Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 517.54

КОНТИНУУМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКРИВЛЕНИЕМ: УСЛОВИЯ ЦЕПЕЙ И ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ

В. В. Асеев, Д. Г. Кузин

Аннотация: Установлен критерий ограниченности искривления (в смыслу Тукиа — Вяйсяля) континуумов в полном метрическом пространстве, выраженный более слабым условием, чем псевдовыпуклость, который применен к изучению метрических свойств графиков функций. В терминах инфинитезимальной связности дано полное описание свойства континуума быть жордановой дугой (или кривой) с ограниченным искривлением. Библиогр. 15.

Введение

В [1] введено понятие псевдовыпуклости метрического пространства и установлено (теорема 2.9, с. 100), что все континуумы с ограниченным искривлением в $\mathbb{R}^n$ обладают этим свойством. Мы показываем, что верно и обратное утверждение: все псевдовыпуклые (в смысле Тукиа — Вяйсяля) континуумы в $\mathbb{R}^n$ имеют ограниченное искривление (следствие 1.4). Условие цепей, введенное нами в § 1, формально более слабое, чем условие псевдовыпуклости в [1], является достаточным для ограниченности искривления в любом полном метрическом пространстве (теорема 1.2) и равносильно условию псевдовыпуклости (в смысле Тукиа — Вяйсяля) для подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ (теорема 1.3, следствие 1.4). Применение условия цепей в § 2 позволяет получить (лемма 2.1, теорема 2.3) критерий ограниченности искривления графика вещественной функции в терминах условия середин, введенного в [2]. В § 3, 4 рассматривается свойство инфинитезимальной связности континуума $F \subset \mathbb{R}^n$, означающее, что для любой последовательности растяжений $\{\mu_k(x) = a_k + r_k(x - a_k)\}$ с центрами $a_k \in F$, $a_k \to a \in F$, и коэффициентами $r_k \to \infty$ при $k \to \infty$ предел F' последовательности компактных множеств $\mu_k(F)$ в $\overline{\mathbb{R}}^n$, если таковой существует, не разделяется точкой ∞, т. е. множество $F' \backslash \{\infty\}$ связно. Если при этом всякий такой предел является жордановой дугой или жордановой кривой в $\overline{\mathbb{R}}^n$, то континуум F называем инфинитезимально жордановым. В теореме 3.3 доказана эквивалентность ограниченности искривления континуума его инфинитезимальной связности, а в теореме 4.5 установлено, что континуум инфинитезимально жорданов в том и только в том случае, когда он является жордановой дугой (или жордановой кривой) с ограниченным искривлением. В доказательстве теоремы 4.5 существенно использован основной результат из [3].

Часть результатов, приведенных в статье, анонсирована в [4, 5]. В тексте статьи символом $|x - y|$ всюду обозначается расстояние между точками x и y, $\operatorname{diam} A$ — диаметр множества A, $d(x, A)$ — расстояние (удаление) от точки

a до множества A, $\operatorname{dist}(A,B)$ — хаусдорфово расстояние между ограниченными замкнутыми множествами, $\operatorname{Lim} A_k$ — предел последовательности компактных подмножеств $\{A_k\}$ относительно хаусдорфова расстояния. В § 1 эти обозначения применяются для произвольного метрического пространства, в § 2 — для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, в § 3, 4 все эти обозначения (кроме $\operatorname{Lim} A_k$) рассматриваются относительно евклидова расстояния в $\mathbb{R}^n$, а предел $\operatorname{Lim} A_k$ последовательности компактных множеств в $\overline{\mathbb{R}}^n$ понимается относительно хаусдорфова расстояния, построенного на основе хордовой метрики в пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$. Жордановой дугой мы называем гомеоморфный образ отрезка, а жордановой кривой — гомеоморфный образ окружности. Все остальные термины и символы поясняются в тексте статьи.

§ 1. Ограниченность искривления и условие цепей

В [1, определение 2.7, с. 100] подмножество A метрического пространства $\mathscr{X}$ называется *псевдовыпуклым*, если для каждого $r \in (0,1)$ существует натуральное $C(r)$ такое, что для любой пары точек $a, b \in A$ имеется конечная цепь $a = a_0, a_1, \dots, a_s = b$ в A, удовлетворяющая условиям $s \le C(r)$ и $|a_s - a_{s-1}| \le \dots \le |a_1 - a_0| \le r|a-b|$. При этом множество $\mathscr{A}$ также называется *C-псевдовыпуклым*. Эти термины будут использоваться только в данном параграфе.

Определение 1.1. Подмножество A метрического пространства $\mathscr{X}$ удовлетворяет *условию (N,r)-цепей* с натуральным N и положительным $r < 1$, если для любой пары точек $a, b \in A$ существует цепь $a = a_0, a_1, \dots, a_m = b$ точек в A такая, что $m \le N$ и $|a_j - a_{j-1}| \le r|a-b|$ для всех $j = 1, \dots, m$.

Очевидно, что при этом в A возможен процесс (N,r)-*уплотнения* цепей: в заданной (N_1, r_1)-цепи каждую пару соседних точек (т. е. *звено* цепи) x_j, x_{j+1} можно соединить (N,r)-цепью $x_j, y_{j1}, \dots, y_{jN'}, x_{j+1}$ с $N' < N$ и получить таким образом (N_1N, r_1r)-цепь, соединяющую те же точки a, b. Непосредственно из определений усматривается, что C-псевдовыпуклость влечет условие (N,r)-цепей с $N = N(r) = C(r)$ при любом $r \in (0,1)$. Возможно, в общем случае условие (N,r)-цепей не обеспечивает псевдовыпуклости.

Напомним [1, определение 2.7, с. 100], что метрический континуум A имеет *ограниченное искривление*, если существует $c \ge 1$ такое, что любую пару точек $a, b \in A$ можно соединить континуумом $\gamma \subset A$ с диаметром $\le c|a-b|$. Эта же ситуация выражается в форме принадлежности A классу c-BT.

Теорема 1.2. *Любое замкнутое подмножество A полного метрического пространства $\mathscr{X}$, удовлетворяющее условию (N,r)-цепей с некоторыми N и $r \in (0,1)$, является континуумом с ограниченным искривлением, т. е. $A \in c$-BT, где c зависит лишь от r и N.*

Доказательство. Пусть a, b — произвольная пара различных точек в A. Положим $|a-b| = d$. По условию теоремы в A имеется (N,r)-цепь $\mathscr{C}^1$, соединяющая точки a, b. Выполняя на каждом шаге процесс (N,r)-уплотнения, мы получаем последовательность цепей

$$\mathscr{C}^1 \subset \mathscr{C}^2 \subset \dots \subset \mathscr{C}^j \subset \dots,$$

где каждая цепь $\mathscr{C}^j$ является (N^j, r^j)-цепью, соединяющей точки a и b. Если точка $x \in \mathscr{C}^{j+1}$ не содержится в цепи $\mathscr{C}^j$, то она содержится в подцепи

$\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}^{j+1}$, соединяющей две последовательные точки $a', b' \in \mathscr{C}^j$ и являющейся (N,r)-цепью. Так как

$$|x - a'| \leq \operatorname{diam} \mathscr{C}' \leq Nr|a' - b'| \leq Nr \cdot r^j d = \delta_j,$$

множество $\mathscr{C}^{j+1}$ содержится в δ_j-окрестности своего подмножества $\mathscr{C}^j$. Поэтому (см. [6, т. 1, 21.7, (2), с. 224]) для хаусдорфова расстояния имеем оценку $\operatorname{dist}(\mathscr{C}^j, \mathscr{C}^{j+1}) \leq \delta_j$. Поскольку

$$\operatorname{dist}(\mathscr{C}^j, \mathscr{C}^{j+s}) \leq \sum_{k=j}^{j+s-1} \operatorname{dist}(\mathscr{C}^k, \mathscr{C}^{k+1}) \leq \sum_{k=j}^{j+s-1} \delta_k$$
$$= Ndr^{j+1} \sum_{k=0}^{s-1} r^k \leq (Nd/(1-r))r^{j+1}$$

для любых натуральных j и s, компактные множества $\{\mathscr{C}^j\}$ образуют последовательность Коши в метрическом пространстве $\operatorname{Clos} \mathscr{X}$ всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$, наделенном хаусдорфовой метрикой. Из полноты пространства $\mathscr{X}$ следует полнота $\operatorname{Clos} \mathscr{X}$ (см. [6, т. 1, гл. 3, 33.4, с. 417]) и, следовательно, существование предела $\gamma = \operatorname{Lim} \mathscr{C}^j$ при $j \to \infty$, являющегося ограниченным замкнутым множеством в A (в силу замкнутости A). Так как для каждого $j > 1$ выполняется оценка

$$\operatorname{dist}(\mathscr{C}^j, \{a\}) \leq \operatorname{dist}(\mathscr{C}^j, \mathscr{C}^1) + \operatorname{diam} \mathscr{C}^1 \leq Ndr^2/(1-r) + Ndr = Ndr/(1-r),$$

то

$$\operatorname{diam} \gamma \leq c|a - b|, \tag{1}$$

где $c = 1 + Nr/(1-r)$. Пространство γ как предел возрастающей последовательности конечных множеств является вполне ограниченным (см. [6, т. 1, гл. 2, 21.8, теорема 1, с. 224]) и в силу теоремы Хаусдорфа (см. [7, гл. 3, 3.6, теорема 3.25, с. 242]) компактно. Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ и пары точек $x, y \in \gamma$ найдется номер k такой, что $r^k d < \varepsilon$ и $\mathscr{C}^k$ содержит пару точек x_k, y_k, для которых $|x - x_k| < \varepsilon$, $|y - y_k| < \varepsilon$. В цепи $\mathscr{C}^k$ точки x_k, y_k можно соединить цепью $x_k = z_0, z_1, \dots, z_m = y_k$, в которой $|z_{j+1} - z_j| \leq r^k d < \varepsilon$. Тогда $x, z_0, \dots, z_m, y$ является конечной ε-цепью в γ. Значит, компактное пространство γ является ε-сцепленным в смысле Хаусдорфа [8, 30.2, с. 172] при любом $\varepsilon > 0$. В силу [8, 30, теорема 7, с. 173] это равносильно связности γ. Таким образом, произвольно заданная пара точек $a, b \in A$ соединяется континуумом $\gamma \subset A$ с диаметром $\leq c|a - b|$, где c определено в (1) и зависит лишь от N и r. Следовательно, $A \in c$-ВТ, что и утверждалось.

Напомним, что принадлежность метрического пространства классу k-НТВ, где $k : [1/2, \infty) \to [1, \infty)$, означает, что при любом $\alpha \geq 1/2$ любой замкнутый шар радиуса r можно покрыть не более чем $k(\alpha)$ множествами диаметра $\leq r/\alpha$ (см. [1, с. 100]). Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\overline{\mathbb{R}}^n$ принадлежат классу k-НТВ с $k(\alpha) = 2^n(\alpha\sqrt{n} + 1)^n$ (см. [1, 2.8, с. 100]).

Теорема 1.3. *Континуум A в полном метрическом пространстве класса k-НТВ имеет ограниченное искривление, т. е. $A \in c$-ВТ, тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию (N,r)-цепей с некоторыми N и $r \in (0,1)$. При этом параметры c и (N,r) имеют взаимные оценки.*

Доказательство. Если $A \in c$-ВТ, то A является C-псевдовыпуклым (см. [1, теорема 2.9, с. 100]) с $C(r)$, зависящим лишь от k и c. Но тогда, как отмечено выше, при любом $r \in (0,1)$ множество A удовлетворяет условию $(N(r),r)$-цепей с $N(r) = C(r)$. Обратная импликация установлена в теореме 1.2. Теорема доказана.

Теорема 1.2 дает обращение теоремы 2.9 в [1, с. 100] и приводит к следующему критерию ограниченности искривления континуумов.

Следствие 1.4. *Для континуумов в полных метрических пространствах класса* НТВ *условия псевдовыпуклости и ограниченности искривления эквивалентны.*

Доказательство. Псевдовыпуклость влечет условие цепей, из которого в силу теоремы 1.2 вытекает ограниченность искривления. Обратная импликация доказана в [1, теорема 2.9, с. 100].

§ 2. Ограниченность искривления графика функции

В качестве приложения теоремы 1.2 установим критерий ограниченности искривления графика непрерывной вещественной функции, определенной на интервале $J \subset \mathbb{R}^1$. Для гомеоморфного вложения $f : J \to \mathbb{R}^m$ выпуклого множества $J \subset \mathbb{R}^n$ выполнение *условия середин* УС(H) означает (см. [2, определение 0.2, с. 1225]), что $|f((x+y)/2) - f(x)| \le H|f(x) - f(y)|$ для любых $x, y \in J$.

Лемма 2.1. *Пусть непрерывная вещественная функция $\varphi : J \to \mathbb{R}^1$, заданная на интервале $J \subset \mathbb{R}^1$, имеет график $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Гомеоморфное вложение $f(t) = (t, \varphi(t)) : J \to \Gamma$ удовлетворяет условию середин* УС(H) *тогда и только тогда, когда $\Gamma \in c$-ВТ, где c и H имеют взаимные оценки.*

Доказательство. Пусть f удовлетворяет УС(H), $a < b$ — произвольная пара точек из J и $A = (a, \varphi(a)), B = (b, \varphi(b))$.

Случай 1. Пусть $\varphi(a) = \varphi(b) = h$ и $c = (a+b)/2$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(c) \ge h$. Положим $q = |A - B| = |a - b|$, $N_1 = [2H+1] \ge 1$, $\delta = (\varphi(c)-h)/N_1$ и заметим, что прямые $L_k = \{\operatorname{Im} z = h + k\delta\}$, $k = 0, \dots, N_1$, пересекают дуги $f([a,c])$ и $f([c,b])$ в некоторых точках A_k и B_k соответственно, причем можно положить $A_0 = A, B_0 = B$ и $A_{N_1} = B_{N_1} = f(c)$. Цепь $A = A_0, \dots, A_{N_1}, B_{N_1-1}, \dots, B_0 = B$ имеет $2N_1$ звеньев и соединяет в Γ точки A, B. Из неравенства $|\varphi(c) - h| \le |f(c) - f(a)| \le Hq$ следует, что

$$|A_{k+1} - A_k|^2 \le |a - c|^2 + \delta^2 \le q^2/4 + q^2(H/N_1)^2 \le q^2/2,$$

и поэтому $|A_{k+1} - A_k| \le (1/\sqrt{2})|A - B|$ для всех $k = 0, \dots, N_1 - 1$. Аналогично $|B_{k+1} - B_k| \le (1/\sqrt{2})|A - B|$ для всех $k = 0, \dots, N_1 - 1$. Это означает, что построенная цепь является $(2N_1, 1/\sqrt{2})$-цепью с N_1, зависящим лишь от H.

Случай 2. Пусть $\varphi(a) \ne \varphi(b)$ и дуга $f((a,b))$ не пересекает прямые $\{\operatorname{Im} z = \varphi(a)\}$, $\{\operatorname{Im} z = \varphi(b)\}$. Не нарушая общности, можно считать, что $\varphi(a) < \varphi(b)$. Положим $h = |\varphi(b) - \varphi(a)|$. Если $h \ge |a - b|$, то возьмем произвольно точку C в пересечении дуги $f((a,b))$ с прямой $\{\operatorname{Im} z = (\varphi(a) + \varphi(b))/2\}$. Так как

$$|A - C|^2 \le (h^2 + |a-b|^2)/4 + 3(h^2 + |a-b|^2)/8 = (5/8)|A - B|^2$$

и аналогично $|B - C|^2 \le (5/8)|A - B|^2$, то A, C, B является $(2, \sqrt{5/8})$-цепью. Если же $h \le |a - b|$, то положим $c = (a+b)/2$ и $C = f(c)$. Поскольку

$$\begin{aligned} &|A - C|^2 = |a-b|^2/4 + |\varphi(c) - \varphi(a)|^2 \\ &\le (|a-b|^2 + |\varphi(c) - \varphi(a)|^2)/4 + 3(|a-b|^2 + |\varphi(c) - \varphi(a)|^2)/8 \le (5/8)|A - B|^2 \end{aligned}$$

и аналогично $|B-C|^2 \le (5/8)|A-B|^2$, то A, C, B и в этом случае является $(2, \sqrt{5/8})$-цепью.

Общий случай. Положим

$$d = \min\{x \in [a,b] : \varphi(x) = \varphi(b)\}, \quad c = \max\{x \in [a,d] : \varphi(x) = \varphi(a)\}$$

и покажем, что точки A, B можно соединить (N_2, r_0)-цепью по $f([a,b])$ с $N_2 = 4N_1+2, r_0 = \sqrt{5/8}$. Если $c = d$, то $\varphi(a) = \varphi(b)$, и реализуется случай 1. Поэтому можно считать, что $c < d$. Для пары точек $C = f(c), D = f(d)$ реализуется случай 2, дающий нам $(2, r_0)$-цепь C, C', D, у которой

$$\max\{|C-C'|, |C'-D|\} \le r_0|C-D| \le r_0|A-B|. \tag{2}$$

Если $c = a$, то полагаем $A_0 = A, A_1 = C, k_1 = 1$. Если же $a < c$, то для пары точек A, C реализуется случай 1, который дает нам (k_1, r_0)-цепь $A_0 = A, A_1, \dots, A_{k_1} = C$, с $k_1 \le 2N_1$. При этом для всех $j = 1, \dots, k_1$

$$|A_j - A_{j-1}| \le r_0|C-A| \le r_0|A-B|. \tag{3}$$

Если $d = b$, то полагаем $B_0 = D, B_1 = B, k_2 = 1$. Если же $d < b$, то для D, B реализуется случай 1, который дает нам (k_2, r_0)-цепь $B_0 = D, B_1, \dots, B_{k_2} = B$ с $k_2 \le 2N_1$. Для всех $j = 1, \dots, k_2$

$$|B_j - B_{j-1}| \le r_0|B-D| \le r_0|A-B|. \tag{4}$$

В силу (2)–(4) цепь $A_0, \dots, A_{k_1}, C', B_0, \dots, B_{k_2}$ является $(2+4N_1, r_0)$-цепью, соединяющей точки A, B. Таким образом, континуум $\Gamma = f(J)$ удовлетворяет условию $(2+4N_1, r_0)$-цепей и вследствие теоремы 1.2 принадлежит классу c-ВТ, где c зависит лишь от N_1, которое зависит лишь от H.

Обратная импликация ($\Gamma \in c$-ВТ) $\Rightarrow$ УС(H) вытекает из оценки

$$|f((x+y)/2) - f(x)| \le \operatorname{diam} f([x,y]) \le c|f(x) - f(y)|,$$

справедливой при любых $x, y \in J$. Лемма доказана.

Отметим, что условия леммы 2.1 не гарантируют квазисимметричности f; в качестве контрпримера достаточно взять функцию $\varphi(x) = \operatorname{tg}(x)$ на интервале $J = (-\pi/2, \pi/2)$. Соответствующее отображение $f(x) = (x, \operatorname{tg}(x))$ переводит ограниченное множество в неограниченное, что исключено при квазисимметрических вложениях (см. [1, следствие 2.6, с. 100]), однако f удовлетворяет УС(1) вследствие монотонности функции φ. В общем случае для квазисимметричности f необходимо выполнение *условия Келингоса* УК(H'): $|f(x) - f(z)| \le H'|f(y) - f(z)|$ для всех $x, y, z \in J$ таких, что $|x-z| = |y-z|$ (см. [2, (1), с. 1225]).

Утверждение 2.2. *Пусть непрерывная вещественная функция $\varphi(x)$ задана на интервале $J \subset \mathbb{R}^1$. Для η-квазисимметричности вложения $f(x) = (x, \varphi(x)) : J \to \mathbb{R}^2$ необходимо и достаточно, чтобы f удовлетворяло* УС(H) *и* УК(H'). *При этом функция искажения η и пара констант H, H' имеют взаимные оценки.*

Доказательство. Непосредственно из определения квазисимметричности (см. [1, с. 97]) следует, что если f является η-квазисимметрическим, то оно удовлетворяет УК($\eta(1)$) и УС($\eta(1/2)$). Обратно, из УС(H) получаем в силу леммы 2.1 ограниченность искривления жордановой дуги $f(J)$. Следовательно, существует ω-квазисимметрический гомеоморфизм $\psi : f(J) \to \mathbb{R}^1$ (см. [1, следствие 4.11, с. 113]) с функцией искажения ω, зависящей лишь от H. Из УК(H') для f вытекает, что $g = \psi \circ f : J \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет УК$(\omega(H'))$ и является ω_1-квазисимметрическим отображением (см. [2, с. 1226]) с функцией искажения ω_1, зависящей в итоге лишь от H, H'. Требуемая квазисимметричность вложения f следует из представления $f = \psi^{-1} \circ g$ и ω_2-квазисимметричности вложения ψ^{-1} с функцией искажения $\omega_2(t) = 1/\omega^{-1}(1/t)$ (см. [1, теорема 2.2, с. 99]). Утверждение доказано.

В [2, теорема 2.3, с. 1228] доказана квазисимметричность гомеоморфного вложения $f : J \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию середин с константой $H < 1$. В частном случае, рассмотренном в утверждении 2.2, ограничения на константу H не потребовалось. Вопрос о существенности ограничения $H < 1$ в общем случае (но при выполнении условия Келингоса) в [2, теорема 2.3, с. 1228] остается открытым.

Теорема 2.3. *Пусть непрерывная вещественная функция $\varphi(x)$, заданная на выпуклом множестве $J \subset \mathbb{R}^n$, имеет график $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Если гомеоморфное вложение $f(x) = (x, \varphi(x)) : J \to \Gamma$ удовлетворяет условию середин* УС(H), *то Γ имеет ограниченное искривление, т. е. $\Gamma \in c$-*ВТ, *где константа c зависит лишь от H.*

Доказательство. Для произвольной пары точек $A, B \in \Gamma$ построим прямую L, проходящую через $a = f^{-1}(A) \in J$ и $b = f^{-1}(B) \in J$. В силу выпуклости J пересечение $J' = J \cap L$ является интервалом. Так как ограничение $f|J'$ удовлетворяет УС(H), то по лемме 2.1 континуум $f(J')$ принадлежит классу c-ВТ, где c зависит лишь от H. Поэтому существует континуум $\gamma \subset f(J') \subset \Gamma$, соединяющий точки A и B и имеющий диаметр $\leq c|A - B|$. В силу произвольности выбора $A, B \in \Gamma$ это и означает, что $\Gamma \in c$-ВТ. Теорема доказана.

Заметим, что в отличие от одномерного случая, рассмотренного в лемме 2.1, условие УС(H) для f не следует из ограниченности искривления графика функции φ. В качестве примера можно взять функцию $\varphi(x_1, x_2) = \sqrt[4]{x_1^2 + x_2^2}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. В общем случае условие квазисимметричности вложения f сильнее, чем одновременное выполнение УС и УК для f, что, в свою очередь, сильнее, чем ограниченность искривления графика функции φ.

Утверждение 2.4. *Пусть $F = (F_1, \dots, F_n) : D \to D'$ — η-квазисимметрический гомеоморфизм области $D \subset \mathbb{R}^n$ на выпуклую область $D' \subset \mathbb{R}^n$. Тогда графики $\Gamma F_j \subset \mathbb{R}^{n+1}$ координатных функций $F_j : D \to \mathbb{R}^1$, $j = 1, \dots, n$, имеют ограниченное искривление, $\Gamma F_j \in c$-*ВТ, *где $c = 2/\eta^{-1}(1)$.*

Доказательство. Пусть $A = (a, F_j(a))$, $B = (b, F_j(b))$ — две точки на графике ΓF_j, $a, b \in D$, $F_j(a) \leq F_j(b)$. Так как обратное отображение F^{-1} является η'-квазисимметрическим с функцией искажения $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(1/t)$ (см. [1, теорема 2.2, с. 99]), континуум $\gamma_0 = F^{-1}(L) \subset D$, где L — отрезок с концами в точках $F(a)$ и $F(b)$, является дугой с ограниченным искривлением, $\gamma_0 \in c$-ВТ, где $c = 2\eta'(1)$ (см. [1, теорема 2.10, с. 101]). Следовательно, $\operatorname{diam} \gamma_0 \leq c|a - b|$ и при этом $F_j(x) \in [F_j(a), F_j(b)]$ для всех $x \in \gamma_0$. Поэтому для континуума $\gamma = \{(x, F_j(x)) : x \in \gamma_0\} \subset \Gamma F_j$, соединяющего точки A и B, получаем оценку

$$(\operatorname{diam} \gamma)^2 \leq (c^2|a - b|^2 + |F_j(a) - F_j(b)|^2) \leq c^2|A - B|^2.$$

Это и означает, что ΓF_j принадлежит классу c-ВТ. Утверждение доказано.

Таким образом, ограниченность искривления графика можно рассматривать как некоторое геометрическое условие регулярности вещественной функции, необходимое (наряду с другими условиями) для «достройки» этой функции до квазиконформного отображения (проблема, поставленная В. А. Зоричем в [9, с. 47]). Однако более сильное требование квазисимметричности первой проекции графика в рамках этой проблемы излишне жестко.

Утверждение 2.5. *Пусть непрерывная вещественная функция f задана в области $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ и имеет график $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Отображение $F : D \to \Gamma$, $F(x) = (x, f(x))$, является локально η-квазисимметрическим тогда и только тогда, когда функция f локально L-липшицева. При этом $L \le 4\eta(1)\eta(1/2)$ и отображение F локально $(L^2+1)^{1/2}$-билипшицево.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_0 \in D$ и вложение F является η-квазисимметрическим в шаре $B = B(x_0, r_0) \subset D$. Для $\delta < r_0$ положим

$$M = \max\{|f(x) - f(x_0)| : x \in S\} = |f(x_1) - f(x_0)|,$$

где $x_1 \in S = \{x : |x - x_0| = \delta\}$, и $K = M/\delta$. Для точки $x_2 = 2x_0 - x_1$ рассмотрим какую-нибудь окружность $S' \subset S$, проходящую через точки x_1, x_2. В силу η-квазисимметричности вложения F имеем оценку

$$K\delta \le |F(x_1) - F(x_0)| \le \eta(1/2)|F(x_1) - F(x_2)|.$$

Точки x_1, x_2 разбивают окружность S' на две дуги γ_1 и γ_2. Найдутся точки $x_3 \in \gamma_1$ и $x_4 \in \gamma_2$ такие, что $f(x_3) = f(x_4) = (f(x_1) + f(x_2))/2$. Так как $S' \in$ 1-ВТ, то $F(S')$ имеет ограниченное искривление, $F(S') \in 2\eta(1)$-ВТ (см. [1, теорема 2.11, с. 101]). Следовательно,

$$K\delta/\eta(1/2) \le |F(x_1) - F(x_2)| \le 2\eta(1)|F(x_3) - F(x_4)| = 2\eta(1)|x_3 - x_4| \le 4\eta(1)\delta.$$

Таким образом, $K \le 4\eta(1)\eta(1/2)$ и, значит, для всех $x \in B$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| \le L|x - x_0|$ с константой $L = 4\eta(1)\eta(1/2)$, что и дает локальную L-липшицевость функции f.

Достаточность. В любом шаре $B \subset D$, где f L-липшицева, выполняются оценки

$$|F(x_0) - F(x_1)|^2 = |f(x_0) - f(x_1)|^2 + |x_0 - x_1|^2 \le (L^2 + 1)|x_0 - x_1|^2$$

и $|F(x_0) - F(x_2)| \ge |x_0 - x_2|$, из которых следует, что вложение $F : B \to \Gamma$ является $(L^2+1)^{1/2}$-билипшицевым. Утверждение доказано.

§ 3. Ограниченность искривления и инфинитезимальная связность

Пусть F — компактное множество в $\mathbb{R}^n$. *Микроскопом* на F назовем любую последовательность растяжений $\{\mu_k(x) = a_k + r_k(x - a_k)\}$ с центрами $a_k \in F \subset \mathbb{R}^n$ и коэффициентами $r_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Микроскоп $\{\mu_k\}$ называем *сходящимся* в точке $a \in F$, если $a_k \to a$ при $k \to \infty$ и последовательность компактных множеств $F_k = \mu_k(F)$ сходится в пространстве $\mathrm{Comp}\,\overline{\mathbb{R}}^n$. Предел $dF = \mathrm{Lim}\, F_k$ называем *инфинитезимальным элементом* множества F в точке a. (Отметим, что любой инфинитезимальный элемент невырожденного континуума является невырожденным континуумом в $\overline{\mathbb{R}}^n$, содержащим точку ∞.) Тем самым каждой точке a множества F сопоставляется семейство $DF(a)$ его инфинитезимальных элементов в этой точке, которое непусто, так как в силу компактности пространства $\operatorname{Comp}\overline{\mathbb{R}}^n$ в любом микроскопе μ_k на F с $a_k \to a$ можно выделить подпоследовательность μ_{k_j}, являющуюся сходящимся микроскопом.

В частности, *невыпрямляемые* (incorrigible) дуги, рассмотренные Терстоном в [10, определение 4.2, с. 194], можно определить как дуги, у которых семейство инфинитезимальных элементов не содержит окружностей в $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Утверждение 3.1. *Пусть $F \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ — компактное множество и $p \in F \cap \mathbb{R}^n$ не является его изолированной точкой. Тогда для любой замкнутой окрестности U точки p выполняется равенство $DF(p) = DF'(p)$, где $F' = F \cap U$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $G = F \backslash U \neq \varnothing$. Для любого микроскопа $\{\mu_k(x) = p_k + r_k(x - p_k)\}$ на F с $p_k \to p$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех достаточно больших k выполняются оценки $d(p_k, G) \geq \varepsilon$ и $|p - p_k| < 1$. Если $x \in G$, то

$$|\mu_k(x) - p| = |r_k(x - p_k) + p_k - p| \geq r_k\varepsilon - 1 \to +\infty, \quad k \to \infty.$$

Следовательно, $\operatorname{Lim}\mu_k(G) = \{\infty\}$ при $k \to \infty$. В случае сходящегося микроскопа $\infty \in \operatorname{Lim}\mu_k(F \cap U)$, используя свойства топологического предела [6, т. 1, § 29, (3), с. 347], получаем равенство

$$\operatorname{Lim}\mu_k(F) = \operatorname{Lim}\mu_k(F \cap U) \cup \operatorname{Lim}\mu_k(G) = \operatorname{Lim}\mu_k(F').$$

Утверждение доказано.

Определение 3.2. Континуум $F \subset \mathbb{R}^n$ называется *инфинитезимально связным* в точке $a \in F$, если для любого его инфинитезимального элемента $dF \in DF(a)$ множество $dF \setminus \{\infty\}$ связно.

Теорема 3.3. *Континуум $F \subset \mathbb{R}^n$ имеет ограниченное искривление тогда и только тогда, когда он инфинитезимально связен во всех своих точках.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $F \in c$-BT. Допустим, что для точки $a \in F$ имеется микроскоп $\{\mu_k(x) = a_k + r_k(x - a_k)\}$ такой, что $dF = \operatorname{Lim}\mu_k(F)$ и $dF \setminus \{\infty\}$ имеет по меньшей мере две различные компоненты связности. Возьмем точки p_0 и p_1, лежащие в разных компонентах связности множества $dF \cap \mathbb{R}^n$. В силу сходимости $F_k = \mu_k(F) \to dF$ для каждого k найдутся точки $p_{0k}, p_{1k} \in F_k$ такие, что $p_{0k} \to p_0$ и $p_{1k} \to p_1$ при $k \to \infty$. Так как $F \in c$-BT, для каждого k существует континуум $\gamma_k \subset F$, соединяющий точки $\mu_k^{-1}(p_{0k})$ и $\mu_k^{-1}(p_{1k})$, для которого

$$\operatorname{diam}\gamma_k \leq c\big|\mu_k^{-1}(p_{0k}) - \mu_k^{-1}(p_{1k})\big| = cr_k^{-1}|p_{0k} - p_{1k}|.$$

Переходя при необходимости к подпоследовательности в μ_k, можем считать, что имеет место сходимость $\mu_k(\gamma_k) \to \gamma$ при $k \to \infty$. Предельный континуум $\gamma \subset dF$ соединяет точки p_0 и p_1, и при этом

$$\operatorname{diam}\gamma \leq \limsup_{k\to\infty}\{r_k \operatorname{diam}\gamma_k\} \leq c|p_0 - p_1|.$$

Следовательно, γ лежит в шаре $\{x : |x - a| \leq |p_0 - a| + c|p_0 - p_1|\}$, что противоречит выбору точек p_0, p_1.

Достаточность. Если F не принадлежит классу BT, то по теореме 1.3 найдется последовательность пар точек $p_k, q_k \in F$, которые нельзя соединить

$(k, 1/2)$-цепью в F. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $p_k \to p \in F$ и $q_k \to q \in F$. Допустив, что $|p-q| = \delta > 0$, построим покрытие $\mathscr{B}$ множества F открытыми шарами радиуса $\delta/8$ с центрами на F. В силу связности множества F найдется цепь $\{B_1, \dots, B_N\} \subset \mathscr{B}$ шаров с центрами $a_1, \dots, a_N \in F$ такая, что $p \in B_1, q \in B_N$ и $B_i \cap B_j \neq \varnothing$ в том и только в том случае, когда $|i-j| \leq 1$ (см. [11, гл. 6, задача 6.3.1, с. 546]). Тогда для любого достаточно большого номера k цепь $p_k, p, a_1, \dots, a_N, q, q_k$ соединяет точки p_k и q_k, и при этом $|p_k - q_k| \geq |p-q|/2$. Следовательно, эта цепь является $(N+3, 1/2)$-цепью. Так как N не зависит от k, это противоречит выбору последовательности p_k, q_k. Тем самым доказано, что $q = p$ и $|p_k - q_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Построим микроскоп $\{\mu_k(x) = p_k + |q_k - p_k|^{-1}(x - p_k)\}$. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $\mu_k(F) = F_k \to F_0 \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ и, значит, $F_0 \in dF(p)$. Ввиду инфинитезимальной связности F множество $F_0 \backslash \{\infty\}$ связно. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что имеет место сходимость $\mu_k(q_k) \to Q \in F_0$. При этом

$$|Q - p| = \lim_{k\to\infty} |\mu_k(q_k) - p_k| = \lim_{k\to\infty} |q_k - p_k|^{-1}|q_k - p_k| = 1.$$

Воспользовавшись связностью множества $F_0 \backslash \{\infty\}$, построим на нем какую-нибудь $(N', 1/4)$-цепь $Q = c_0, c_1, \dots, c_{N'} = p$ (повторив те же рассуждения, что и выше, для точек p, Q). В силу сходимости $F_k \to F_0$ для всех достаточно больших k найдутся точки $\{\mu_k(q_k) = c_{k0}, \dots, c_{kN'} = p_k\} \in F_k$ такие, что $|c_j - c_{kj}| \leq 1/8$. Тогда цепь $c_{k0}, \dots, c_{kN'}$ соединяет точки $\mu_k(q_k), p_k$ в F_k и является $(N', 1/2)$-цепью. Следовательно, для любого достаточно большого k мы имеем $(N', 1/2)$-цепь $\mu_k^{-1}(c_{k0}), \dots, \mu_k^{-1}(c_{kN'})$ в F, соединяющую точки q_k и p_k. Так как N' не зависит от k, это противоречит выбору последовательности точек p_k, q_k. Полученное противоречие означает, что F имеет ограниченное искривление. Теорема доказана.

§ 4. Случай жордановых кривых с ограниченным искривлением

Теорема 4.1. *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — жорданова дуга класса c-BT с концами в точках a, b. Тогда для любого сходящегося микроскопа $\{\mu_j(x) = x_j + r_j(x - x_j)\}$ такого, что*

$$r_j \min\{|x_j - a|, |x_j - b|\} \to +\infty, \tag{5}$$

инфинитезимальный элемент $dF = \operatorname{Lim} \mu_j(F)$ является жордановой кривой в $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Доказательство. Пусть $x_j \to p \in F$. Условие теоремы позволяет для каждого достаточно большого номера j построить точки $a_j, b_j \in F$, находящиеся в разных компонентах связности множества $F \backslash \{x_j\}$, такие, что $|a_j - x_j| = |b_j - x_j| = 1/r_j$. В силу [1, теорема 4.9, с. 113] для каждого номера j существует η-квазисимметрический гомеоморфизм $f_j : J_j \to F$ отрезка $[A_j, B_j] = J_j \subset \mathbb{R}^1$ такой, что $-1, 0, 1 \in J_j$ и $f(A_j) = a$, $f(B_j) = b$, $f_j(-1) = a_j$, $f_j(0) = x_j$, $f_j(1) = b_j$. Используя квазисимметричность, получаем оценку $\eta(|A_j|) \geq |a - x_j|/|a_j - x_j| \to +\infty$, из которой следует, что $A_j \to -\infty$ при $j \to \infty$. Аналогично $B_j \to +\infty$ при $j \to \infty$. Следовательно, $J_j \to \overline{\mathbb{R}}^1$. Так как любое квазисимметрическое вложение является квазимёбиусовым (см. [12, теорема 3.4, с. 222] или [13, теорема 2.6, с. 33]), все f_j представляют собой ω-квазимёбиусовы вложения с функцией искажения ω, зависящей лишь от η. Абсолютное двойное отношение не меняется при переходе от евклидовой метрики к хордовой, поэтому $\varphi_j = \mu_j \circ f_j : J_j \to \mu_j(F)$ — последовательность ω-квазимёбиусовых вложений подмножеств $J_j \subset \overline{\mathbb{R}}^1$ в $\overline{\mathbb{R}}^n$. При этом $|\varphi_j(0) - \varphi_j(1)| = 1$, $\varphi_j(0) \to p$ и $\varphi_j(B_j) \to \infty$. Следовательно, $\{\varphi_j\}$ является нормируемым семейством ω-квазимёбиусовых вложений (см. [14, с. 26] или [15, 2.1.3, с. 34]). В силу принципа компактности нормируемых семейств квазимёбиусовых вложений [14, теорема 6.4, с. 26] в последовательности $\{\varphi_j\}$ можно выделить подпоследовательность, графически сходящуюся к ω-квазимёбиусову вложению $\varphi : \overline{\mathbb{R}}^1 \to \operatorname{Lim} \varphi_j(J_j) = \operatorname{Lim} \mu_j(F) = dF$. Следовательно, dF — квазимёбиусовый образ окружности $\overline{\mathbb{R}}^1$ и, в частности, жорданова кривая в $\overline{\mathbb{R}}^n$. Теорема доказана.

Следствие 4.2. *Пусть жорданова дуга $F \subset \mathbb{R}^n$ с концами a, b имеет ограниченное искривление. Тогда любой инфинитезимальный элемент в точке $p \in F$, отличной от a, b, является жордановой кривой в $\overline{\mathbb{R}}^n$.*

Доказательство. Так как для любого сходящегося микроскопа $\{\mu_j(x) = x_j + r_j(x - x_j)\}$ с $x_j \to p$ свойство (5) выполняется при всех достаточно больших j, применима теорема 4.1, которая и дает требуемый результат.

Следствие 4.3. *Если жорданова кривая F имеет ограниченное искривление, то любой ее инфинитезимальный элемент является жордановой кривой в $\overline{\mathbb{R}}^n$.*

Доказательство. Для любой точки $p \in F$ можно построить ее замкнутую окрестность U так, что $\gamma = U \cap F$ — жорданова дуга с концами a, b. В силу утверждения 3.1 множество инфинитезимальных элементов $DF(p)$ совпадает с $D\gamma(p)$ и согласно следствию 4.2 состоит лишь из жордановых кривых в $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Определение 4.4. Континуум $F \subset \mathbb{R}^n$ назовем *инфинитезимально жордановым*, если любой его инфинитезимальный элемент — жорданова кривая в $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Теорема 4.5. *Континуум $F \subset \mathbb{R}^n$ инфинитезимально жорданов в том и только в том случае, когда он является жордановой дугой* (*или жордановой кривой*) *с ограниченным искривлением.*

Доказательство. Достаточность установлена в следствии 4.3. Докажем необходимость. Инфинитезимальная жордановость континуума F влечет его инфинитезимальную связность и вследствие теоремы 3.3 F имеет ограниченное искривление, $F \in c_0$-BT. Дальнейшее доказательство разобьем на ряд этапов.

(a) Покажем, что если $\gamma \subset F$ — жорданова дуга с ограниченным искривлением, то для любой точки $q \in \gamma$, отличной от концов, существует окрестность U такая, что $U \cap F = U \cap \gamma$. Допустим противное. Тогда найдется последовательность $q_j \in F \backslash \gamma$, сходящаяся к точке q. Для каждого номера j построим точку $p_j \in \gamma$ так, что $r_j = |q_j - p_j| = d(q_j, \gamma)$. Так как $p_j \to p$ и $r_j \to 0$ при $j \to \infty$, последовательность $\{\mu_j(x) = p_j + r_j^{-1}(x - p_j)\}$ является микроскопом на F и на γ. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать этот микроскоп сходящимся как на F, так и на γ. Тогда в силу следствия 4.2 соответствующий инфинитезимальный элемент $d\gamma$ есть жорданова кривая в $\overline{\mathbb{R}}^n$ и ввиду условия теоремы $d\gamma = dF$. Последовательность $\mu_j(B_j)$, где $B_j = \{x : |x - q_j| \leq r_j\}$, является последовательностью замкнутых шаров радиуса 1, внутренность которых не пересекается с $\mu_j(\gamma)$, но $\mu_j(q_j) \in \mu_j(F)$. Перейдя, если нужно, еще раз к подпоследовательности, можно считать, что

$\mu_j(B_j)$ сходится при $j \to \infty$ к замкнутому шару B, внутренность которого не пересекается с $d\gamma$, но его центр $q = \lim_{j\to\infty} \mu_j(q_j)$ лежит в dF. Это противоречит равенству $dF = d\gamma$, что и доказывает утверждение (a).

(b) Если F содержит замкнутую жорданову кривую γ класса BT, то $F = \gamma$. Действительно, в силу (a) множество $F\backslash\gamma$ замкнуто и ввиду связности F должно быть пустым. Поэтому в дальнейшем рассуждении можно считать, что F не содержит замкнутых жордановых кривых с ограниченным искривлением.

(c) Покажем, что для любых двух жордановых дуг $\gamma_1, \gamma_2 \subset F$ класса c-BT таких, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{p\}$, множество $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ является жордановой дугой с ограниченным искривлением. Допустим, что это не так. Тогда найдется последовательность $x_j, y_j \in \gamma$ пар точек такая, что для поддуги $\tau_j \subset \gamma$ с концами в точках x_j, y_j выполняется оценка $\operatorname{diam}\tau_j > j|x_j - y_j|$. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $x_j \to x_0$ и $y_j \to y_0$. Так как $j|x_j - y_j|$ ограничено, то $x_0 = y_0 = p$. В силу ограниченности искривления дуг γ_1 и γ_2 точки x_j, y_j разделяются точкой p для бесконечного числа индексов j. Поэтому без нарушения общности можно считать, что $x_j \in \gamma_1$ и $y_j \in \gamma_2$ для всех j. Поскольку $j|x_j - y_j| < \operatorname{diam}\tau_j \le c(|x_j - p| + |y_j - p|)$, одно из неравенств $|x_j - p| \ge (j/2c)|x_j - y_j|$ или $|y_j - p| \ge (j/2c)|x_j - y_j|$ реализуется для бесконечного числа индексов j. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можем считать, что

$$|x_j - p| \ge (j/2c)|x_j - y_j| \tag{6}$$

при всех j. Найдутся точки $z_j \in \gamma_2$ такие, что $|x_j - z_j| = d(x_j, \gamma_2) = \delta_j$. Построим микроскоп $\left\{\mu_j(x) = z_j + \delta_j^{-1}(x - z_j)\right\}$ на F, который можно считать сходящимся, выделив при необходимости подпоследовательность. По условию теоремы множество $dF = \operatorname{Lim}\mu_j(F)$ есть жорданова кривая в $\overline{\mathbb{R}}^n$. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно также считать, что имеет место сходимость $\mu_j(\gamma_2) \to L \subset dF$ и $\mu_j(x_j) \to a \in dF$. Так так γ_2 лежит вне шара $B_j(x_j, \delta_j)$ при всех j, то L лежит вне шара $B(a, 1)$ и, следовательно,

$$a \in dF\backslash L. \tag{7}$$

Однако в силу оценки (6) микроскоп $\{\mu_j\}$ на γ_2 удовлетворяет условию (5) теоремы 4.1, в силу которой континуум L является жордановой кривой в $\overline{\mathbb{R}}^n$. Следовательно, $L = dF$, что противоречит соотношению (7). Полученное противоречие и доказывает утверждение (c).

(d) Покажем, что для любых двух точек $a, b \in F$ существует единственная жорданова дуга $\gamma_{ab} \subset F$ с концами в этих точках, имеющая ограниченное искривление. При этом $\gamma_{ab} \in c'$-BT, где c' зависит лишь от c_0. Допустим, что $\gamma_1, \gamma_2 \subset F$ — различные жордановы дуги класса BT с концами в a, b. Пусть $G = \{x \in \gamma_0 = \gamma_1\backslash\{a, b\} : x \in \gamma_2\}$. В силу (a), множество G открыто в γ_0. Так как $G = \gamma_0 \cap \gamma_2$, то G замкнуто в γ_0. В силу связности γ_0 это означает, что либо $G = \varnothing$, либо $G = \gamma_0$. В первом случае жордановы дуги γ_1 и γ_2 пересекаются лишь в точках a, b и, следовательно, ввиду (c) $\gamma_1 \cup \gamma_2$ — замкнутая жорданова кривая класса BT. Наличие таких кривых мы исключили из рассмотрения в п. (b). Поэтому $G = \varnothing$ и, значит, $\gamma_1 = \gamma_2$. Тем самым установлена единственность жордановой дуги класса BT с концами в a, b. По теореме Тукиа [3, теорема 1A, с. 559] любую пару точек в F можно соединить жордановой дугой класса c'-BT, где c' зависит лишь от c. Это завершает доказательство утверждения (d).

(e) Покажем, что объединение любых двух жордановых дуг $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \subset F$ класса BT есть жорданова дуга класса c'-BT, где c' определено в п. (d). Пусть a_1, b_1 — концы γ_1. Упорядочим множество точек на кривой γ_1 в направлении от a_1 к b_1 и положим $G = \gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \varnothing$. Для любой пары точек в G поддуга на γ_1 с концами в этих точках содержится в G вследствие п. (d). Поэтому G является поддугой в γ_1 с некоторыми концами p, q, $a_1 \leq p < q \leq b_1$. Пусть a_2, b_2 — концы дуги γ_2, точки которой упорядочены так, что $a_2 \leq p < q \leq b_2$. В силу утверждения (c) точка p не может быть внутренней одновременно для обеих дуг γ_1 и γ_2. Поэтому либо $p = a_1$, либо $p = a_2$. Аналогично для точки q справедливо либо $q = b_1$, либо $q = b_2$. Если $p = a_1$ и $q = b_1$, то $\gamma_1 = G \subset \gamma_2$, $\gamma = \gamma_2 \in$ BT. Если $p = a_1$ и $q = b_2$, то $\gamma = \gamma_{a_2p} \cup G \cup \gamma_{qb_1}$ является в силу (c) жордановой дугой класса BT. Если $p = a_2$ и $q = b_1$, то $\gamma = \gamma_{a_1p} \cup G \cup \gamma_{qb_2}$ есть жорданова дуга с ограниченным искривлением согласно (c). И, наконец, если $p = a_2$ и $q = b_2$, то $\gamma_2 = G$ и $\gamma = \gamma_1 \in$ BT. Таким образом, во всех возможных случаях γ является жордановой дугой класса BT. В силу (d) $\gamma \in c'$-BT, что и утверждалось.

(f) Любое конечное подмножество $P = \{p_1, \dots, p_N\} \subset F$ содержится в некоторой жордановой дуге $\gamma \subset F$ класса c'-BT. Воспользовавшись утверждением (d), построим дуги γ_j класса c'-BT с концами p_j, p_{j+1}, $j = 1, \dots, N-1$, и возьмем их объединение, которое будет жордановой дугой класса c'-BT в силу п. (e).

(g) Возьмем какую-нибудь последовательность конечных множеств $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ такую, что $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_j$ плотно в F. Воспользовавшись (f) и (e), построим последовательность γ_j жордановых дуг класса c'-BT такую, что $F_j \subset \gamma_j$ и $\gamma_j \subset \gamma_{j+1}$ для всех $j = 1, 2, \dots$. Тогда $F = \operatorname{Lim} \gamma_j$. В силу [1, следствие 4.11, с. 113] каждая дуга γ_j является образом отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}^1$ при η-квазисимметрическом вложении φ_j, где функция искажения η зависит лишь от c'. Так как $\operatorname{diam} F < +\infty$, семейство $\{\varphi_j\}$ вложений равностепенно непрерывно (см. [1, теорема 3.5, с. 105]) и, перейдя при необходимости к подпоследовательности, мы можем считать, что имеет место равномерная сходимость $\varphi_j \to \varphi : [0,1] \to F$ к отображению, являющемуся η-квазисимметрическим вложением (см. [1, теорема 3.7, с. 106]). Следовательно [1, теорема 2.11, с. 101], F есть жорданова дуга с ограниченным искривлением, что и завершает доказательство теоремы.

Примечание. Теорема 4.5 дает полное решение задачи, поставленной первым автором в 1988 г. в более слабой форме: доказать, что если любой инфинитезимальный элемент жордановой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ является окружностью в $\overline{\mathbb{R}}^n$, то γ имеет ограниченное искривление. Эта задача обсуждалась с О. Мартио в 1995 г. в Хельсинки, который сделал ряд весьма ценных замечаний относительно возможных применений этой теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. 1980. V. 5, N 1. P. 97–114.
2. *Асеев В. В., Кузин Д. Г.* Достаточные условия квазисимметричности отображений прямой и плоскости // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1225–1235.
3. *Tukia P.* Spaces and arcs of bounded turning // Michigan Math. J. 1996. V. 43, N 3. P. 559–584.
4. *Кузин Д. Г.* О критериях квазисимметричности отображения прямой в плоскость // Материалы 34-й Междунар. студ. конф. НГУ. Новосибирск, 1996. С. 43–44.

5. *Асеев В. В.* Инфинитезимально жордановы континуумы // 3-й Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвященный памяти С. Л. Соболева. Тез. докл. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1998. Ч. 1. С. 55–56.
6. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966, Т. 1; 1969, Т. 2.
7. *Александрян З.А., Мирзаханян Э.А.* Общая топология. М.: Высш. шк., 1979.
8. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.
9. *Зорич В. А.* О некоторых открытых вопросах теории пространственных квазиконформных отображений // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1971. Вып. 3. С. 46–50.
10. *Thurston W. P.* Zippers and univalent functions // The Bieberbach conjecture. Proc. of the Sympos. on the Occasion of the Proof (Math. surveys and monogr., No 21). Amer. Math. Soc., 1986. P. 185–197.
11. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
12. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/1985. V. 44. P. 218–234.
13. *Асеев В. В., Троценко Д. А.* Квазисимметрические вложения, четверки точек и искажение модулей // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 32–28.
14. *Асеев В. В.* Квазисимметрические вложения и отображения, ограниченно искажающие модули / Ред. «Сиб. мат. журн.». Новосибирск, 1984. 30 с. Деп. в ВИНИТИ 06.11.94, № 7190-84.
15. *Асеев В. В.* Нормальные семейства топологических вложений // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. Вып. 76. С. 32–42.

Статья поступила 10 сентября 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
ase@math.nsc.ru