 < h/2$.

Суммируя (4.15)–(4.17), получаем
$$\ln P \le -\frac{x^2}{2nh} + o(1).$$
Слагаемое $o(1)$ здесь можно убрать, чуть изменив $h > 1$. Это доказывает (4.2). Теорема доказана.

**4.2. Оценки для распределения $\overline{S}_n(a)$, $a > 0$.** Этот пункт мало чем отличается от п. 3.2. Как и в 3.2, здесь положим
$$B(v) = \bigcap_{j=1}^{n} B_j(v), \quad B_j(v) = \{X_j \le y + vj\}, \quad v > 0.$$

**Теорема 4.2.** *Пусть выполнено* $[M^+]$, $\beta > 2$, $\mathbf{E}X_j = 0$, $\mathbf{E}X_j^2 < \infty$. *Тогда при всех* $n$ *и* $x$
$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x;\ B(v)) \le c[mV(x)]^{r_1}, \tag{4.24}$$
*где* $m = \min(n,x)$, $r_1 = \frac{r}{1+vr}$, $r = \frac{x}{y}$, $v \le \frac{a}{2r}$.

**Следствие 4.3.** *Пусть выполнено* $[M^+]$. *Тогда при всех* $n$ *и* $x$
$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le cmV(x). \tag{4.25}$$
*См. также замечание к следствию* 3.3.

Доказательство следствия 4.3 ничем не отличается от доказательства следствия 3.3. Заметим только, что в (4.24) и (4.25) надо рассматривать лишь достаточно большие $x$, при которых $mV(x) < 1$. Замечания, сделанные в § 3 к следствию 3.3, здесь полностью сохраняются.

Доказательство теоремы 4.2 также почти полностью повторяет доказательство теоремы 3.2. Надо лишь заметить, что здесь для доказательства (4.24) будет использоваться теорема 4.1 при $n \le cx$ и, стало быть, условие $s^2 > \ln n$ в п. (b) следствия 4.1 выполнено; $P < cT^{-r}$. В остальном рассмотрение не изменяется. Теорема доказана.

## § 5. Семиэкспоненциальные хвосты, $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$

В этом параграфе будем рассматривать семиэкспоненциальные хвосты $V(x)$ вида (1.4):

$$V(t) = e^{-l(t)}, \quad l(t) = t^\alpha L(t),$$

где $\alpha \in (0,1)$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция.

Нам понадобится условие гладкости на $l(t)$, хотя для окончательных утверждений оно, по-видимому, несущественно.

$[D]$. *Функция $l(x+t)$ при $x \to \infty$, $t = o(x)$ допускает представление*

$$l(x+t) = l(x) + tl'(x)(1+o(1)), \tag{5.1}$$

*где* $l'(x) \sim \frac{\alpha l(x)}{x}$.

Можно предполагать для простоты, что функция $L(t)$ дифференцируема, $L'(t) = o\big(\frac{L(t)}{t}\big)$. Тогда $[D]$ всегда выполнено и $l'(x)$ можно отождествить с производной функции $l$.

**5.1. Оценки распределения $\overline{S}_n$.** Введем снова в рассмотрение функцию $N = N(n)$ (см. § 4), характеризующую область уклонений $x$, в которой «нормальная» асимптотика $e^{-\frac{x^2}{2n}}$ и асимптотика $nV(x)$ дают примерно один и тот же результат. Точнее, определим $N$ как решение уравнения

$$\frac{N^2}{2n} = -\ln nV(N). \tag{5.2}$$

С точки зрения асимптотики $N(n)$ это то же самое, что и решение уравнения

$$\frac{N^2}{2n} = -\ln V(N) = l(N).$$

Нам будет несколько удобнее рассматривать уравнение

$$N^2 = nl(N), \tag{5.3}$$

решение которого отличается от решения исходного уравнения ограниченным множителем. Нетрудно видеть, что в нашем случае $N = N(n)$ имеет вид

$$N = n^{\frac{1}{2-\alpha}} L_1(n), \tag{5.4}$$

где $L_1(n)$ — медленно меняющаяся функция.

Область уклонений $x \le N(n)$ можно называть «*крамеровской*» (или *нормальной*); область $N(n) < x \le N_2(n)$, где $N_2(n)$ определена ниже, будем называть *промежуточной*, область $x > N_2(n)$ — областью, где действует «*принцип максимального скачка*» (асимптотика $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ в этой области совпадает с асимптотикой $\mathbf{P}(\max_{k\le n} X_k > x) \sim nV(x)$; подробнее об этом см. [1]).

Положим

$$w(t) = -t^{-2}\ln V(t) = t^{-2} l(t) = t^{\alpha-2} L(t). \tag{5.5}$$

Можно считать, не ограничивая общности, что $w(t) \downarrow$. Тогда уравнение (5.3) можно записать в виде $w(N) = \frac{1}{n}$ и $N(n)$ есть не что иное, как значение обратной функции $w^{(-1)}$ к $w$ в точке $\frac{1}{n}$:

$$N(n) = w^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Нетрудно видеть, что если $L$ удовлетворяет условию

$$L(tL^{\frac{1}{2-\alpha}}(t)) \sim L(t) \quad \text{при } t \to \infty, \tag{5.6}$$

то $w^{(-1)}(u)$ имеет вид

$$w^{(-1)}(u) \sim u^{\frac{1}{\alpha-2}} L^{\frac{1}{2-\alpha}}(u^{\frac{1}{\alpha-2}}),$$

так что $L_1(n) \sim L^{\frac{1}{2-\alpha}}\big(n^{\frac{1}{2-\alpha}}\big)$.

Заметим, что условие (5.6) является весьма широким, но выполнено не всегда. Оно не выполнено, например, для м.м.ф. $L(t) = \exp\{\ln t/\ln\ln t\}$.

Так как граница $N(n)$ крамеровской области уклонений зависит от $n$, ее эквивалентным образом можно характеризовать с помощью $n$: $n \ge \frac{1}{w(x)}$ для крамеровской области и $n < \frac{1}{w(x)}$ — для промежуточной. Таким образом, характеристикой уклонений может служить как число $s = \frac{x}{N(n)}$ (ср. с § 4; $s \le 1$ для крамеровской области), так и число $\sigma = \sigma(x) = nw(x)$ ($\sigma > 1$ для крамеровской области); $\sigma \sim s^{\alpha-2}$ при $n \to \infty$. В ряде случаев нам будет удобнее пользоваться характеристикой $\sigma$ (аргумент $x$ часто будем опускать; если он отличен от $x$, то будем его указывать).

**Теорема 5.1.** *Пусть выполнено $[M^+]$, функция $l$ удовлетворяет условию $[D]$, функция $w$ определена в (5.5). Тогда существует постоянная $c$ (ее явный вид легко получить из доказательства) такая, что при любом фиксированном $h > 1$, всех $n$ и всех достаточно больших $y$*

$$P \le c[nV(y)]^{r-\frac{h\sigma(y)}{2}}, \quad r = \frac{x}{y}. \tag{5.7}$$

*Если при любых фиксированных $h > 1$ и $\varepsilon > 0$ выполняется $\sigma h \ge 1 + \varepsilon$, то при $y = x$ и всех достаточно больших $n$*

$$P \le e^{-\frac{x^2}{2nh}}. \tag{5.8}$$

*Если уклонения $y$ характеризуются соотношением $y = sN(n)$, то справедливо соотношение (5.7), в котором $\sigma(y)$ следует заменить на $s^{\alpha-2}(1+o(1))$. Если $y = x$, $s^{2-\alpha} < h$, то справедливо (5.8).*

Приведем ряд следствий теоремы 5.1.

Наряду с функцией $w(t)$ (см. (5.5)) определим функцию

$$w_2(t) = w(t)l(t) = t^{-2}l^2(t) = t^{2\alpha-2}L^2(t), \tag{5.9}$$

которую, как и $w(t)$, будем считать монотонно убывающей, так что определена обратная функция $w_2^{(-1)}(\cdot)$. Положим

$$N_2(n) = w_2^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2-2\alpha}} L_2(n), \tag{5.10}$$

где $L_2$ — медленно меняющаяся функция, которую, как и $L_1$, при дополнительном предположении (5.6) можно найти в явном виде.

Пусть $r_0$ — минимальное решение уравнения

$$1 = r - \frac{\sigma h}{2} r^{2-\alpha},$$

которое при $\sigma h < 2^{\alpha-1}$ всегда существует. Положим $\sigma^* = r_0 - 1 \sim \frac{\sigma h}{2}$ при $\sigma \to 0$. Здесь и везде ниже $h > 1$, как и прежде, — произвольное фиксированное число.

**Следствие 5.1.** 1. *Если* $\sigma h < 2^{\alpha-1}$, *то*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cnV(x)^{(1+\sigma^*)^{-\alpha}}. \tag{5.11}$$

*Если* $\sigma l(x) \le c$ *или, что то же,* $x \ge c_2 N_2(x)$, *то*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le c_1 nV(x).$$

*Если* $\sigma l(x) \to 0$ $(x \gg N_2(n))$, *то*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) < nV(x)\bigl(1+o(1)\bigr).$$

2. *Если* $\sigma h \ge 2^{\alpha-1}$, *то*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) < cnV(x)^{\frac{1}{2\sigma h}}. \tag{5.12}$$

*Пусть* $h > 1$, $\varepsilon > 0$ *— любые фиксированные числа. Если* $\sigma h \ge 1+\varepsilon$, *то при* $l(x) > 2\ln n$ *и всех достаточно больших* $n$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le e^{-\frac{x^2}{2nh}} = V(x)^{\frac{1}{2\sigma h}}. \tag{5.13}$$

Условие $l(x) > 2\ln n$ в последнем утверждении, по-видимому, излишне.

Замечание 5.1. Как и в следствиях 2.1, 4.2 (см. также замечание 4.1), нетрудно убедиться, что существует функция $\varphi(t) \downarrow 0$ при $t \uparrow \infty$ такая, что при $x = sN_2(n)$

$$\sup_{x: s>t} \frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)}{nV(x)} \le 1+\varphi(t).$$

Доказательство теоремы 5.1. Схема доказательства остается прежней. Основным опять будет неравенство (1.8). Оценка интеграла $I_1$ в (4.9) остается той же, что и в теореме 4.1 при $M(\varepsilon) = \varepsilon/\mu$ (см. (4.9)). Положим $e^\varepsilon = h$. Тогда (см. (4.12))

$$I_1 < 1 + \frac{\mu^2 h}{2}. \tag{5.14}$$

Оценка

$$I_2 = \int\limits_{M(\varepsilon)}^{y} e^{\mu t}\, dF(t) \le V(M(\varepsilon))h + \mu \int\limits_{M(\varepsilon)}^{y} V(t)e^{\mu t}\, dt \tag{5.15}$$

(см. (4.13)) несколько изменится.

Положим

$$f(t) = -l(t) + \mu t.$$

Если выполнено $[D]$, то при $t \ll \mu^{\frac{1}{\alpha-1}}$ ($\mu$ мало) эта функция убывает, при $t \gg \mu^{\frac{1}{\alpha-1}}$ возрастает.

Пусть для простоты $l$ — непрерывно дифференцируемая функция, $l'(t)\downarrow$ (в силу $[D]$ $l'(t) \sim \frac{\alpha l(t)}{t}$). Тогда минимум $f(t)$ достигается в точке $t_0 = \zeta(\mu)$, где $\zeta = (l')^{(-1)}$ есть функция, обратная к $l'(\cdot)$ на интервале $(t_0, \infty)$, так что $l'(\zeta(\mu)) = \mu$, $\zeta(s) = s^{\frac{1}{\alpha-1}}L^*(s)$, $L^*(s)$ — медленно меняющаяся функция. Положим

$$\mu = vl'(y), \tag{5.16}$$

где $v > 1$ выберем позднее. Ясно, что при $v > 1$ выполняется $\zeta(\mu) < y$. Заметим, что при $v \approx 1/\alpha > 1$ значение

$$f(y) = -l(y) + vl'(y)y \approx l(y)(v\alpha - 1)$$

может быть сделано малым, а $e^{f(y)}$ — «сравнимым с 1».

Заметим также, что

$$y = \zeta\left(\frac{\mu}{v}\right) \sim v^{\frac{1}{1-\alpha}}\zeta(\mu), \quad v > 1. \tag{5.17}$$

В ближайших рассмотрениях мы будем иметь в виду, что $v \geq 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Положим

$$M = b\zeta(\mu),$$

где $b$ — какая-нибудь точка из интервала $(1, \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}})$, например, его середина. Тогда, с одной стороны, при $t \geq M$

$$f'(t) \geq f'(M) = -b^{\alpha-1}l'(\zeta(\mu)) + \mu \sim \mu(1 - b^{\alpha-1}) = c\mu, \quad c > 0, \tag{5.18}$$

с другой, полагая для краткости $\zeta(\mu) = \zeta$, имеем

$$f(M) \sim -l(b\zeta) + \mu b\zeta \sim -\frac{l'(b\zeta)b\zeta}{\alpha} + \mu b\zeta \sim \left(1 - \frac{b^{\alpha-1}}{\alpha}\right)\mu b\zeta, \tag{5.19}$$

где $b^{\alpha-1} > \alpha$. Так как

$$\mu\zeta(\mu) > \mu^{\frac{\alpha}{\alpha-1}+\delta}, \quad l(M(\varepsilon)) = l\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right) > \mu^{-\alpha+\delta}$$

при любом $\delta > 0$ и достаточно малых $\mu$, интеграл

$$\int\limits_{M(\varepsilon)}^{M} e^{f(t)}\,dt,$$

являющийся частью интеграла в правой части (5.15), оценивается в силу отмеченных выше свойств функции $f$ значением

$$\int\limits_{M(\varepsilon)}^{M} e^{f(t)}\,dt \leq Me^{-\mu^{-\alpha+\delta}} = b\zeta(\mu)e^{-\mu^{-\alpha+\delta}} = o(\mu^2) \tag{5.20}$$

при $\mu \to 0$. Очевидно, что такого же рода оценку допускает слагаемое $V(M(\varepsilon))h$ в (5.15).

Для вычисления другой части $\int\limits_M^y e^{f(t)}\,dt$ интеграла в (5.15) в случае $y > M$ (или, что то же, $v^{\frac{1}{1-\alpha}} > b$) воспользуемся неравенством (5.18), означающим, что при вычислениях интеграла достаточно рассматривать лишь его часть по «окрестности» точки $y$. Имеем при $t = y - u$, $u = o(y)$, $U = o(y)$, $U \gg \mu^{-1}$, в силу (5.16)

$$f(t) - f(y) = l(y) - l(y-u) - \mu u = l'(y)u(1+o(1)) - \mu u \sim \mu u\left(\frac{1}{v} - 1\right).$$

Поэтому

$$\mu\int\limits_{y-U}^{y} e^{f(t)}\,dt \sim \mu e^{f(y)}\int\limits_0^U e^{\mu u(1/v-1)}\,du \leq e^{f(y)}\frac{v}{v-1}; \tag{5.21}$$

интеграл $\int\limits_{M}^{y-U}$ оценивается аналогичным образом и дает значение $o(e^{f(y)})$.

Мы можем закончить теперь оценку $R(\mu,y)$. Собирая оценки (5.14), (5.15), (5.20), (5.21), получаем

$$\begin{gathered} R(\mu,y)\le 1+\frac{\mu^2 h}{2}(1+o(1))+\frac{ve^{f(y)}}{v-1}(1+o(1)),\\ R^n(\mu,y)\le \exp\left\{\frac{nh\mu^2}{2}(1+o(1))+\frac{vn}{v-1}e^{f(y)}(1+o(1))\right\}. \end{gathered}\tag{5.22}$$

Положим

$$\mu=\frac{1}{y}\ln T,\quad T=\frac{r(1-\alpha)}{nV(y)}\equiv\frac{c}{nV(y)}$$

и заметим, что при $\sigma(y)=nw(y)>\frac{2r}{h}$ неравенство (5.7) становится тривиальным (правая часть его неограниченно растет). Для уклонений $y$ таких, что $\sigma(y)\le\frac{2r}{h}$, выполняется $n\le c_1y^{2-\alpha+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon>0$ и, стало быть,

$$\mu=\frac{1}{y}\ln T\sim-\frac{1}{y}\ln nV(y)\ge\frac{l(y)}{y}(1+o(1))\sim\frac{l'(\alpha)}{\alpha}.$$

Это означает, что в (5.16) $v\approx 1/\alpha>1$ и все предположения, сделанные относительно $\mu$ и $v$, выполнены. Далее, как и прежде, находим

$$\ln P\le-\mu x+\frac{nh\mu^2}{2}(1+o(1))+\frac{nV(y)}{r(1-\alpha)}e^{\mu y}(1+o(1)),\tag{5.23}$$

$$\frac{nV(y)}{r(1-\alpha)}e^{\mu y}=r,\quad -\mu x+\frac{nh\mu^2}{2}=(-r+\rho)\ln T,$$

где

$$\rho=\frac{nh\ln T}{2y^2}=-\frac{nh(\ln nV(y)+\ln c)}{2y^2},\quad c=r(1-\alpha).$$

Здесь при $nw(y)=\sigma(y)$ имеем (см. (5.5))

$$-\frac{\ln V(y)}{y^2}=l(y)y^{-2}=w(y)=\frac{\sigma(y)}{n}.\tag{5.24}$$

Поэтому, считая для простоты, что $cn\ge 1$, получим

$$\rho\le\frac{\sigma(y)h}{2},\tag{5.25}$$

$$P\le c_1[nV(y)]^{r-\frac{h\sigma(y)}{2}}$$

(если $cn<1$, то в правой части (5.25) надо добавить $o(1)$, а затем убрать это слагаемое, незначительно увеличив $h$). Это доказывает первую часть теоремы.

Рассмотрим теперь крамеровскую область уклонений, где $\sigma=nw(x)$ может быть большим. Здесь мы положим $y=x$,

$$\mu=\frac{x}{nh},$$

так что

$$\mu=\frac{xw(x)}{\sigma h}=\frac{l(x)}{x\sigma h}\sim\frac{l'(x)}{\alpha\sigma h},\quad v\sim\frac{1}{\alpha\sigma h}$$

(см. (5.16)) и условие $v > 1$, предполагавшееся в (5.16), может быть при больших $\sigma$ не выполнено. Если $v > b^{1-\alpha}$ (или, что то же, $x = y > M$, см. (5.17)), то все оценки $R(\mu, y)$, сделанные выше, сохраняются и мы вновь будем иметь (5.22). Если же $v \le b^{1-\alpha}$, то $\int\limits_M^y e^{f(t)}\,dt$ в предыдущих рассмотрениях исчезает, как исчезает и последнее слагаемое в правой части (5.22). В этом случае немедленно получаем второе утверждение теоремы.

Итак, осталось рассмотреть случай $v = \frac{1}{\alpha\sigma h} > b^{1-\alpha} > 1$ и оценить в этом случае последнее слагаемое в (5.22), логарифм которого при $\mu = \frac{y}{nh} = \frac{x}{nh}$ равен

$$H = \mu y + \ln nV(y) + O(1) = \frac{x^2}{n}\left(\frac{1}{h} - w(y)n\right) + \ln n + O(1)$$
$$= \frac{x^2}{n}\left(\frac{1}{h} - \sigma\right) + \ln n + O(1).$$

Если $\sigma h \ge 1 + \varepsilon$ и $x^2 \gg n \ln n$, то $H \to -\infty$ при $n \to \infty$. Если же $c\sqrt{n} < x < n^{1/2+\varepsilon}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, то

$$\sigma = nw(x) \ \to\ \infty, \qquad \frac{x^2\sigma}{n} = x^2 w(x) \gg \ln n \to \infty$$

и, стало быть, вновь $H \to -\infty$. Таким образом, последнее слагаемое в (5.22), (5.23) пренебрежимо мало и

$$\ln P \le -\frac{x^2}{2nh}(1 + o(1)) + o(1),$$

где слагаемое $o(1)$ можно убрать за счет небольшого увеличения $h$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 5.1. Имеем

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le nV(y) + c[nV(y)]^{r - \frac{h\sigma(y)}{2}}. \tag{5.26}$$

Наша цель — выбрать $y$ (или $r = \frac{x}{y}$) по возможности оптимальным образом. Заметим, что при $x \to \infty$, $r$, сравнимых с 1, выполняется

$$\sigma(y) = \sigma\left(\frac{x}{r}\right) \sim r^{2-\alpha}\sigma, \quad l(y) \sim r^{-\alpha} l(x).$$

Второе слагаемое в (5.26) будет иметь в качестве показателя экспоненты величину

$$-l(x)\left[r^{1-\alpha} - \frac{h\sigma}{2} r^{2-2\alpha}\right](1 + o(1)), \quad \sigma = \sigma(x),$$

достигающую своего минимального значения в окрестности точки $\hat{r} = (\sigma h)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, равного

$$-l(x)\frac{1}{2\sigma h}\big(1 + o(1)\big).$$

Поэтому если $\hat{r}^{\ -\alpha} = (\sigma h)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \ge \frac{1}{2\sigma h}$ или, что то же, $\sigma h \ge 2^{\alpha-1}$, то показатель экспоненты второго слагаемого в (5.26) будет больше или равен, чем показатель первого, и мы в качестве искомого значения $r_0$ можем взять $r_0 = \hat{r}$. Так как, кроме того, степень числа $n$ во втором слагаемом в (5.26) равна $\frac{1}{2\sigma h} \le 2^{-\alpha} < 1$, то из (5.26) получаем

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cnV(x)^{\frac{(1+o(1))}{2\sigma h}},$$

где множитель $1 + o(1)$ можно убрать за счет небольшого изменения $h$. Это доказывает (5.12).

Если же $\sigma h < 2^{\alpha-1}$, то в качестве $r_0$ надо взять значение, при котором слагаемые в правой части (5.26) станут примерно равными, т. е. $r_0$ следует положить равным минимальному решению уравнения

$$1 = r - \frac{\sigma h}{2} r^{2-\alpha},$$

а именно

$$r_0 = 1 + \frac{\sigma h}{2} + (2-\alpha)\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2 + \dots \equiv 1 + \sigma^*,$$

$\sigma^* \sim \frac{\sigma h}{2}$ при $\sigma \to 0$. В этом случае

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cnV\left(\frac{x}{1+\sigma^*}\right) = cnV(x)^{(1+\sigma^*)^{-\alpha}(1+o(1))},$$

где множитель $1 + o(1)$ вновь можно убрать за счет небольшого изменения $h$. Это доказывает (5.11). Два последующие неравенства в следствии 5.1 суть очевидные следствия (5.11), так как в первом из них

$$V(x)^{(1+\sigma^*)^{-\alpha}} = e^{-l(x)(1+\sigma^*)^{-\alpha}} \le e^{-l(x)+O(l(x)\sigma^*)},$$

где $l(x)\sigma^* \sim l(x)\frac{\sigma h}{2} < \frac{ch}{2}$; во втором $l(x)\sigma^* \to 0$.

Утверждение (5.13) следует из (5.26) при $x = y$, из (5.8) и того, что при $\sigma h \ge 1 + \varepsilon$

$$e^{-\frac{x^2}{2nh}} = e^{-\frac{l(x)}{2\sigma h}} \ge V(x) e^{l(x)\frac{1+2\varepsilon}{2+2\varepsilon}} \gg nV(x)$$

при $l(x) > 2\ln n$.

**5.2. Оценки распределения** $\overline{S}_n(a)$. Цель этого пункта, как и пп. 3.2, 4.2, оценить

$$P(a,v) \equiv \mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x,\ B(v)),$$

где

$$B(v) = \bigcap_{j=1}^{n} B_j(v), \quad B_j(v) = \{X_j \le y + vj\}.$$

Положим

$$z = z(x) = \frac{1}{l'(x)} \sim \frac{x}{\alpha l(x)} = o(x). \tag{5.27}$$

Тогда в силу $[D]$ $z(x)$ есть приращение аргумента $x$, при котором $l(x+zt)-l(x) \approx t$ или, что то же, $V(x+zt) \sim e^t V(x)$. Если аргумент у функции $z(\cdot)$ отличен от $x$, то мы будем его указывать.

**Теорема 5.2.** *Пусть $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1)$ фиксированы, $v \le \frac{a(1-\delta)}{r}$. Тогда при $y \ge \varepsilon x$*

$$P(a,v) \le c\min(z^{r+1}(y), n^r)V^r(y), \quad r = \frac{x}{y}. \tag{5.28}$$

Отметим, что оценка (5.28) не является неулучшаемой и $z^{r+1}(y)$ может быть заменена на $z(y)^r$. Это связано с тем, что в доказательстве теоремы использовались грубые неравенства (5.33). Доказательство точной оценки требует дополнительных усилий. С другой стороны, в дальнейшем для отыскания точной асимптотики $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ (см. [1]) неравенство (5.28) оказывается достаточным.

В связи с отмеченным недостатком неравенства (5.28) из него не удается извлечь следующее утверждение, доказательство которого мы построим иначе.

**Теорема 5.3.**

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le cmV(x), \quad m = \min(z, n),\ z = z(x). \tag{5.29}$$

Для доказательства теоремы 5.2 нам понадобится вспомогательное утверждение. Обозначим

$$S(k,r) = \sum_{j=1}^{n} j^k V^r(y + vj). \tag{5.30}$$

**Лемма 5.1.**

$$S(k,r) \le ck! \min\left(A^{k+1}, \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\right) V^r(y), \tag{5.31}$$

*где* $A = \frac{z(y)}{rv}$, *c при* $n \to \infty$ *можно выбрать сколь угодно близким к* 1.

Доказательство. Очевидно, что

$$S(k,r) \le cI(k,r),$$

где

$$I(k,r) = \int_0^n t^k V^r(y + vt)\,dt = \frac{1}{v^{k+1}} \int_0^{nv} u^k V^r(y+u)\,du.$$

Для $u \le nv = o(y)$ имеем

$$V^r(y+u) = V^r(y) e^{-\frac{ur}{z(y)}(1+o(1))}.$$

Так как

$$\int_0^A t^k e^{-t}\,dt \le \min\left(k!, \frac{A^{k+1}}{k+1}\right),$$

то

$$\int_0^{nv} u^k V^r(y+u)\,du \le V^r(y)\left(\frac{z(y)}{r}\right)^{k+1} \int_0^{\frac{nvr}{z(y)}} t^k e^{-t(1+o(1))}\,dt$$
$$\le cV^r(y)\left(\frac{z(y)}{r}\right)^{k+1} \min\left[k!, \left(\frac{nvr}{z(y)}\right)^{k+1} \frac{1}{k+1}\right].$$

Очевидно, что эта оценка, доказывающая (5.31), сохранится и для произвольных $nv$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.2. При $n \le z(y)$ выполняется

$$\sigma(y) = nw(y) \le z(y) y^{-2} l(y) \sim \frac{1}{\alpha y}.$$

Поэтому в силу теоремы 5.1

$$P(a,v) \le \mathbf{P}\left(\overline{S}_n > x,\ \bigcap_{j=1}^{n} \{X_j < y + vn\}\right) \le c[nV(y_1)]^r,$$

где $y_1 = y + vn < y + vz(y) \sim y$. Отсюда следует, что

$$P(a,v) \le c[nV(y)]^r.$$

Пусть теперь $n$ произвольно. Оценим сначала

$$\mathbf{P}(S_n - an > x;\ B(v)) \le \mathbf{P}\left(S_n > x + an;\ \bigcap_{j=1}^{n}\{X_j \le y + vn\}\right).$$

Воспользуемся теоремой 5.1, в которой в качестве $x$ надо взять $x_1 = x + an$, а в качестве $y$ и $r$ — соответственно величины $y_1 = y + vn$ и $r_1 = \frac{x_1}{y_1}$, так что

$$r_1 \ge r\frac{x + an}{x + a(1-\delta)n} \quad \text{при } v \le \frac{a(1-\delta)}{r}. \tag{5.32}$$

В силу теоремы 5.1

$$\mathbf{P}(S_n - an > x;\ B(v)) \le c[nV(y_1)]^{r_1 - \frac{h\sigma_1}{4}},$$

где $\sigma_1 = nw(y_1) = ny_1^{\alpha-2}L(y_1) = o\left(\frac{n}{x}\right)$ при $y \ge \varepsilon x$, $x \to \infty$. С другой стороны,

$$r_1 \ge r\left(1 + f\left(\frac{n}{x}\right)\right),$$

где в силу (5.32)

$$f(t) = \frac{1 + at}{1 + at(1-\delta)} - 1 = \frac{at\delta}{1 + at(1-\delta)} \ge c\min(1, t).$$

Поэтому при всех достаточно больших $x$

$$r_1 - \frac{h\sigma_1}{2} \ge r, \quad \mathbf{P}(S_n - an > x;\ B(v)) \le c[nV(y + vn)]^r.$$

Это позволяет оценить

$$P(a, v) \le \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(S_k - ak > x;\ B(v))$$

$$\le c\sum_{k=1}^{n} k^r V^r(y + vk) \le c_1[\min(z(y), n)]^{r+1}V^r(y). \tag{5.33}$$

В последнем неравенстве мы использовали лемму 5.2. Теорема 5.2 доказана.

Доказательство теоремы 5.3. При $n \le z$ утверждение теоремы следует из следствия 5.1. Действительно, в этом случае

$$\sigma l(x) \le zl^2(x)x^{-2} \sim \frac{l(x)}{\alpha x} \to 0$$

и, стало быть, выполнены условия третьего утверждения в п. 1 следствия 5.1. Поэтому

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le \mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le nV(x)(1 + o(1)).$$

При $n \ge z$ воспользуемся результатами [12], в силу которых при $1 - F(t) = V(t)$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_\infty(a) > x) = \frac{1}{a}\int_0^\infty V(x + t)\,dt(1 + o(1))$$

Но мы только увеличим по распределению $\overline{S}_\infty(a)$, если вместо $[M^+]$ будем считать выполненным $1 - F(t) = V(t)$. Поэтому (см. лемму 5.1)

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le \mathbf{P}(\overline{S}_\infty(a) > x) \le czV(x).$$

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 5.3 можно получить также в качестве следствия результатов из [11], где для так называемых сильно субэкспоненциальных распределений установлено соотношение (3.10). Как сообщил мне Д. А. Коршунов, достаточные условия принадлежности субэкспоненциальных распределений будут выполнены, если выполнены $[R]$ и $[D]$.

## § 6. Оценки снизу. Некоторые следствия для регулярных хвостов

В § 2–5 содержались оценки для распределений $\overline{S}_n$, $\overline{S}_n(a)$ сверху. Получим теперь оценки для распределений $S_n$ снизу. Они оказываются существенно более простыми и общими.

**6.1. Общая оценка снизу. Оценки снизу в случае $\mathbf{E}X_j^2 = \infty$.** Здесь нам не понадобятся условия о существовании правильно меняющихся мажорант или минорант. Положим

$$\overline{F}(t) = 1 - F(t).$$

**Теорема 6.1.** *Пусть $K(n)$ — произвольная последовательность, $Q_n(t) = \mathbf{P}\big(\frac{S_n}{K(n)} \le -t\big)$. Тогда при $y = x + tK(n-1)$*

$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge n\overline{F}(y)\left(1 - Q_{n-1}(t) - \frac{n-1}{2}\overline{F}(y)\right).$$

Доказательство. Обозначим $G_n = \{S_n > x\}$, $B_j = \{X_j \le y\}$. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge \mathbf{P}\left(G_n;\ \bigcup_{j=1}^{n} \overline{B}_j\right) \ge \sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) - \sum_{i<j}\mathbf{P}(G_n\overline{B}_i\overline{B}_j)$$
$$\ge \sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) - \frac{n(n-1)}{2}(\overline{F}(y))^2.$$

Здесь при $y = x + tK(n-1)$

$$\mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) = \int_y^\infty dF(u)\mathbf{P}(S_{n-1} > x - u)$$
$$\ge \mathbf{P}(S_{n-1} > x - y)\overline{F}(y) = \overline{F}(y)(1 - Q_{n-1}(t)).$$

Теорема доказана.

Найдем теперь условия, обеспечивающие явные оценки для $K(n)$ и $Q_n(t)$ в случае $\mathbf{E}X_j^2 = \infty$.

Будем говорить, что *выполнено условие* $[M_+^+]$, если при некотором $c \ge 1$

$$V(t) \le 1 - F(t) \le cV(t), \tag{6.1}$$

где $V(t)$ определено в (1.3). (Если $c = 1$, то $[M_+^+]$ совпадает с $[R]$.)

Мы будем использовать также условие

$[R_\rho]$. *Выполнено $[R]$ при $\beta < 2$ и, кроме того,*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{F(-t)}{V(t)} = \rho, \quad 0 \le \rho < \infty.$$

*При $\rho = 0$ предполагается, что выполнено $[M^-]$.*

При выполнении $[R_\rho]$ нормированные суммы $\frac{S_n}{N(n)}$, $N(n) = V^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right)$, сходятся по распределению к устойчивому закону $F_\beta$ с параметром $\beta$ (см. [13]; напомним, что мы предполагаем $\mathbf{E}X_j = 0$ при $\beta > 1$):

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{N(t)} < t\right) \Rightarrow F_\beta(t). \tag{6.2}$$

**Теорема 6.2.** 1. *Пусть выполнено условие* $[M^-]$ *при* $\alpha < 1$, $N_W(n) = W^{(-1)}\big(\frac{1}{n}\big)$. *Тогда при* $y = x + tN_W(n-1)$

$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge n\overline{F}(y)\left(1 - ct^{-\alpha+\delta} - \frac{n-1}{2}n\overline{F}(y)\right) \tag{6.3}$$

*при любом фиксированном* $\delta > 0$ *и подходящем* $c < \infty$.

*Пусть дополнительно выполнены условия* $[M_+^+]$. *Тогда при* $W(t) \le c_1V(t)$, $x = sN(n) \to \infty$ $(N(n) = V^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right))$ *справедливо*

$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge nV(x)(1 - \varphi(s)), \tag{6.4}$$

*где* $\varphi \downarrow 0$ *при* $s \uparrow \infty$.

2. *Пусть выполнены условия* $[M^\pm]$ *при* $\alpha \in (1,2)$, $\mathbf{E}X_j = 0$, $W(x) \le c_1V(x)$. *Тогда* (6.3) *справедливо при* $y = x + tN_W(n-1)$, $t \ge (\alpha+\delta)\frac{N(n-1)}{N_W(n-1)}$ *и любом фиксированном* $\delta > 0$. *Если, кроме того, выполнено* $[M_+^+]$, *то*

$$\mathbf{P}(S_n \ge x) \ge nV\left(x\left(1 + \theta\frac{\ln n}{s}\right)\right)(1 - \varphi(s)), \tag{6.5}$$

*где* $\theta = \frac{(\alpha+\delta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$. *При* $\alpha = \beta$ *слагаемое* $\theta\ln n$ *следует заменить на* $o(\ln n)$.

3. *Если выполнено* $[R_\rho]$ *при* $\rho > 0$, $\beta < 2$, *то справедливо* (6.4). *Если выполнено* $[R_\rho]$ *при* $\rho = 0$, $\beta \in (1,2)$, $\mathbf{E}X_j = 0$, *то при* $x = sN(n)$, $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\big(S_n > x\big) \ge nV(x)[1 - F_\beta(0)(1 + o(1)) - \varphi(s)], \tag{6.6}$$

*где* $F_\beta(0) < 1$.

Доказательство. Пусть сначала $\alpha < 1$. Положим в теореме 6.1 $K(n) = N_W(n)$. Тогда в силу следствия 2.1, примененного к суммам $-S_n$, получаем

$$Q_n(t) = \mathbf{P}\big(-S_n \ge tN_W(n)\big) \le c_1nW(tN_W(n)) \le ct^{-\alpha+\delta} \tag{6.7}$$

при любом фиксированном $\delta > 0$ и всех $t \ge 1$. Это доказывает (6.3).

Пусть теперь дополнительно выполнено $[M_+^+]$, $W(t) \le c_1V(t)$, $x = sN(n)$. Тогда $N_W(n) \le c_2N(n)$. Стало быть, при $t = s^{1-\delta}$, $\delta > 0$, будем иметь $y = sN(n) + s^{1-\delta}N_W(n-1) \le x\big(1 + c_2s^{-\delta}\big)$, $\overline{F}(y) \ge V(x)(1+\varphi(s))$, $\varphi(s) \downarrow 0$ при $s \uparrow \infty$.

Выбирая $\delta$ так, чтобы $(-\alpha+\delta)(1-\delta) \le -\frac{\alpha}{2}$, и учитывая (6.1) при $\beta \le \alpha$ из (6.3) получим (6.4).

Пусть теперь выполнены условия $[M^\pm]$ при $\alpha \in (1,2)$, $\mathbf{E}X_j = 0$, $W(x) < c_1V(x)$. Тогда (6.3) в силу следствия 3.1 будет справедливо лишь для $t$ таких, что

$$nV\left(\frac{tN_W(n)}{|\ln nW\big(tN_W(n)\big)|}\right) \le 1. \tag{6.8}$$

Так как $nW(tN_W(n)) > t^{-\alpha-\delta}$, $\delta > 0$, при $tN_W(n) \to \infty$, то $|\ln nW(tN_W(n))| < (\alpha+\delta)\ln t$ и (6.8) будет выполнено, если

$$\frac{t}{\ln t} = (\alpha+\delta)\frac{N(n)}{N_W(n)}.$$

Это доказывает (6.3).

Заметим, что из последнего равенства следует

$$\ln t \sim \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\ln n$$

(при $\alpha = \beta$ мы будем понимать это соотношение как $\ln t = o(\ln n)$).

Получим теперь соотношения вида (6.4). Пусть сначала $\alpha \neq \beta$. Тогда

$$y = sN(n) + tN_W(n-1) \leq sN(n) + (\alpha+\delta)N(n)\ln t$$
$$\leq sN(n)\left(1 + \frac{(\alpha+\delta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}\frac{\ln n}{s}\right).$$

Это доказывает (6.5).

При $\alpha = \beta$ в соответствии с предыдущим $\theta \ln n$ надо заменить на $o(\ln n)$.

Рассмотрим теперь третье утверждение теоремы, когда выполнено условие $[R_\rho]$.

Если $\rho > 0$, то $W(t) \sim \rho V(t)$, $N_W(n) \sim \rho^\alpha N(n)$ и в силу следствий 2.1, 3.1 вновь справедливы соотношения (6.7), (6.3), (6.4).

Если $\rho = 0$, $\beta > 1$, то

$$Q_n(t) \leq \mathbf{P}(S_n \leq 0) \to F_\beta(0)$$

при $n \to \infty$, где $F_\beta(0) < 1$ при $\beta > 1$, так как среднее значение распределения $F_\beta$ в этом случае равно 0.

Теорема доказана.

Получим теперь ряд следствий для регулярных хвостов.

**Следствие 6.1.** 1. *Пусть выполнено условие $[R_\rho]$; при этом либо $\rho > 0$, либо $\alpha < 1$. Тогда для $x = sN(n)$, $\Pi = \Pi(x) = nV(x)$*

$$\inf_{x:s>t} \frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{\Pi} \geq 1 - \varphi(t), \tag{6.9}$$

$\varphi(t) \downarrow 0$ *при* $t \uparrow 0$.

2. *Пусть выполнено условие $[R_\rho]$ при $\rho = 0$, $\alpha \in (1,2)$, $\mathbf{E}X_j = 0$. Тогда*

$$\inf_{x:s>t} \frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{\Pi} \geq 1 - \varphi\left(\frac{t}{\ln n}\right). \tag{6.10}$$

Следствие очевидным образом вытекает из теоремы 6.2.

**Следствие 6.2.** *Пусть выполнены условия п. 1 следствия 6.1. Тогда существует функция $\varphi(t) \downarrow 0$ при $t \uparrow \infty$ такая, что*

$$\sup_{x:s>t} \left|\frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{\Pi} - 1\right| \leq \varphi(t), \tag{6.11}$$

$$\sup_{x:s>t} \left|\frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)}{\Pi} - 1\right| \leq \varphi(t). \tag{6.12}$$

Если выполнены условия п. 2 следствия 6.1, то сходимость $\frac{\mathbf{P}(S_n>x)}{\Pi} \to 1$ при $s \to \infty$, $s \leq c\ln n$, доказать путем использования полученных неравенств не удается, так как в этом случае правая часть в (6.10) не сходится, вообще говоря, к 1.

Доказательство. Утверждение следствия 6.2 вытекает из следствий 2.1, 3.1, 6.1.

Соотношение эквивалентности $\mathbf{P}(S_n > x) \sim nV(x)$ при $x = t_nN(n)$, $t_n \to \infty$, и при условии $[R_\rho]$ сходимости $\frac{S_n}{N(n)}$ по распределению к устойчивому закону получено в [14–16]. Аналогичное утверждение для $\overline{S}_n$ вытекает из [17], но при более частных предположениях относительно $F$ (при условии $F \in \mathscr{L}$, где $\mathscr{L}$ определено в следующем пункте).

**6.2. Оценки снизу в случае $\mathbf{E}X_j^2 < \infty$. Следствия для регулярных хвостов с показателем $\beta > 2$ и для семиэкспоненциальных хвостов.**

**Теорема 6.3.** *Пусть* $\mathbf{E}X_j = 0$, $\mathbf{E}X_j^2 = 1$. *Тогда для* $y = x + u\sqrt{n-1}$

$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge n\overline{F}(y)\left[1 - u^{-2} - \frac{n-1}{2}\overline{F}(y)\right]. \tag{6.13}$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 6.1, если положить $K(n) = \sqrt{n}$ и воспользоваться неравенством Чебышева, в силу которого

$$Q_n(u) \le u^{-2}.$$

**Следствие 6.3.** *Пусть выполнено условие регулярности* $[R]$ *при* $\beta > 2$, $\mathbf{E}X_j^2 < \infty$, $x = sN(n)$, $N(n) = \sqrt{(2-\beta)n\ln n}$. *Тогда существует функция* $\varphi(t) \downarrow 0$ *при* $t \uparrow \infty$ *такая, что*

$$\sup_{x:s\ge t}\left|\frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{nV(x)} - 1\right| \le \varphi(t), \tag{6.14}$$

$$\sup_{x:s\ge t}\left|\frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)}{nV(x)} - 1\right| \le \varphi(t). \tag{6.15}$$

Доказательство. Положим в теореме 6.3 $y = x + u\sqrt{n}$, $u = \sqrt{s}$. Тогда при любом $\delta > 0$ и достаточно больших $x$ получаем

$$y = x\left(1 + \frac{u}{s\sqrt{(\beta-2)\ln n}}\right),$$

$$\frac{V(y)}{V(x)} \ge \left(1 + \frac{uc_1}{s\sqrt{\ln n}}\right)^{-\beta-\delta} \ge 1 - \frac{c_2 u}{s\sqrt{\ln n}} = 1 - \frac{c_2}{\sqrt{s\ln n}}.$$

Кроме того,

$$nV(y) \le nV(x) = nV(s\sqrt{(2-\beta)n\ln n}) \le cns^{-\beta+\delta}(n\ln n)^{-\frac{\beta-\delta}{2}}.$$

Выбирая $\delta < \beta - 2$, в силу теоремы 6.3 получим

$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge nV(x)\left(1 - \frac{c_1}{\sqrt{s}}\right)\left(1 - \frac{c_2}{s}\right).$$

Остается воспользоваться следствием 4.2 (см. также замечание 4.1). Следствие доказано.

Библиографию по поводу соотношений асимптотической эквивалентности

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim nV(x), \quad \mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \sim nV(x)$$

при выполнении условия $[R]$ и $\beta > 2$ см., например, в [9, 18–20].

Утверждение, аналогичное следствию 6.3, справедливо и для *семиэкспоненциальных хвостов.*

**Следствие 6.4.** *Пусть выполнено условие* $[R]$ *при семиэкспоненциальных* $V(t)$ *вида* (1.4), $\mathbf{E}X_j^2 < \infty$. *Пусть* $w_2^{(-1)}(\cdot)$ — *функция, обратная к* $w_2(t) = t^{2\alpha-2}L^2(t)$, $N_2(n) = w_2^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right)$ (*см.* (5.9), (5.10)). *Положим* $x = sN_2(n)$. *Тогда существует функция* $\varphi(t) \downarrow 0$ *при* $t \uparrow \infty$ *такая, что выполнены соотношения* (6.14), (6.15).

Соотношение эквивалентности $\mathbf{P}(S_n > x) \sim nV(x)$ при $x \gg N_2(n)$ ранее установлено в [21].

Следствия 6.2–6.4 устанавливают *равномерную* сходимость в соответствующих предельных теоремах в области всех значений $n$ и $x$ таких, что $x \geq tN(n)$, где $t \to \infty$ — любая фиксированная последовательность, сходящаяся к $\infty$, $N(n)$ — подходящим образом выбранная функция, для каждого конкретного случая определенная выше.

Доказательство следствия 6.4 совершенно аналогично доказательству следствия 6.3. Надо воспользоваться теоремой 6.3 и следствием 5.1 (см. также замечание 5.1).

**6.3. Оценки снизу для распределения** $\overline{S}_n(a)$. Рассмотрим случай, когда

$$d^b = \mathbf{E}|X_1|^b < \infty, \quad 1 < b \leq 2, \quad \mathbf{E}X_1 = 0. \tag{6.16}$$

Обозначим

$$Z_b(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \overline{F}(x + aj + td(j-1)^{1/b}).$$

Очевидно, $Z_b(x,t) \to 0$ при $x \to \infty$.

**Теорема 6.4.** *При всех* $n$, $x$ *и* $t$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \geq Z_b(x,t)[1 - (1+\varphi(t))t^{-b} - Z_b(x,t)], \tag{6.17}$$

*где* $\varphi(t) \equiv 0$ *при* $b = 2$; $\varphi(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$, $b < 2$.

Положим

$$I_b(x,t) = \int_1^{n+1} F(x + au + td(u-1)^{1/b}) \leq Z_b(x,t).$$

Нетрудно указать значения $t_0 > 1$, $z_0 = z_0(t_0) > 0$ такие, что при $Z_b(x,t) < z_0$, $t > t_0$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \geq I_b(x,t)[1 - (1+\varphi(t))t^{-b} - I_b(x,t)]. \tag{6.18}$$

Действительно, функция $g(z) = z(1 - ct^{-b} - z)$ при $t > t_0 > 1$, $c = \max_t(1 + \varphi(t))$, монотонно возрастает на $[0, z_0]$, где $z_0 = z_0(t_0) > 0$. Следовательно, при $Z_b(x,t) < z_0$ правая часть (6.17) превосходит

$$I_b(x,t)(1 - (1+\varphi(t))t^{-b} - I_b(x,t)).$$

Значения $t_0$, $z_0$ нетрудно оценить в явном виде. Например, при $b = 2$ можно положить $t_0 = 2$, $z_0 = 3/8$.

**Следствие 6.5.** *Пусть выполнено* (6.16), *а также условие* $[M_+]$ *с функцией* $V$ *вида* (1.3) *или вида* (1.4), *где* $l$ *удовлетворяет* $[D]$. *Тогда при* $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \geq \frac{1}{a} \int\limits_x^{x+an} V(u)\,du(1+o(1)). \tag{6.19}$$

Доказательство следствия 6.5. Положим в (6.18) $t = \ln x$. Тогда при $x \to \infty$

$$I_b(x,t) \geq \int\limits_1^{n+1} V(x + au + d(u-1)^{1/b} \ln x)\,du = \frac{1}{a} \int\limits_x^{x+an} V(u)\,du(1+o(1)).$$

Так как $I_b(x,t) \to 0$ при $x \to \infty$, из (6.18) следует (6.19).

Доказательство теоремы 6.4. Положим

$$G_n = \{\overline{S}_n(a) > x\}, \quad B_j = \{X_j \leq x + aj + td(j-1)^{1/b}\}.$$

Тогда с помощью тех же рассуждений, что и в теореме 6.1, получаем

$$\mathbf{P}(G_n) \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) - \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(\overline{B}_j)\right)^2. \tag{6.20}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) &> \mathbf{P}(S_{j-1} > -t(d(j-1))^{1/b}; \overline{B}_j) \\ &= \overline{F}(x + aj + td(j-1)^{1/b})[1 - \mathbf{P}(S_{j-1} \leq -td(j-1)^{1/b})].\end{aligned} \tag{6.21}$$

Если $b = 2$, то в силу неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(S_{j-1} < -td(j-1)^{1/2}) \leq t^{-2}.$$

Если $b < 2$, то выполнены условия $[M^{\pm}]$ при $\alpha = \beta = b$, $V(t) = W(t) = d^b t^{-b}$ и, стало быть, в силу следствия 3.1

$$\mathbf{P}(S_{j-1} < -td(j-1)^{1/b}) \leq (1+\varphi(t))(j-1)W(td(j-1)^{1/b}) = (1+\varphi(t))t^{-b},$$

где $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Из (6.20), (6.21) и сказанного выше следует, что

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) \geq Z_b(x,t)\big(1 - (1+\varphi(t))t^{-b}\big),$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(\overline{B}_j) = Z_b(x,t), \quad \mathbf{P}(G_n) \geq Z_b(x,t)(1 - (1+\varphi(t))t^{-b} - Z_b(x,t)).$$

Теорема доказана.

Следствие 6.5 можно получить также как следствие из [11]. Как уже отмечалось, из результатов [11] вытекает, что при выполнении $[R]$ и функции $V$ вида (1.3) или (1.4), где $l$ удовлетворяет $[D]$, справедливо асимптотическое представление (3.10), из которого следует (6.19).

## § 7. Равномерная относительная сходимость к устойчивому закону. Закон повторного логарифма в случае $\mathbf{E}X_j^2 = \infty$

В этом параграфе мы получим ряд следствий оценок § 2, 3, 6.

**7.1. Равномерная относительная сходимость к устойчивому закону.** Обозначим через $\mathscr{L}$ класс распределений $F$, для которых выполнено $[R_\rho]$ и $L(t) \to L = \mathrm{const}$ при $t \to \infty$. Для распределений из $\mathscr{L}$ обратная функция $V^{(-1)}$ имеет простую явную асимптотику:

$$V^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right) = N(n) \sim (Ln)^{1/\beta}. \tag{7.1}$$

Очевидно, что устойчивое распределение $F_\beta$ в (6.1) также принадлежит $\mathscr{L}$, при этом для любого $F \in \mathscr{L}$

$$nV(vN(n)) \sim nv^{-\beta}(Ln)^{-1}L = v^{-\beta}. \tag{7.2}$$

Класс $\mathscr{L}$ есть не что иное, как *область нормального притяжения устойчивого закона* $F_\beta$ (см. [13]).

Свойство (7.2) позволяет получить следующее утверждение *о равномерной относительной сходимости к устойчивому закону.*

**Теорема 7.1.** *Пусть выполнено $[R_\rho]$, при этом либо $\rho > 0$, либо $\alpha < 1$. В этом случае $F \in \mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{t\ge 0}\left|\frac{\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{N(n)} > t\right)}{1 - F_\beta(t)} - 1\right| \to 0 \tag{7.3}$$

*при $n \to \infty$*

Утверждение теоремы означает, что для $F \in \mathscr{L}$ проблема больших уклонений для $\mathbf{P}(S_n > x)$ в известном смысле отсутствует: предельный закон $1 - F_\beta(t)$ обеспечивает хорошее приближение

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim 1 - F_\beta(x/N(n))$$

равномерно по всем $x \ge 0$. В центральной предельной теореме о сходимости к нормальному закону такое возможно, если только $X_j$ имеют в точности нормальное распределение.

Утверждение вида (7.3) (с оценкой скорости сходимости) вытекает также из результатов [22], но при значительно более сильном условии существования псевдомоментов

$$\int |t|^\gamma |F - F_\beta|(dt) < \infty$$

порядка $\gamma > \beta$, что с необходимостью означает высокую скорость сходимости $F(t) - F_\beta(t)$ к 0.

Доказательство теоремы 7.1. Достаточность. Пусть $F \in \mathscr{L}$. Из следствия 6.2 вытекает (см. (6.11)), что для любой последовательности $t \to \infty$ и $x = sN(n)$

$$\sup_{s>t}\left|\frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{nV(x)} - 1\right| \to 0. \tag{7.4}$$

Если $F = F_\beta$, то в силу (6.2) для любого фиксированного $s$

$$1 - F_\beta(s) \sim \mathbf{P}(S_n > sN(n)), \quad n \to \infty,$$

где правая часть в силу (7.2), (7.4) близка при больших $s$ к $s^{-\beta}$. Отсюда следует, что $1-F_\beta(s)\sim s^{-\beta}$ при $s\to\infty$ и (7.4) можно записать также в виде

$$\sup_{s>t}\left|\frac{\mathbf{P}(S_n>sN(n))}{1-F_\beta(s)}-1\right|\to 0 \tag{7.5}$$

при $n\to\infty$, $t=t_n\to\infty$. С другой стороны, из слабой сходимости (6.2) и непрерывности $F_\beta$ вытекает, что для любого $t>0$

$$\sup_{s\le t}\left|\frac{\mathbf{P}(S_n>sN(n))}{1-F_\beta(s)}-1\right|\to 0. \tag{7.6}$$

Но это означает, что найдется достаточно медленно возрастающая последовательность $t_n\to\infty$, такая, что (7.6) останется справедливым при замене $t$ на $t_n$. Это вместе с (7.5) доказывает (7.3).

Необходимость. Из (7.3), (7.4) вытекает

$$nV(tN(n))\sim ct^{-\beta}$$

или, что то же,

$$V(tN)\sim t^{-\beta}V(N),\quad L(tN)\sim L(N) \tag{7.7}$$

для любых последовательностей $t$ и $N$. Но это возможно лишь в случае $L(N)\to L = \mathrm{const}$. Если допустить противное, например, что $L(N)\to\infty$ при $N\to\infty$, то можно подобрать такую последовательность $N'$, что

$$L(N')>L^2(N). \tag{7.8}$$

Положив в (7.7) $t=\frac{N'}{N}$, получим $L(N')\sim L(N)$, что противоречит (7.8). Теорема доказана.

Замечание 7.1. Из доказательства теоремы и следствия 6.1 видно, что в случае $\rho=0$, $\alpha\in(1,2)$, $\mathbf{E}X_j=0$ соотношение (7.3) сохранится, если в нем $\sup\limits_{t\ge 0}$ заменить на $\sup\limits_{t\in B_n}$, где $B_n=(0,\infty)\setminus(t_n,t_n\ln n)$, $t_n\to\infty$ достаточно медленно. Сходимость в интервале $(t_n,t_n\ln n)$, по-видимому, можно получить, используя оценки скорости сходимости $\mathbf{P}(S_n/N(n)>v)$ к $F_\beta(v)$ (ср. с [22]).

Утверждение, аналогичное теореме 7.1, можно получить и для распределения $\overline{S}_n$.

Заметим прежде, что из «принципа инвариантности» в области сходимости к устойчивым законам следует, что

$$\frac{\overline{S}_n}{N(n)}\Rightarrow\bar\zeta(1), \tag{7.9}$$

где $\zeta(u)$ — устойчивый процесс, соответствующий распределению $F_\beta$ ($\zeta(1)\Subset F_\beta$), $\bar\zeta(t)=\sup\limits_{u\le t}\zeta(u)$. Обозначим через $H_\beta$ функцию распределения $\bar\zeta(1)$. Тогда из следствия 6.2, теоремы 7.1, (7.2) и того, что $\overline{S}_n\ge S_n$, аналогично предыдущему вытекает, что

$$1-H_\beta(t)\sim t^{-\beta}\quad\text{при } t\to\infty. \tag{7.10}$$

Отметим, что сходимость (7.9) можно получить также из результатов [23]; там же найден явный вид $H_\beta$.

**Теорема 7.2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 7.1. *В этом случае* $F \in \mathscr{L}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{t>0} \left| \frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n > tN(n))}{1 - H_\beta(t)} - 1 \right| \to 0$$

*при* $n \to \infty$.

Доказательство теоремы 7.2 повторяет доказательство теоремы 7.1. Надо лишь везде $S_n$ заменить на $\overline{S}_n$, $F_\beta$ на $H_\beta$.

**7.2. Законы повторного логарифма при бесконечном втором моменте.** Оценки сверху и снизу для распределений $\overline{S}_n$ и $S_n$, полученные выше, позволяют получать также утверждения типа закона повторного логарифма для последовательности $\{S_n\}$ в случае $\mathbf{E}X_j^2 = \infty$.

**Теорема 7.3.** 1. *Пусть выполнено условие* $[M^+]$ *при* $\alpha < 1$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{N(n)(\ln n)^{\frac{1+\varepsilon}{\beta}}} < 1 \quad \text{п. н.} \tag{7.11}$$

2. *Утверждение* (7.11) *сохранится, если выполнены условия* $[M^\pm]$, $\beta > 1$, $\mathbf{E}X_j = 0$, $W(t) \le c_1 V(t)$.

3. *Пусть выполнены условия* $[M^-]$ *при* $\alpha < 1$, $[M_+^+]$, $W(t) \le c_1 V(t)$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{N(n)(\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{\beta}}} > 1 \quad \text{п. н.} \tag{7.12}$$

4. *Утверждение* (7.12) *сохранится, если выполнены условия* $[R_\rho]$, $\beta > 1$, $\mathbf{E}X_j = 0$.

Обозначим $\ln^+ t = \ln\max(1, t)$. Из теоремы 7.3 вытекает

**Следствие 7.1.** 1. *Пусть выполнены условия* $[M^-]$, $[M_+^+]$ *при* $\alpha < 1$, $W(t) \le c_1 V(t)$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ S_n - \ln N(n)}{\ln\ln n} = \frac{1}{\beta} \quad \text{п. н.} \tag{7.13}$$

2. *Утверждение* (7.13) *сохранится, если выполнены условия* $[R_\rho]$, $\beta > 1$, $\mathbf{E}X_j = 0$.

Соотношение (7.13) можно записать также в виде

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{S_n}{N(n)}\right)^{\frac{1}{\ln\ln n}} = e^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{п. н.} \tag{7.14}$$

Если $V(t) = t^{-\beta}L(t)$, $|\ln L(t)| \ll \ln\ln t$, то аналогичным свойством будет обладать функция $L_1(n)$ в представлении $N(n) = n^{1/\beta}L_1(n)$ и вместо $N(n)$ в соотношениях (7.11)–(7.14) можно подставить $n^{1/\beta}$.

Формулировка (7.13) в какой-то мере оправдывает термин «закон повторного логарифма», так как в ней присутствует нормирующий множитель $\ln\ln n$ (в утверждениях (2.23), (2.24) для *самих сумм* $S_n$ (а не для $\ln^+ S_n$) он отсутствует). Закону повторного логарифма в случае $\mathbf{E}X_j^2 = \infty$ посвящено большое количество работ (см. библиографию, например, в [24, 25], однако все они для получения (7.14) предполагают весьма жесткие условия на $X_j$, например, принадлежность области нормального притяжения к устойчивому закону ($F \in \mathscr{L}$) (см. [25]). Теорема 7.1 обобщает эти результаты.

Доказательство теоремы 7.3. Если следовать классическому пути доказательства законов повторного логарифма с использованием леммы Бореля — Кантелли (см., например, [26]), то задача сводится к следующему (см. гл. 19 в [26]): для доказательства (7.11) надо показать, что

$$\sum_k \mathbf{P}(\overline{S}_{n_k} > x_k) < \infty, \tag{7.15}$$

где $n_k = [A^k]$ $(A > 1)$, $x_k = N(n_k)(\ln n_k)^{\frac{1+\varepsilon}{\beta}}$. Для доказательства (7.12) надо установить, что

$$\sum_k \mathbf{P}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > y_k) = \infty$$

или, что то же,

$$\sum_k \mathbf{P}(S_{m_k} > y_k) = \infty, \tag{7.16}$$

где $m_k = n_k - n_{k-1} = [n_k(1 - A^{-1})] + i$, $i$ принимает значения 0 или 1, $y_k = N(n_k)(\ln n_k)^{\frac{1-\varepsilon}{\beta}}$.

Докажем (7.15), (7.11). В силу следствия 2.1 при $x > N(n)$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le cnV(x).$$

Полагая $x = N(n)(\ln n)^{\frac{1+\varepsilon}{\beta}}$, получим

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le c(\ln n)^{-\frac{1+\varepsilon}{\beta}(\beta-\delta)}$$

при $n \to \infty$ и любом фиксированном $\delta > 0$. Полагая $\delta = \varepsilon/3$, при достаточно малых $\varepsilon$ будем иметь

$$\frac{1+\varepsilon}{\beta}(\beta - \delta) > 1 + \varepsilon/2, \quad \mathbf{P}\big(\overline{S}_{n_k} > x_k\big) \le c_1 k^{-(1+\varepsilon/2)}.$$

Это означает, что ряд (7.15) сходится и справедливо (7.11).

Доказательство второго утверждения происходит точно так же, но с использованием следствия 3.1, условия которого выполнены.

Докажем теперь (7.16), (7.12). В силу утверждения (6.3) теоремы 6.2 имеем при $x > N(n)$, $m = [n(1 - A^{-1})]$

$$\mathbf{P}(S_m > x) \ge cnV(x).$$

Полагая $x = N(n)(\ln n)^{\frac{1-\varepsilon}{\beta}}$, получим

$$\mathbf{P}(S_m > x) \ge (\ln n)^{-\frac{1-\varepsilon}{\beta}(\beta+\delta)},$$

где $\frac{1-\varepsilon}{\beta}(\beta + \delta) < 1 - \varepsilon/2$ при $\delta = \varepsilon/2$ и достаточно малых $\varepsilon$. Это дает

$$\mathbf{P}(S_{m_k} > y_k) \ge c_1 k^{-(1-\varepsilon/2)},$$

что означает расходимость ряда (7.16) и справедливость (7.12).

Последнее утверждение теоремы доказывается точно так же с использованием третьего утверждения теоремы 6.2.

Теорема доказана.

Автор признателен Д. А. Коршунову за полезные замечания.

Результаты статьи были получены во время пребывания автора в Ейндховене, EURANDOM, в декабре 1999 — марте 2000 г.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Боровков А. А.* Вероятности больших уклонений для случайных блужданий с семиэкспоненциальными распределениями // Сиб. мат. журн. (в печати).
2. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Вероятности больших уклонений для случайных блужданий с регулярным распределением скачков // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № ?. С. 14–16.
3. *Borovkov A.A., Borovkov K.A.* On large deviation probabilities for random walks. I. Regularly varying distribution tails. II. Regular exponential tails. Новосибирск, 1999. 42 с. (Препринт / РАН. Ин-т математики им. С. Л. Соболева; 62).
4. *Borovkov A.A., Boxma O.J.* Refined asymptotics for large deviations of sums and maxima of sequentional sums of random variables with Leavy tails. Preprint EURANDOM, Eindhoven, 2000.
5. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10, № 2. С. 231–254.
6. *Нагаев С. В., Фук Д. Х.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16, № 4. С. 660–675.
7. *Боровков А. А.* Замечания о неравенствах для сумм независимых величин. // Теория вероятностей и ее применения. 1972. Т. 17, № 3. С. 590–591.
8. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
9. *Пинелис И. Ф.* Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий. // Теория вероятностей и ее применения. 1981. Т. 26, № 1. С. 73–87.
10. *Пинелис И. Ф.* Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших уклонений суммы и максимума независимых случайных величин // Тр. Ин-та математики / АН СССР, Сиб. отд-ние. 1985. Т. 5. С. 144–173.
11. *Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений максимума сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением // Теория вероятностей и ее применения (в печати).
12. *Veraverbeke N.* Asymptotic behaviour of Wiener — Hopf factors of a random walks // Stoch. Proc. Appl. 1977. V. 5, N 1. P. 27–37.
13. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: Гостехиздат, 1949.
14. *Davis R. A., Hsing T.* Point processes and partial sum convergence for weakly dependent random variables with ifinite variance // Ann. Probab. 1995. N 23. P. 879–917.
15. *Heyde C. C.* A contribution to the theory of large deviations for sums of independent random variables // Z. Warsch. verw. Geb. 1967. N 7. P. 303–308.
16. *Heyde C.C.* On large deviation probabilities in the case of attraction to a non-normal stable law // Sankhya. 1968. V. A30, N 3. P. 253–258.
17. *Годованчук В.В.* Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных величин, притягивающихся к устойчивому закону // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34. С. 602–608.
18. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34, № 4. С. 686–705.
19. *Mikosh T., Nagaev A. V.* Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance // Extremes. 1998. V. 1, N 1. P. 81–110.
20. *Nagaev A. V.* Large deviatins // Ann. Probab. 1979. N 7. P. 745–789.
21. *Нагаев А. В.* Об одном свойстве сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 2. С. 335–346.
22. *Бенткус В., Блознялис М.* Неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ с устойчивым предельным распределением // Литовский мат. сб. 1989. № 29. С. 14–26.
23. *Heyde C. C.* On the maximum of sums of random variables and the supremum functional for stable processes // J. Appl. Probab. 1969. N 6. P. 419–429.
24. *Микош Т.* О задаче повторного логарифма для независимых случайных величин вне области частичного притяжения нормального закона // Вестник Ленингр. ун-та. 1984. Т. 13, № 3. С. 35–39.
25. *Хохлов Ю. С.* Закон повторного логарифма для случайных векторов с операторно устойчивым предельным законом // Вестник Моск. ун-та. 1995. № 3. С. 62–69.

**26.** *Боровков А. А.* Теория вероятностей. Изд-е 2-е: Москва, Наука, 1986. Изд-е 3-е: М.: Изд-во Эдиториал УРСС, Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.

*Статья поступила 11 мая 2000 г.*

*г. Новосибирск*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН*
borovkov@math.nsc.ru